数学珍宝

——历史文献精选

李文林 主编

[67]

Lemma XVI.

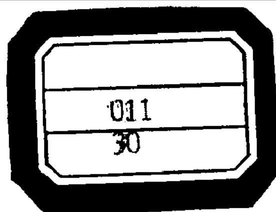
A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

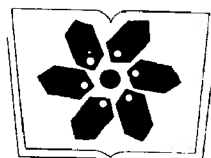
Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet: Ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & axis transversus differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecto *PR* perpendiculari ad *AB*, demissoq; *ZR* perpendiculari ad *PR*, erit ex natura hujus Hyperbolæ *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt *A*, *C* & axis transversus differentia inter *AZ* & *CZ*, duciq; potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ~~adeoq; rectis *RP*, *SQ* concurrentibus in *T*, locabitur punctum *Z* in recta *TZ* positione data.~~ Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt *B* & *C* & axis transversus differentia rectarum *BZ*, *CZ*, inveniri potest alia recta in qua punctum *Z* locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habetur punctum quæsitum *Z* in earum intersectione. *Q. E. I.*

Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ* æquantur, punctum *Z* locabitur in perpendiculo bisecante distantiam *AB*, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

K 2 *Cas.*

科学出版社





中国科学院科学出版基金资助出版

数学珍宝

——历史文献精选

李文林　主编



国家自然科学基金资助项目

科 学 出 版 社

1 9 9 8



内 容 简 介

在几千年数学发展的过程中，产生了无数不朽的历史文献，它们是人类智慧的珍宝。但原始文献浩如烟海，且用不同文种写成，读者很难查阅。本书在国外数学原著的基础上，选译了90余篇名著并加以注释，加上精选的中国古算名著，共100篇。这些珍贵文献或是代表了一个新的数学领域的肇兴，或是体现了一种数学思想方法的产生，或是说明了一些重大数学问题的提出和解决，总之，均可给数学工作者和数学爱好者以深刻启迪。各文前有编者按语，这些按语综合起来，勾画出数学思想发展的简明脉络。本书选材精当，译文准确，自成系统。

图书在版编目(CIP)数据

数学珍宝：历史文献精选/李文林主编 .-北京：科学出版社，1998.10

ISBN 7-03-006393-7

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.数学史-史料 Ⅳ.O11

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第25289号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1998年10月第一次印刷 印张：27½

印数：1—2 100 字数：740 000

定价：48.00元

序　言

数学是最古老的科学领域之一。从远古屈指计数到现代高速电子计算机,从量地测天到抽象严密的公理化体系,在几千年数学发展的历史长河中,产生过无数不朽的篇章,它们是数学进化的记录,人类智慧的珍宝。

莱布尼茨(G. Leibniz,1646～1716)说过:"了解重大发现,特别是那些决非偶然的、经过深思熟虑而得到的重大发现的真正起源,是极为有益的。"① 韦尔(H. Weyl,1885～1955)也指出:"如果不去追溯自古希腊以来各个时代所发现和发展起来的概念、方法与结果,我们就不能理解前50年数学的目标和成就。"②阅读有关的原始著述,正是了解数学各分支的起源与发展的最直接、可靠的途径。通过历史范例,可以"促进数学发现的艺术,揭示数学发现的方法"③,推动现实的数学研究,并把握这门科学的未来。

但是,古今中外数学原始文献浩如烟海,并且是用不同文种写成的。且不说古代希腊、印度与阿拉伯的数学著作,在近代,例如牛顿的数学论文传世的就有8大卷,高斯的全集计12卷,欧拉全集更达80余卷之巨,……更多的创造性成果散布在难以计数的数学期刊中。任何个人查阅数学历史文献所面临的困难是不言而喻的。于是许多国家便有出版"数学原著选"(Source Book)之举,选录、

---

① G. Leibniz: Historia et origo Calculi differentialis (微分学的历史和起源,1714). 英译文见 J. M. Child: The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, Open Court, 1920.

② H. Weyl: A Half-Century of Mathematics, American Mathematical Monthly, vol. 58, no. 8, 1951, p. 523.

③ 同①。

翻译数学史上最重要的原始著述，汇编成册，使读者能够领略数学历史文献中最精华的片断，并为进一步查阅原著提供线索。数学原著的编选，已被公认为数学与数学史研究的一项重要的基本建设。

遗憾的是国内至今还没有一本这样的著作，本书试图填补这一空白，在国外已出版的数学原著选的基础上，节录、译注了100篇数学历史名著以飨读者。本书虽然参考和利用了国外同类著作，但在选材、体例等方面具有自己的特点。全书100篇文献从古埃及纸草书和巴比伦泥版文书到19世纪庞加莱、希尔伯特等数学名家的论著，时间跨度4000余年，在地域上则包括了不同民族与国家的历史贡献，特别是编进了国外同类著作由于文字障碍或抱有偏见一般略而不收的东亚（中国、日本）古典数学著述；对于国外流行的主要数学原著选所编录的西方文献，本书也根据数学与数学史研究的进展（或从不同角度）而作了甄选与调整。例如，我们略去了相当于秦九韶高次方程数值求解程序而西方文献中惯称的“霍纳方法”，而增选了庞加莱关于组合拓扑学、克莱茵关于几何学的群论原则、巴贝吉关于通用计算机的论述，等等；另外在结构上，17世纪以前的文献按地域（分古代与中世纪的东方、古代希腊与文艺复兴的欧洲三大部分）编排，17世纪以后（含17世纪）的近代文献则按基本学科（数论与代数、几何、分析、概率论、数理逻辑与计算机）编排。这种编纂形式不同于国外现有的各种数学原著选，我们认为更为全面、紧凑，更利于读者了解数学发展的客观实际与不同风格、特点。

由于篇幅所限，我们在编选过程中不得不忍痛割爱，舍弃了许多名篇佳作，尤其是未能选入20世纪的著述，这一方面因为本世纪数学文献数量之巨大，几乎超过了以往时代的总和，另一方面则因为现代数学许多概念、方法还处于变化、发展之中，所以最好的处理方法是在时机成熟时编辑20世纪数学原著选专集。好在由于时间相去未远，本世纪许多数学文献在一般图书馆相对而言还是比较容易查找的。

本书选录的每一篇文献，正文前都加有简短的编者按语（用楷

体排印)，概要介绍作者生平和作品的历史背景、影响意义等。这些按语由主编统一撰写，希望综合起来能勾画出数学思想发展的简明脉络。

各篇录、译文献的出处，均在相应编者按语的最后给出。本书编译尽量依据原作第一文种本，对囿于国内条件，无法利用第一文种本的著作(尤其是古埃及纸草书、巴比伦泥版文书、梵文、阿拉伯文等)，则根据适当的英译本或其他西文译本转译，但一律注明所据底本并做好参校工作。本书编译过程中最常参照使用的几种英文本数学原著选，请见序言后所附“主要参考文献”目录。

各篇文献中原作者所加注释(原注)全部保留并译成中文。译者注释(译注)则本少而精原则，择要而设。所有注释一律采用脚注形式，原注与译注混合编号，如系原注，则在注文后加“原注”字样，译注则不作特别说明。

少数情况下为使节录的文字意义连贯，编译者在正文中写有必要的插语，并加方括号以示区别。

译文中公式、符号、名词术语一般遵从原作，个别场合为便于理解改用现代符号、术语者，均加译注说明原貌，以便比照。

本书是集体的成果，共有50位数学和数学史专家不辞烦劳承担了有关篇章的译、校工作，他们的姓名分篇署于文后。数学原著的译校是十分艰辛的任务，这里谨向每一位译校者致以衷心的感谢，他们为保证本书的质量作出了宝贵的贡献。

本书在立项、选题过程中曾受到吴文俊、王元、杨乐院士的推荐与首肯，三位院士多年来对数学史研究一直给予热情鼓励和鼎力支持，编者愿借此机会表示最诚挚的谢意。

中国科学院科学出版基金委员会为本书提供了出版资助；数学原始文献的整理、研究工作长期受到国家自然科学基金委员会的资助，在此一并致谢。

编者十分高兴本书能由科学出版社出版，并感谢出版社领导对本书出版的重视。编者还要特别感谢张鸿林编审。我与张鸿林先生关于数学历史文献的合作可以追溯到本书正式立项之前，记

得有一次他特意将刚见到的 D. J. Struik 所编《A Source Book in Mathematics》一书复印相赠，这个复印本后来成为本书的重要参照资料之一，而在当时则大大促成了编者编纂我国自己的数学原著选的决心。从那时起，张鸿林先生始终如一为这本数学历史文献选编的成功面世而付出了大量的心血。

本书是国内编选数学原著的首次尝试。欲将几千年丰富卓绝的数学思想浓缩在一部选集中，这本来是一件几乎不可能完成的任务，加上编者学识、经验有限，本书缺点与错误之处在所难免，欢迎批评指正。我们衷心希望本书能够成为一个有益的开端，推动国内数学原始文献的整理、编选与研究工作，并产生出规模更大、质量更高的数学原著选。

李文林

1997 年 5 月于北京

主要参考文献

G. Birkhoff (ed.): A Source Book in Classical Analysis, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1973.

R. Calinger (ed.): Classics of Mathematics, Moore Publishing Company Inc. Oak Park, Illinois, 1982.

J. Fauvel and J. Gray (eds.): The History of Mathematics: A Reader, Macmillan Education Ltd. in association with the Open University, London, 1987.

H. Midonick (ed.): The Treasury of Mathematics. A Collection of Source Material in Mathematics……. Philosophical Library Inc. New York, 1965. Reprinted Penguin Books (2 vols), Harmondsworth, England, 1968.

D. E. Smith (ed.): A Source Book in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1929. Reprinted Dover (2 vols), New York, 1959.

D. J. Struik (ed.): A Source Book in Mathematics, 1200—1800, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.

目　　录

Ⅱ. 古代希腊

Ⅲ. 文艺复兴的欧洲

Ⅳ. 微积分的制定与分析的形成

V. 数论与代数的进化

数论

Ⅵ. 几何学的变革

Ⅶ. 分析的发展

Ⅷ. 概率论、数理逻辑与计算机

概率论

数理逻辑

计算机

Ⅰ. 古代与中世纪的东方

埃及与巴比伦

1. 埃及纸草书中的数学问题

古埃及人在一种用纸莎草(papyrus)压制成的草片上书写,这些纸草书有的幸存至今,成为反映古代埃及文明的珍贵文献。我们关于古埃及数学的知识,主要就是依据了两部纸草书——莱茵德纸草书和莫斯科纸草书。通过对这两部纸草书的研究可知:埃及人很早就使用十进记数法,但不知道位值概念。古埃及算术以加法为主,乘法是通过连续加倍来进行的。埃及数学的一个重要特色是分数运算的技巧,其中所有分数都用所谓"单位分数"(即分子为 1 的分数)来表出。埃及人能解含若干个未知数的一次方程,但只能处理最简单的二次方程。他们在解题过程中普遍使用了"假设法"(rule of false position)。埃及几何学与实用测量密切相关,它包括了计算正方形、矩形、等腰梯形等图形面积和像平截头方锥这样的立体体积的准确公式,对圆面积也能作近似计算,其中的圆周率相当于 3.1605。埃及人常对问题的数值结果加以验证,但尚无证明的思想。尽管如此,埃及几何为希腊人构筑严密的演绎体系提供了素材与基础。

1.1. 莱茵德纸草书

莱茵德纸草书最初发现于埃及底比斯(Thebes)古都废墟中,1858 年为苏格兰收藏家莱茵德(H. Rhind)购得,因名。该纸草书现藏伦敦大英博物馆,长 525 厘米,宽

33厘米，中间有少量缺失，缺失部分1922年意外地在纽约一私人收存的埃及医学纸草书中被发现，现藏美国布鲁克林博物馆。

莱茵德纸草书又称阿姆士纸草书，是公元前1650年左右一位叫阿姆士(A'h-mose)的人用僧侣文抄录的。由阿姆士所加的前言可知，他抄录的是一部已经流传了约两个世纪的更古老的著作。该纸草书的结构，在阿姆士的前言之后，是一张形如$\frac{2}{k}$(k为101以内的奇数)的分数(分解为单位分数)表。由于埃及人特殊的倍加式乘法过程以及只允许用单位分数表示所有分数(2/3例外)的限制，这样的分数表是必要的。分数表之后是纸草书的主体部分——84个数学问题(最后还有一段难以解释的文字，即一般所称的问题85)。这些问题使莱茵德纸草书成为现存内容最丰富的古埃及数学文献。以下摘译的分数表(部分)及9个问题，主要是依据A. Chace的英译本：The Rhind Mathematical Papyrus, Oberlin, Ohio, Mathematical Association of America, 1927～1929. 同时参照其他译本作了少量修正。

精确计算。认识世间万物和一切奥秘的指南。本书系于上、下埃及之王阿尤塞雷(A-user-Re)万岁陛下在位33年[①] 氾水季四月[②]，根据上、下埃及之王涅玛厄特雷(Ne-ma'et-Re)[③]时期之古本抄录。抄录人阿姆士。

① 约相当于公元前1650年。阿尤塞雷为埃及喜克索斯朝法老。

② 古代埃及人将一年分为三季，即：氾水季、播种季与收割季，每季四个月。

③ 即第十二朝法老阿美涅姆赫特(Amenemhet)三世，约公元前1849～1801年在位。

奇数除 2 表

3 除 2

通过对 3 的运算得 2。3 的$\frac{2}{3}$是 2。

5 除 2

5 的$\frac{1}{3}$是 1 $\frac{2}{3}$,5 的$\frac{1}{15}$是$\frac{1}{3}$。

计算

1	5
$\frac{2}{3}$	3 $\frac{1}{3}$
1\\$\frac{1}{3}$	1 $\frac{2}{3}$
\\$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$

7 除 2

7 的$\frac{1}{4}$是 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$,7 的$\frac{1}{28}$是$\frac{1}{4}$。

1	7			
$\frac{1}{2}$	3$\frac{1}{2}$		1	7
\\$\frac{1}{4}$	1$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$		2	14
2\\4	28	$\frac{1}{4}$	4	28

9 除 2

9 的$\frac{1}{6}$是 1 $\frac{1}{2}$,9 的$\frac{1}{18}$是$\frac{1}{2}$。

1	9
$\frac{2}{3}$	6
$\frac{1}{3}$	3

$\backslash\frac{1}{6}$　　$1\frac{1}{2}$

$\backslash 2$　　18　　$\frac{1}{2}$

……

99 除 2

99 的$\frac{1}{66}$是 $1\frac{1}{2}$，99 的$\frac{1}{198}$是$\frac{1}{2}$。

	1	99	
求	$\backslash\frac{2}{3}$	66	$1\frac{1}{2}$
	$\backslash 2$	198	$\frac{1}{2}$

101 除 2

通过对 101 的运算得 2。101 的$\frac{1}{101}$是 1，101 的$\frac{1}{202}$是$\frac{1}{2}$，101 的$\frac{1}{303}$是$\frac{1}{3}$，101 的$\frac{1}{606}$是$\frac{1}{6}$。

计算

$\backslash 1$	101	1
$\backslash 2$	202	$\frac{1}{2}$
$\backslash 3$	303	$\frac{1}{3}$
$\backslash 6$	606	$\frac{1}{6}$

问题 1.　10 个人分一只面包的例子。

每人分得$\frac{1}{10}$。

验证．　用 10 乘$\frac{1}{10}$。

这样做：　1　　$\frac{1}{10}$

$\backslash 2$　　$\frac{1}{5}$

4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	
\8	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$

加起来为一只面包，正确。

问题 22. 将$\frac{2}{3}\frac{1}{30}$加上一数使补成 1。

取数 30，它的$\frac{2}{3}\frac{1}{30}$是 21。30 比 21 大 9。将 30 乘一个数以得到 9。

1	30
\\$\frac{1}{10}$	3
\\$\frac{1}{5}$	6
和数	9

因此，为将$\frac{2}{3}\frac{1}{30}$补成 1，应加上$\frac{1}{5}\frac{1}{10}$。

作为验证，将两数相加，即

$\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$，和为 1；

对 30 而言，这些分数相当于

20 6 3 1，和为 30。

问题 24. 某数与它的$\frac{1}{7}$相加得 19，求该数。假设该数为 7

\1	7
\\$\frac{1}{7}$	1
和数	8

然后计算何数乘以 8 能得 19，再将该数乘 7 就得到所求数[①]。

1 8

① 本题是采用“假设法”解题的例子。这种方法实质上相当于：对方程 $Ax=B$，任设一值 x' 为其解，然后计算 $Ax'=B'$ 及比值 $k=B/B'$，则真解 $x=kx'$。

$\backslash 2$ 16

$\frac{1}{2}$ 4

$\backslash\frac{1}{4}$ 2

$\backslash\frac{1}{8}$ 1

和数 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$

$\backslash 1$ $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$

$\backslash 2$ $4\frac{1}{2}\frac{1}{4}$

$\backslash 4$ $9\frac{1}{2}$

验证如下： 所求数 $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$

$\frac{1}{7}$ $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$

和数 19

问题 40. 5 人分 100 只面包，欲使各人分得的面包数之差相等，并使最大三数之和的$\frac{1}{7}$等于最小二数之和。求各人分得的面包数之差。

这样做：先假设差为 $5\frac{1}{2}$，①则 5 人所分得的面包数分别为

23 $17\frac{1}{2}$ 12 $6\frac{1}{2}$ 1，和为 60。

然后计算何数乘以 60 能得 100，再将此数分别乘上述数列的各项，就得到真正的数列。

---

① 这一假设（公差 $d=5\frac{1}{2}$）应该是从先设最少的面包数为 1 而来，因根据条件 $a_1+a_2=\frac{1}{7}(a_3+a_4+a_5)$ 可推知 $d=\frac{11}{2}a_1$。（此处以 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 分别表示 5 人分得的面包数且 a_1 最小。）

$\backslash 1$	60
$\backslash \frac{2}{3}$	40

和为 $1\frac{2}{3}$,乘 60 得 100。

用 $1\frac{2}{3}$ 分别乘	23	得	$38\frac{1}{3}$
	$17\frac{1}{2}$	得	$29\frac{1}{6}$
	12	得	20
	$6\frac{1}{2}$	得	$10\frac{2}{3}\frac{1}{6}$
	1	得	$1\frac{2}{3}$
和数	60	得	100

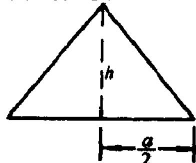
问题 48. 比较圆及其外切正方形的面积。

直径为 9 的圆		边长为 9 的正方形	
1	8	$\backslash 1$	9
2	16	2	18
4	32	4	36
$\backslash 8$	64	$\backslash 8$	72
		和数	81[①]

问题 56. 设一金字塔高为 250 肘,底边长为 360 肘,求它的赛克特[②]。

---

① 若用 d 表示圆的直径,r 为半径,A 为圆面积,则本题相当于给出计算公式:$A=(8/9d)^2=(16/9r)^2=\frac{256}{81}r^2$。这意味着圆周率 π 取值 $\frac{256}{81}\approx 3.1605$。但埃及人并无圆周率的概念。



② 古埃及人将一倾斜直线每垂直升高一个单位时,相对于垂线的水平偏离称之为"赛克特"(seqt),对一金字塔而言,它的赛克特即为其底边的一半与高之比,其中水平移动以"掌"(palm)为测量单位,垂直升高以"肘"(cubit)为单位,1 肘=7 掌,1 掌=4 指。

取 360 的$\frac{1}{2}$，得 180。设某数与 250 相乘等于 180；算得该数为$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{50}$肘。1 肘＝7 掌。用$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{50}$乘 7。

1	7	
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	
	$\frac{1}{5}$	$1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$
	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{25}$

赛克特为（每肘）$5\frac{1}{25}$掌。

问题 57. 设一金字塔的赛克特为每肘 5 掌 1 指，底边长 140 肘，求金字塔的高。

用赛克特的二倍 $10\frac{1}{2}$（掌）除 1 肘。因 1 肘等于 7 掌，故设某数与 $10\frac{1}{2}$相乘得 7：7 是 $10\frac{1}{2}$的$\frac{2}{3}$。然后对底边长 140 运算：140 的$\frac{2}{3}$是 $93\frac{1}{3}$，这就是高[①]。

问题 62. 计算同袋包装的不同贵重金属的价值的例子。假如有人告诉你，购置一袋包括有金、银和铅的贵重金属共化了 84 沙地[②]。已知金的单价每德本[③] 12 沙地；银每德本 6 沙地；铅每德本 3 沙地。问每种金属价值几何？

将已知各贵重金属每德本价相加，结果得 21 沙地。将 21 乘以某数使积为 84，此处 84 是整袋金属的总价。结果求出该数为 4，这

---

① 注意在本题中作者的算法是将赛克特乘以 2 而不是取底边长之半；然后用 2 倍赛克特除 7 再乘底边长而不是用 7 除二倍赛克特再除底边长，结果当然是一样的。

② 沙地(sha'ty)：古埃及词语，原意“海豹皮”，此处用作为钱币单位。

③ 德本(deben)：古埃及重量单位，1 德本约合 91 克。

是每种金属的重量数①。

这样做：

12 乘以 4 得 48 沙地，为袋中所装金的价值，

6 乘以 4 得 24 沙地，为银的价值，

3 乘以 4 得 12 沙地，为铅的价值，

21 乘以 4 得 84 沙地，即整袋金属的价值。

问题 79.

房子	7
猫	49
鼠	343
谷穗	2401
赫卡特②	16807
总和	19607③

1.2. 莫斯科纸草书

莫斯科纸草书又叫戈列尼雪夫纸草书，1893 年由当时在开罗大学任埃及学教授的沙俄贵族戈列尼雪夫(В. С. Голенищев)购得，后经苏联历史学家土拉叶夫(Б. А. Тураев)和斯特卢威(В. В. Струве)等研究并于 1930 年正式出版。原件现藏莫斯科普希金精细艺术博物馆。莫斯科纸草书是出自埃及第十二朝一位佚名作者的手笔(约公元前 1890 年)，其长度与莱茵德纸草书大致相同，

---

① 纸草书原文中没有明说金、银、铅重量相等，但解题过程应包含这一条件。

② 赫卡特(hekat)：古埃及容量单位，此处表示以赫卡特为单位计量的粮食。

③ 纸草书原文对本题没有任何进一步的说明。本题从形式看应该是一个以 7 为公比的等比级数求和问题。A. Chace 用现代术语将本题译成："求一几何级数前 5 项之和，该级数的首项为 7，以后逐项乘以 7"。但对具体题意目前有两种解释。A. Eisenlohr(1877)认为"房子"、"猫"等为纸草书作者赋予不同幂次的名称，即："房子"表示一次幂、"猫"表示二次幂，等等。另一种解释则将本题意译为："某人有 7 座房子，每座房子有 7 只猫，每只猫逮 7 只老鼠，每只鼠吃 7 棵谷穗，每棵谷穗产 7 赫卡特(粮食)。问房子、猫、鼠、谷穗与粮食总数是多少？"

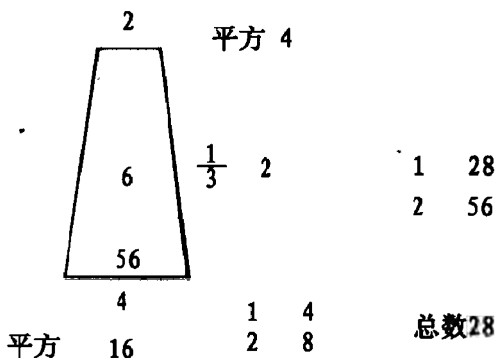
宽只及后者的四分之一，全书包括 25 个数学问题，内容与莱茵德纸草书并无本质区别，但其中的几何问题反映出更高的水平，第 14 题尤为著名，以下根据 B. Gunn & T. E. Peet 的英译本：Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus 译出，原载 Journal of Egyptian Archaeology，vol. 15，no. 5，1929. London。

问题 14. 计算平截头方锥(体积)的例子。

如果有人告诉你：一平截头方锥高为 6，下底边长 4，上底边长 2。

你应当先求下底边长 4 的平方，得 16。取 4 的 2 倍，得 8，再求上底边长 2 的平方，得 4。将 16，8 和 4 相加，得 28，然后你应当取 6 的 $\frac{1}{3}$，得 2。再将 28 乘 2，得 56。瞧，它的体积是 56。

你将发现这是正确的①。



莫斯科纸草书第 14 题附图

(李文林 译)

---

① 设有一平截头方锥，用 h 表示其高，a 和 b 分别表示其下底与上底之边长。莫斯科纸草书第 14 题的计算程序就相当于给出公式：$V=(a^2+ab+b^2)\cdot\frac{h}{3}$。

2. 巴比伦泥版文书中的数学问题

西亚美索不达米亚地区(即两河流域——底格里斯与幼发拉底河流域)的古代文明习惯上被称为巴比伦文明,记载这一文明的历史文献主要是泥版文书——用尖芦管在湿泥版上刻写的楔形文字材料。泥版文书经烘、晒后比埃及纸草文书易于保存。迄今已有近50万块泥版文书被挖掘出土,其中大约有300多块是数学文献,它们成为今天人们关于古代巴比伦数学知识的主要来源。

现存的数学泥版文书主要分属两个相隔遥远的时期,其中大部分是来自古巴比伦王朝(约公元前1900~1600),另有部分则来自塞琉古(Seleucus)时期(始于公元前312年)。对这些泥版文书的研究揭示了巴比伦人对早期数学的贡献。

巴比伦人创造了一套以六十进制为主的记数系统。对大于6000的数采用位值记法,这是巴比伦数学的一项突出成就。当然这种位值制并不彻底,因为到很晚的时候还没有零号,往往需要根据上下文才能确定一个六十进表示的具体数值。巴比伦人长于计算,并发展了许多成熟的算法程序,开方算法便是有代表性的例子之一,他们获得了$\sqrt{2}$的相当精确的近似值(见2.2(5))。尽管如此,巴比伦人却更经常地利用各种数表进行计算。在300多块数学泥版文书中,就有200多块是数学用表,包括乘法表、倒数表、平方表、立方表、平方根表、立方根表,甚至还有指数表等等。

巴比伦人的代数相当发达,特别是在方程求解方面表现出高度的技巧。他们用相当于现代的公式法求解一元二次方程(见2.2(2),(7)),并能通过简单的变量代换求解某些特殊的三、四次方程。当然,所有这些都是用文

字来表达。巴比伦几何可以看作是代数方法的应用。巴比伦人已掌握计算三角形、梯形等平面图形面积和棱柱、平截头方锥等一些简单立体图形体积的公式。他们在多数情况取 3 作为圆周率，但 1932 年出土的一块泥版文书上出现了更精确的近似值，$\pi \approx 3\frac{1}{8}$。巴比伦人可能还具有相似三角形对应边成比例的知识(见 2.2)。

尽管巴比伦数学与埃及一样带有很强的实用性，但有一些泥版文书的数学问题却反映出巴比伦人的理论兴趣，普林顿 322 是这方面的典型(见 2.1)。这是巴比伦数学胜埃及一筹之处。

以下译、释的巴比伦数学问题，除 2.2(7)外均根据 O. Neugebauer 与 A. Sachs：Mathematical Cuneiform Texts, American Oriental Society, New Haven, Connecticut, 1945.

2.2(7)则译自 J. Fauvel & J. Gray：The History of Mathematics：A Reader, pp. 31～32.

2.1. 普林顿 322

(1)藏品描述

普林顿 322 是从集市购得的泥版文书，因曾被一个叫普林顿(G. A. Plimpton)的人收藏而得名("322"系普林顿的收藏编号)，但其最初来源不明。该泥版文书现存美国哥伦比亚大学图书馆珍本与手稿部。

普林顿 322 是一块更大的泥版文书的右半部分，其左边缘断裂处有现代胶水痕迹，说明缺损的左半部分是在出土以后丢失的。现存部分长 12.7 厘米，宽 8.8 厘米，上面记载的文字属古巴比伦语，因此其年代当在公元前 1600 年以前。

普林顿 322 实际上是一张表格，由 4 列 15 行六十进数字组成：

Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
[ta-k]i-il-ti si-li ip-tim	íb-si₈ sag	íb-si₈ si-li-ip-tim	mu-bi-im
[ša in-]na-as-sà-ḫu-ú-[m]a sag i-⋯-ú			
[1,59],15	1,59	2,49	ki—1
[1,56,56],58,14,50,6,15	56,7	3,12,1*	ki—2
[1,55,7],41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	ki—3
[1],5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	ki—4
[1],48,54,1,40	1,5	1,37	ki[—5]
[1],47,6,41,40	5,19	8,1	[ki—6]
[1],43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	ki—7
[1],41,33,59,3,45	13,19	20,49	ki—8
[1],38,33,36,36	9,1*	12,49	ki—9
[1],35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	ki—10
[1],33,45	45	1,15	ki—11
[1],29,21,54,2,15	27,59	48,49	ki—12
[1],27,3,45	7,12,1*	4,49	ki—13
[1],25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	ki—14
[1],23,13,46,4[0]	56	53*	ki[—15]

图1是普林顿322泥版的摹真图。其中最右边的一列数字显然是行序，而每列数上方的文字则应是栏目名称，其译释将在后面讨论。泥版的左上方与右中部有较大的剥损，表中带[]号者即原来缺失的文字，此处系根据诺依格包尔(O. Neugebauer)的考证补出。

(2)内容说明

在相当长时间内，普林顿322一直被认为是一张商业账目表而未受重视。1945年，诺依格包尔首先揭示了普林顿322的数论意义，从而引起了人们对这块泥版文书的极大兴趣。

根据诺依格包尔等人的研究，普林顿322数表与所谓“毕达哥

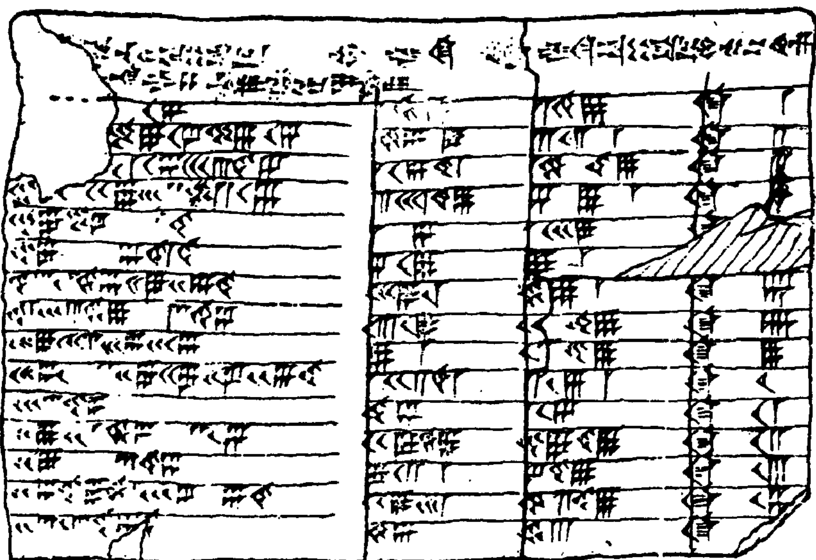


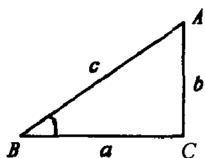
图1　普林顿 322 泥版摹真图

拉斯三角形"(即具有整数边长的直角三角形)有关。若以 a,b,c 分别表示一毕达哥拉斯三角形的长、短直角边和斜边,则它们必满足关系式 $a^2+b^2=c^2$,这样的一组整数 (a,b,c) 也称为"毕达哥拉斯数组",而计算表明:普林顿 322 数表第 Ⅱ 、Ⅲ 列的相应数字,恰好构成了毕达哥拉斯三角形中的直角边 b 与斜边 c。只有四处例外,即第 2,9,13,15 行,但诺依格包尔将它们解释为某种"笔误":如果将表 1 中相应行上带 * 的数字(3,12,1)、(9,1)、(7,12,1)、和 53 分别修正为(1,20,25)、(8,1)、(2,41)和(1,46),例外即可消除①。

至于第 Ⅰ 列数字(以下记作 s),诺依格包尔在恰当补出空缺数字后发现有如下关系: $s=(c/a)^2$,即 s 相当于角 B 的正割平

① 如第 9 行(9,1)与(8,1)在楔形文字中仅一划之差;第 13 行(7,12,1)可能是(2,41)的平方之误;第 15 行 53 是(1,46)的一半。只有第 2 行的例外比较费解。

方①。进一步的计算表明，表中的比值$\frac{c}{a}$以大约0;1的间距均匀递减，相应的夹角B则以约1°的间距从45°减至31°。因此，普林顿322的第Ⅰ列数字实际上给出了一张从31°至45°的正割三角函数平方表。这类数表很可能是为了天文或工程计算的需要而设计，但为什么用正割平方而不用正割本身。这仍然是个疑点。



(3)算法分析

一个自然的问题是普林顿322上的数字是怎样计算出来的？按现代数论知识，所有的素毕达哥拉斯数组(a,b,c)②都可用以下参数形式表出：

$$a=2pq,\ b=p^2-q^2,c=p^2+q^2 \qquad (*)$$

其中p,q互素，$p>q$且不同时为奇数。

种种迹象说明，古巴比伦人可能是通过上述法则来产生普林顿322表中各列数字的。

如果算出能按上述法则产生普林顿322表中b,c诸值的相应的p与q，我们得到下表：

	a	b	c	p	q
1	2, 0	1,59	2,49	12	5
2	57,36	56,7	1,20,25	1,4	27
3	1,20,0	1,16,41	1,50,49	1,15	32
4	3,45,0	3,31,49	5,9,1	2,5	54
5	1,12	1,5	1,37	9	4
6	6,0	5,19	8,1	20	9
7	45,0	38,11	59,1	54	25
8	16,0	13,19	20,49	32	15
9	10,0	8,1	12,49	25	12

① R.C.Buck等学者认为第Ⅰ列数字给出的是角B的正切平方表，分歧在于是否应补出最左边裂缝处的数字[1]，因$\sec^2 B=\text{tg}^2 B+1$。

② 即a,b,c互素的毕达哥拉斯数组。

续表

	a	b	c	p	q
10	1,48,0	1,22,41	2,16,1	1,21	40
11	1,0	45	1,15	2	1
12	40,0	27,59	48,49	48	25
13	4,0	2,41	4,49	15	8
14	45,0	29,31	53,49	50	27
15	1,30	56	1,46	9	5

其中顺便列出了毕达哥拉斯三角形另一直角边 a 的数值。

首先应该指出，除了第 11，15 行以外，其他各行中的 a,b,c 都互素[①]，这不能说成是偶然的。

其次我们注意到，所有的 p,q 都是所谓"正则数"，即它们的倒数皆可表成有限的六十进小数。因此，普林顿 322 数表是选择小的正则参数 p,q 而构成，而诺依格包尔认为这种选择与比值$\frac{c}{a}$的计算有关。由（＊）式有$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}(p\tilde{q}+q\tilde{p})$，其中 $\tilde{p},\tilde{q}$ 分别表示 p,q 之倒数，故$\frac{c}{a}$可由 p,q 直接算得，而 p,q 的正则性恰是为了保证运算在有限六十进小数的范围内进行。

普林顿 322 数表中出现的错误，也从反面印证了上述的推理：

---

① 将 a,b,c 诸值用十进数表示出来，它们的互素性就更容易看出。

a	b	c
120	119	169
3456	3367	4825
4800	4601	6649
13500	12709	18541
72	65	97
360	319	481
2700	2291	3541
960	799	1249
600	481	769
6480	4961	8161
60	45	75
2400	1679	2929
240	161	289
2700	1771	3229
90	56	106

每一处错都仅涉及同一行中的一个数字。特别引人深思的是第 2 列不包含任何错误，这说明表中各列数字是独立地算出，恰好符合（*）的特征。

最后，普林顿数表上方的栏目名称亦很说明问题。根据诺依格包尔的翻译，其中第Ⅲ列栏名“ib-si$_8$ si-li-ip-tim”意为“解出的对角线数”，第Ⅱ列栏名“ib-si$_8$ sag”意为“解出的宽数”。古巴比伦人称直角三角形的斜边为“对角线”（si-li-ip-tim），短直角边为“宽”（sag），这说明Ⅱ，Ⅲ两列数字确是通过某种程序“解出”。第Ⅰ列栏目缺漏文字较多，其确切意义尚待详考。

因此，巴比伦人通过（*）式产生普林顿 322 数表，这一论断已获得普遍支持。学者们推测，普林顿 322 丢失的左半部分必定列有 p，q 与 a 的相应数值。

2.2. 其他泥版文书

（1）YBC[①] 4652

问题 19. 我找到一块石头，但不知其重。此石重量的 6 倍加 2 金[②]，得数乘 24，再乘 $\frac{1}{7}$，再乘 $\frac{1}{3}$，然后复与自身相加，结果恰等于 1 码纳。问石头原重几何？石头原重为 $4\frac{1}{3}$ 金[③]。

（2）YBC 6967

已知依几布姆（igibūm）[④]比依古姆（igūm）大 7。问依几布姆和依古姆各为多少？

请您取 7（igibūm 超过 igūm 之数）的一半，得 3;30。3;30 与

---

① Yale Babylonian Collection（耶鲁大学巴比伦收藏）之缩写。后续数字系美国耶鲁大学对校藏巴比伦泥版文书的统一编号，下同。

② 金（gín）：巴比伦重量单位。其他重量单位有：码纳（ma-na）、色（se̅）等。1 码纳 =60 金，1 金=180 色，1 码纳约合 500 克。

③ 本题相当于求解方程 $(6x+2)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}\times24(6x+2)=1,0$。

④ igibūm 与 igūm 是古巴比伦数学文献中表示互为倒数的两个数的专用术语，在十进制中则相当于乘积为 60 之幂的两个数。

3;30 相乘，得 12;15。

将您得到的数 12;15 与积 1,0 相加，得 1,12;15。

1,12;15 的平方根是多少？答曰 8;30。

置 8;30 和与它相等的另一个 8;30，然后从其中之一减去塔基尔通(takīltum)[1] 3;30。将另一个加上 3;30。得数之一为 12，得数之二为 5。

12 就是 igibūm，5 则为 igūm[2]。

(3)YBC4186

有一蓄水池，面积为 10 平方加尔[3]，深 10 加尔。

将池中的水排空，问用这些水能灌溉多少面积的农田？设灌田水深 1 苏西。

置数 10 和 10，它们是正方形的边长；

置数 10，为池深；

再置数 0;0,10，为灌田水深。

取灌田水深 0;0,10 之倒数，得数 6,0 与池深 10 相乘，结果得 1,0,0；

记住 1,0,0 这个数；

求正方形边长 10 的平方，结果为 1,40；

---

① takiltum：此术语在巴比伦数学文献中不同场合有不同意义，此处似指解二次方程过程中需从平方根式加上或减去的项。

② 本题为巴比伦数学文献中典型的一元二次方程求解问题。若以 x 表 igibūm，y 表 igūm，则据题意 x,y 满足方程

$$\begin{cases} xy = 1,0 \\ x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 1,0 = 0 \\ y = x - 7 \end{cases}$$

题中给出的算法相当于

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 1,0} \pm \frac{7}{2} = \sqrt{1,12;15} \pm 3;30 = 8;30 \pm 3;30 = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

③ 加尔(GAR)：古巴比伦长度单位，其他长度单位有“苏西”(sŭ-si)、“库斯”(kŭs)等。1 加尔＝12 库斯；1 库斯＝30 苏西。其中库斯即 cubit(肘)，约合 50 厘米。

将 1,40 乘以你记住的数 1,0,0。灌田面积为 1,40,0,0 沙尔[①]。

(4)YBC5037

问题 1. 一基拉(ki-lá)[②],其正方底面边长为 3 加尔 3 库斯,深 $2\frac{1}{2}$库斯,每个工人日作土方量为 $7\frac{1}{2}$京[③],工银 6 色,求该基拉的面积、容积、工人数及工银总数[④]?

……

问题 4. 一基拉,长 3 加尔 4 库斯,宽 $2\frac{1}{2}$加尔,深 $3\frac{1}{2}$库斯。每个工人日作土方量 10 京,工银 6 色。求该基拉的面积、容积、工人数及工银总数?

……

问题 12. 修建一基拉,花费工银总数为 9 金。基拉深$\frac{1}{2}$加尔,每个工人日作土方量 10 京,工银 6 色。该基拉长、宽差 $3\frac{1}{2}$加尔,求它的长与宽? 长为 5 加尔;宽为 $1\frac{1}{2}$加尔。

……

问题 35. 一基拉,上底正方形边长为$\frac{1}{2}$加尔,下底正方形边长

---

① 沙尔(SAR):古巴比伦面积单位,1 沙尔即 1 平方加尔。本题的计算相当于公式 $A=\frac{l^3}{h}$,其中 l 为正方体状蓄水池的边长,h 为灌田水深,A 为灌田面积。此处假定灌田水深均匀。

② ki-la:似指一定形状的地下建筑(如地窖等),具体形状则需由上、下文来判别。YBC5037 包括了 44 个 ki－la 型的问题,其中问题 1～3 为正方棱柱;问题 4～34 为长方棱柱;问题 35～44 为平截头方锥。

③ 京(gín),古巴比伦容积单位,注意与表示重量单位的 gín(金)不同。

④ 设基拉容积为 V,每人每日土方量为 λ,日工银 w,工银总数 E,则有关系 $E=\frac{V}{\lambda}w$,此乃巴比伦数学文献中"基拉"型问题的基本计算公式。

为4 库斯，深为$\frac{1}{2}$加尔，求该基拉的容积？容积为 1 沙尔[①] 5 京。

(5)YBC 7289

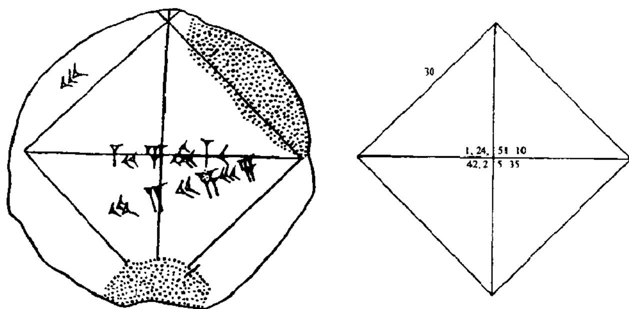


图 2

YBC 7289 是一张标有数字的正方形图(图 2)。其中数 30 表示正方形边长 a，而对角线上的两个数分别表示对角线长 d(42;25,35)和$\sqrt{2}$的近似值。容易验证这些数符合关系 $d=\sqrt{2}a$，这里$\sqrt{2}\approx 1;24,51,10\approx 1.414213$ 是相当精确的逼近。

(6)MLC[②] 1950

一三角形。长 20 加尔，

面积为 5,20，

30 加尔……[③]

求上宽与下宽？

你在计算时

取 20 的倒数，你将得到 0;3，

0;3 乘以 5,20，得数为 16。

16……上宽与……

---

① 沙尔(SAR)：古巴比伦容积单位，与面积单位“沙尔”(SAR)同名，注意 1(容积)沙尔＝1(面积)沙尔・1 库斯＝60 京。

② Morgan Library Collection(耶鲁大学摩尔根图书馆收藏)之编写，后续数字为该馆统一编号。

③ 省略号表示泥版文书上缺损、不清的文字，下同。

……长 30 乘以 2，

将得数 1,0 与上面的垂线 20 相加，

得数为 1,20。

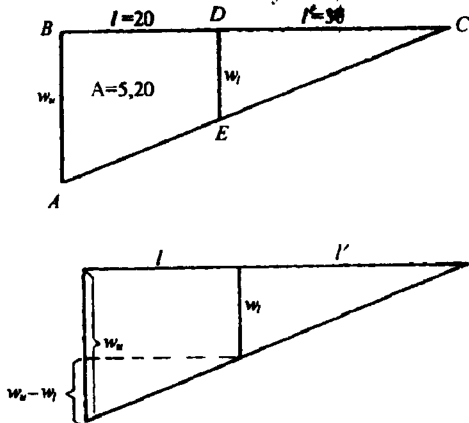
取 1,20 的倒数，得数 0;0,45 乘以面积 5,20，结果得 4。

将 16 分别加、减 4，得到上宽为 20；

下宽为 12[①]。

(7)BM[②]13901

问题 1. 我将一正方形的面积与边长相加得 0;45，写下系数 1。取 1 的一半。0;30 自乘得 0;15。0;15 加上 0;45 得 1。这是 1



①如图之三角形 ABC，$\angle B=90°$，$AB /\!/ DE$。题中给出的两段"长"即 $BD=l=20$，$CD=l'=30$。所给"面积"是指梯形 $ABDE$ 的面积 A＝5,20，而所求的"上宽"与"下宽"则相当于图中的 $AB(w_u)$ 与 $DE(w_l)$，于是应有 $A=\frac{1}{2}(w_u+w_l)\cdot l$，即(i)：$\frac{1}{2}(w_u+w_l)=\frac{A}{l}$。同时利用相似三角形对应边成比例可得

$\frac{w_u}{l+l'}=\frac{w_l}{l'}=\frac{w_u-w_l}{l}$ 即(ii)：

$\frac{1}{2}(w_u-w_l)=\frac{(w_u+w_l)\cdot l}{2(2l'+l)}=\frac{A}{2l'+l}$ 而

(iii)：$\frac{1}{2}(w_u+w_l)+\frac{1}{2}(w_u-w_l)=w_u$，　(iv)：$\frac{1}{2}(w_u+w_l)-\frac{1}{2}(w_u-w_l)=w_l$，

容易看出，本题的计算程序正是遵循了上述的关系式(i)、(ii)、(iii)、(iv)。

② British Museum(大英博物馆)的缩写，此处指大英博物馆收藏，后续数字为大英博物馆统一收藏号。

的平方。1 减去自乘数 0;30,得 0;30 即正方形的边长[①]。

……

问题 10. 两个正方形的面积和为 21;15,其中一个正方形的边长比另一个正方形的边长小七分之一。你写下 7 和 6。7 自乘得 49。6 自乘得 36。36 加 49 得 1;25。1;25 没有倒数[②]。于是问什么数乘以 1;25 能得 21;15? 答曰 0;15。它是 0;30 的平方。0;30 的 7 倍 3;30 为第一个正方形的边长。0;30 的 6 倍 3 为第二个正方形的边长[③]。

(李文林 译)

---

① 本题相当于用公式 $x=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+0;45}-\frac{1}{2}$ 解一元二次方程 $x^2+x-0;45=0$。像大多数早期文明一样,巴比伦人只考虑方程的正根。

② 古巴比伦人认为凡不能表成有限六十进小数的数都无意义。

③ 本题相当于求解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=21;15 \\ y=\frac{6}{7}x \end{cases}$

中　国

3.《周髀算经》及赵爽注

在中国，数学的起源也可追溯到远古。到西周时期(公元前 11 世纪～前 8 世纪)，“数”作为贵族子弟必习的“六艺”(礼，乐，射，御，书，数)之一，已形成专门的学问，有些知识后成为中国最早的两部传世数学著作——《周髀算经》与《九章算术》的部分内容。

《周髀算经》同时也是一部天文著述，作者不详，成书年代据考当不晚于公元前 2 世纪。《周髀算经》在数学方面最主要的成就有勾股定理、分数运算及测量术等。以下[3.1]、[3.2]、[3.3]摘录《周髀算经》经文中关于勾股定理的原始陈述及赵爽的有关注说，均引自南宋嘉定六年(1213)鲍澣之刻《周髀算经》卷上(见《宋刻算经六种》，文物出版社，1980)。

3.1. 商高答周公：勾股定理特例及测望术

昔者周公问于商高[①]曰：“窃闻乎大夫善数也，请问古者包牺[②]立周天历度，夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？”商高曰：“数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一[③]。故折矩，以为勾广三，股修四，径隅五[④]。……故禹之所以

① 周公(约公元前 1100 年)，姓姬名旦，为周武王之弟；商高是当时的大夫。

② 即伏羲。

③ 泛指数学计算。

④ 此即勾股定理之特例，故有人称勾股定理为“商高定理”。

治天下者，此数之所生也。”

周公曰：“大哉言数！请问用矩之道。”商高曰：“平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。环矩以为圆，合矩以为方[①]。”

3.2. 陈子答荣方：勾股定理一般形式

昔者荣方问于陈子[②]曰：“今者窃闻夫子之道，知日之高大，光之所照，一日所行，远近之数，人所望见，四极之穷，列星之宿，天地之广袤，夫子之道皆能知之，其信有之乎？”陈子曰：“然。……”“此皆算术之所及，……此亦望远起高之术，……周髀长八尺，夏至之日，晷一尺六寸。髀者，股也。正晷者，勾也。正南千里，勾一尺五寸。正北千里，勾一尺七寸。日益表南晷日益长。候勾六尺，……从髀至日下六万里而髀无影。从此以上至日，则八万里[③]。若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日，从髀所旁至日所十万里。”

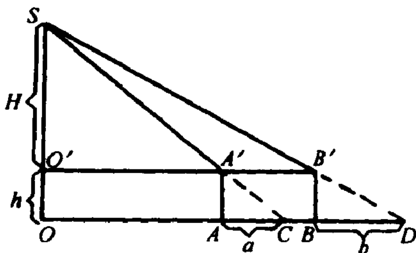
---

① 矩与规是中国古代两种作图工具。商高在这里概述了用矩测望高深广远的方法。详见钱宝琮《中国数学史》，科学出版社，1992，13页。

② 荣方、陈子，生平不详。赵爽注说“荣方、陈子是周公之后人”。近代有人考证推测他们可能生活于公元前6，7世纪（章鸿钊：《周髀算经上之勾股普遍定理：“陈子定理”》，“中国数学杂志”，1卷1期，1951。）

③ 以上是用两表测日影以求日高、日远。《周髀算经》卷上稍后的经文有“法曰周髀长八尺，勾之损益，寸千里，”就是说按“寸千里”的比例，得80寸×1000里/寸=80 000里；日远为：60寸×1000里/寸=60 000里。如图，若设在A，B两处立表（AA'与BB'），并记表高为h，表距为ρ，影差为d（$BD-AC=b-a$），则《周髀算经》相当于给出了公式：

$$日高\ SO=H+h=h+\frac{h\cdot\rho}{d}。$$



3.3. 赵爽：勾股圆方图说

《周髀算经》本文没有给出勾股定理的证明，但《周髀算经》赵爽注中的"勾股圆方图"说，却蕴含了迄今所知中国古代最早的勾股定理证明。赵爽，字君卿，生平不详，大约生活于后汉三国时期(公元3世纪前期)。"勾股圆方图"说短短五百余字，概括了整个汉代勾股算术的主要成就，以下全文录述。

勾、股各自乘，并之为弦实。开方除之，即弦[①]。按：弦图又可以勾、股自乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实。加差实亦成弦实[②]。以差实减弦实，半其余。以差为从法，开方除之，复得勾矣[③]。加差于勾，即股[④]。凡并勾、股之实即成弦实，或方于内，或矩于外。形诡而量均，体殊而数齐[⑤]。勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤。而股实方其里[⑥]。减矩勾之实于弦实，开其余即

---

① 此即勾股定理$\sqrt{a^2+b^2}=c$。

② 如图1，这相当于公式

$2ab+(b-a)^2=c^2$

利用出入相补，容易看出(如图2)

$2ab+(b-a)^2=a^2+b^2$

故有：$a^2+b^2=c^2$(参考吴文俊：《出入相补原理》，"中国古代科技成就"，中国青年出版社，1978。)

③ 此即关于勾a的开方式

$a^2+(b-a)a=\dfrac{c^2-(b-a)^2}{2}$，如图3。

④ $(b-a)+a=b$。

⑤ 这是说明勾方与股矩、股方与勾矩构成弦方的位置，如图(4)，(5)，即

$c^2=a^2+(c^2-a^2)$

$=b^2+(c^2-b^2)$

股矩$b^2=c^2-a^2$，勾矩$a^2=c^2-b^2$。

⑥ 此即$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$。

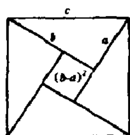


图1

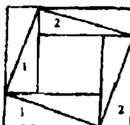


图2

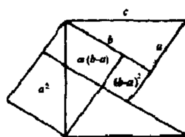


图3

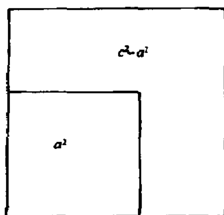


图4

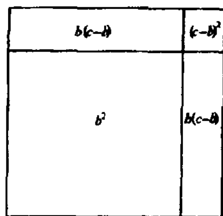


图5



股[1]。倍股在两边为从法，开矩勾之角即股弦差；加股为弦[2]。以差除勾实，得股弦并；以并除勾实，亦得股弦差[3]。令并自乘，与勾实为实。倍并为法。所得亦弦[4]。勾实减并自乘，如法为股[5]。股实之矩以勾弦差为广，勾弦并为袤，而勾实方其里[6]。减矩股之实于弦实，开其余即勾[7]。倍勾在两边为从法，开矩股之角即勾弦差；加勾为弦[8]。以差除股实，得勾弦并；以并除股实，亦得勾弦差[9]。令并自乘，与股实为实。倍并为法，所得亦弦[10]。股实减并自乘，如法为勾[11]。两差相乘，倍而开之，所得，以股弦差增之，为勾；以勾弦差增之，为股；两差增之，为弦[12]。倍弦实减勾股差实，见并实者，以图考之，倍弦实满外大方而多黄实。黄实之多，即勾股差实。以差实减

---

① 此即 $b=\sqrt{c^2-(c^2-b^2)}$

② 此即 $(c-b)^2+2b(c-b)=c^2-b^2$

$c=(c-b)+b$

③ $c+b=\frac{a^2}{c-b}, c-b=\frac{a^2}{c+b}$

④ 此即 $c=\frac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)}$

⑤ 此即 $b=\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}$

⑥ 此即 $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$

⑦ 此即 $a=\sqrt{c^2-(c^2-a^2)}$

⑧ 此即 $(c-a)^2+2a(c-a)=c^2-a^2; c=(c-a)+a$

⑨ 此即 $c+a=\frac{b^2}{c-a}$； $c-a=\frac{b^2}{c+b}$

⑩ 此即 $c=\frac{(c+a)^2+b^2}{2(c+a)}$

⑪ 此即 $a=\frac{(c+a)^2-b^2}{2(c+a)}$。以上五式与前五式对称。

⑫ 此即 $a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$

$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)$

$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)+(c-a)$

差 $\sqrt{2(c-a)(c-b)}=a+b-c$。

之，开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也①。令并自乘，倍弦实乃减之，开其余，得中黄方；黄方之面，即勾股差②。以差减并而半之，为勾；加差于并而半之，为股③。其倍弦为广袤合，令勾、股见者自乘为其实④；四实以减之，开其余所得为差；以差减合，半其余为广；减广于弦，即所求也⑤。观其迭相规矩，共为返覆，互与通分，各有所得。然则统叙群伦，弘纪众理，贯幽入微，钩深致远。故曰：其裁制万物，唯所为之也。

（郭书春 选注）

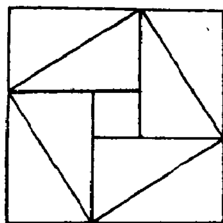


图 6

① 黄实即$(b-a)^2$，外大方即$(a+b)^2$。如图(6)，外大方$(a+b)^2$含有一个c^2及c^2去掉黄方$(b-a)^2$之和，换言之 $(a+b)^2=2c^2-(b-a)^2$

$$a+b=\sqrt{2c^2-(b-a)^2}。$$

② 同样，黄方边长 $b-a=\sqrt{2c^2-(a+b)^2}$。

③
$$a=\frac{1}{2}[(a+b)-(b-a)]$$
$$=\frac{1}{2}[(a+b)-\sqrt{2c^2-(a+b)^2}]$$
$$b=\frac{1}{2}[(a+b)+(b-a)]$$
$$=\frac{1}{2}[(a+b)+\sqrt{2c^2-(a+b)^2}]。$$

④ 若设广、袤各为x_1,x_2，则本句可理解为$x_1+x_2=2c,x_1\cdot x_2=a^2$（或$b^2$），这恰好相当于二次方程$x^2-2cx+a^2=0$根与系数的关系，其中$a,b,c$分别为一直角三角形的勾、股、弦。

⑤ 钱宝琮认为这里是已知长方形的面积(a^2)与长、阔和($2c$)求长阔的问题，相当于给出了二次方程$x^2-2cx+a^2=o$的以公式$x=\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4a^2}}{2}$表示的一个根。

4.《九章算术》及刘徽、李淳风注

《九章算术》是中国古代最重要的数学经典，对中国古代数学的发展有深远影响。其确切作者与写作年代均不详考。刘徽《九章算术注序》称《九章》是由周代"九数"发展而来，并经西汉张苍(公元前？～前152)、耿寿昌等人删补。近年发现的湖北张家山汉初古墓竹简《算数书》(1984年出土)，有些内容与《九章算术》类似。可以认为，《九章算术》是从先秦开始在长时期里经众多学者编纂、修改，约于西汉中叶(公元前1世纪)最后成书。

《九章算术》采用术文统率例题的形式，全书共收246个数学问题，分成九章(①方田，②粟米，③衰分，④少广，⑤商功，⑥均输，⑦盈不足，⑧方程，⑨勾股)。《九章算术》所包含的数学成就是丰富的和多方面的，最著名的如分数运算法则、双设法("盈不足"术)、开方法、线性方程组消元解法("方程术")及负数的引进("正负术")等，都具有世界意义，以下分别在[4.1]、[4.2]、[4.3]、[4.4]中予以录述，所有引文(包括后面的[4.5]、[4.6]及[4.7])均摘自郭书春汇校：《九章算术》，辽宁教育出版社，1990。

4.1. 分数四则运算[①]

约分术曰：可半者半之。不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也[②]。以等数约之。等数约之，即除也。其所

① 摘自《九章算术》方田章。宋体字为《九章算术》经文，楷体字为刘徽注，下同。

② 等，等数之简称，即今之最大公约数。求等数的更相减损法，与欧几里得辗转相除法相当。

以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之[①]。

合分术曰[②]：母互乘子，并，以为实。母相乘为法。母互乘子，约而言之者，其分粗；繁而言之者，其分细。虽则粗细有殊，然其实一也。众分错杂，非细不会。乘而散之，所以通之。通之则可并也。凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同，共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也[③]。……乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎？其一术者，可令母除为率，率乘子为齐。实如法而一[④]。不满法者，以法命之。其母同者，直相从之。

减分术曰：母互乘子，以少减多，余为实。母相乘为法。实如法而一[⑤]。

经分术曰[⑥]：以人数为法，钱数为实，实如法而一。有分者通之[⑦]；母互乘子知，齐其子。母相乘者，同其母。以母通之者，分母乘全内子[⑧]。乘，散全则为积分，积分则与分子相通之，故可令相从。凡数相与者谓之率[⑨]率知，自相与通。有分则可散，分重叠则约也；

---

① 设要约简的分数为 $\frac{b}{a}$，$b<a$。从 a 中减 b，减 $q_1(q_1\geqslant)$ 后得余数 $r_1<b$，$r_1=a-bq_1$。再从 b 中减 r_1，减 $q_2(q_2\geqslant 1)$ 后得余数 $r_2<r_1$，$r_2=b-r_1q_2$。再从 r_1 中减 r_2，如此更相减损，直到出现 $r_n=r_{n-1}$，便是等数。将上述过程逆推，会得出 $b=r_np$，$a=r_nQ$，p、Q 分别是关于 $q_1,q_2\cdots\cdots q_n$ 的多项式，都是整数，所以说分母、分子都是等数的重叠。

② 合分术就是分数加法。

③ 刘徽在此阐述了齐同原理。这一原理在刘徽之前已在使用，源于分数通分。

④ “实”本指被除数，后被开方数、线性方程组的常数项，都称作“实”。“法”的本意是标准，指除数。“实如法而一”是说以法分实，“实如法而一”成为除法的术语。合分术是 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$。

⑤ 减分即分数减法：$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$。

⑥ 经分即分数除法。经，分割。

⑦ 被除数与除数中有一个是分数，先通分，再将分子相除。$\frac{b}{a}\div d=\frac{b}{a}\div\frac{ad}{a}=\frac{b}{ad}$；$b\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{c}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{d}$。

⑧ “内”，通“纳”，“内子”即纳入分子。这是化带分数为假分数。

⑨ 这是刘徽提出的率的定义。

等除法实，相与率也[①]。故散分者，必令两分母相乘法实也。重有分者同而通之[②]。又以法分母乘实，实分母乘法[③]。此谓法、实俱有分，故令分母各乘全分内子，又令分母互乘上下。

乘分术[④] 曰：母相乘为法，子相乘为实，实如法而一。

4.2. 盈不足术[⑤]

盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并，以为实。并盈、不足为法。实如法而一[⑥]。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法实。实为物价，法为人数[⑦]。

其一术曰：并盈、不足为实。以所出率，以少减多，余为法。实如法得一人。以所出率乘之，减盈、增不足，即物价[⑧]。

---

① 相与率是没有等数的率关系。中国古代没有互素概念，相与率在一定程度上起到了互素的作用。另外，刘徽以率关系理解分数的分子、分母，与现代分数的定义相近。

② 这是说分母、分子都有分数的除法：$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\div\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ad}$。

③ 这是刘徽提出的颠倒相乘法$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}$。

④ 乘分术是分数乘法：$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$。

⑤ 摘自《九章算术》卷七盈不足章。“盈不足术”即两次假设法，中世纪传入阿拉伯国家，后又通过阿拉伯国家传入欧洲。意大利数学家斐波那契(Fibonacci)所著《算盘书》(Liber Abaci)第 13 章专述盈不足问题。

⑥ “维乘”，即交叉相乘，假设 A，盈 a，假设 B，不足 b，则不盈不朒之正数$=\frac{Ab+Ba}{a+b}$，这是为通过两次假设解决一般算术问题而提出的方法。

⑦ 对共买物的情形，物价$=\frac{Ab+Ba}{|A-B|}$，人数$=\frac{a+b}{|A-B|}$。

⑧ 这是另一种方法，人数公式同上。物价$=$人数$\times A-a=$人数$\times B+b$。
除了正规的盈不足问题，“盈不足”章还处理了两盈、两不足、盈适足及不足适足等情形，并分别给出了适当的公式。

4.3 开方术[①]

开方术曰：置积为实。借一算，步之，超一等[②]。议所得，以一乘所借一算为法，而以除[③]。除已，倍法为定法。其复除，折法而下。复置借算，步之如初[④]。以复议一乘之，所得，副以加定法，以除[⑤]。以所得副从定法。复除，折下如前[⑥]。若开之不尽者，为不可开，当以面命之[⑦]。若实有分者，通分内子为定实，乃开之。讫，开其母，报除[⑧]。若母不可开者，又以母乘定实，乃开之。讫，令如母而一[⑨]。

4.4. 方程术与正负术[⑩]

今有上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉、中禾三秉、下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉、中禾二秉、下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

---

① 摘自《九章算术》少广章。现今求一元二次及高次方程正根的方法，中国古代都称作开方，一般称作开某乘方。这里开方术是开平方法。《九章算术》还提出了开立方术。

② 开平方作4行布算。第二行布置实即被开方数，第四行的个位上借一枚算筹表示未知数的平方。此表示 $x^2=A$，其中 A 为被开方数。将借算自右向左隔一位移一步，到不能移为止。

③ 议得根的第一位得数，布置在第一行；将此议得的数乘借一算，布置在第三行，作为法，使此法除实，其商的整数部分恰好为议得的数。

④ 将法加倍，作为定法，退一位。再在第四行布置借算，仍隔一位向左移一步，至不能移为止。这就得到减根方程：$10^{n-3}x_2{}^2+2\times10^{n-2}x_1x_2=A-x_1^2$，$x_1$ 为根的第一位得数。

⑤ 议得根的第二位得数，将它乘借算，加入定法。以定法除余实，其商的整数部分恰好为第二位得数。

⑥ 如需继续开方，可重复上述程序。

⑦ "不可开"有无理数概念的萌芽。"面"指 $\sqrt{A}$。

⑧ 若 $A=\frac{b}{a}$，则 $\sqrt{A}=\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$。

⑨ 若分母 a 不是完全平方数，则 $\sqrt{A}=\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$。

⑩ 摘自《九章算术》方程章。方程即今之线性方程组。

方程术[1]曰：置上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉，实三十九斗于右方。中、左禾列如右方[2]。以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除[3]。然以中行中禾不尽者遍乘左行，而以直除。左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实[4]。求中禾，以法乘中行下实。而除下禾之实。余，如中禾秉数而一，即中禾之实[5]。求上禾，亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实。余，如上禾秉数而一，即上禾之实[6]。实皆如法，各得一斗[7]。

正负术曰[8]：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之[9]。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之[10]。

---

① "方"，训"并"；"程"，标准；"方程"，就是"并而程之"。所以刘徽界定"方程"说："程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。"

② 列出方程

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

相当于方程组 $\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$

③ 直除，即两行对减。这是以右行 x 的系数乘中、左行整行，分别以左行对减，以消去中、左行 x 的系数。

④ 再以中、左两行应用直除法，消去左行 y 的系数，左行只剩 z 的系数及实，便可求出 z 的值。z 的系数称为法。

⑤ 这是求 y 的方法：以法乘中行的实，减去左行的实，除以中行 y 的系数，所得就是中禾的实，仍以左行的法为法。这相当于现代的代入法。

⑥ 用同样的方法将 y,z 的值代入右行，右行下实为上禾的实，仍以左行的法为法。

⑦ 各行的实皆除以法，便得到 x,y,z 的值。

⑧ 这是正负数加减法则。刘徽说："今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑，否则以邪正为异。"前一句被认为是正负数的定义，后一句说明了正负数的表示方式。在《九章算术》中，此法则只用于方程术，并且实际上使用了正负数乘除法，到宋元时代又用于开方术。

⑨ 同名、异名即同号、异号。这是减法法则：若 $a>b>0$，则 $(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)$，$(\pm b)-(\pm a)=\mp(a-b)$；$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b)$；$0-a=-a$，$0-(-a)=a$。

⑩ 这是加法法则：若 $a>b>0$，则 $(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b)$，$(\pm b)+(\mp a)=\mp(a-b)$；$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b)$；$0+a=a$，$0+(-a)=-a$。

4.5. 割圆术[①]

现存的《九章算术》是经过刘徽、李淳风等人注释的版本,其中刘徽注在数学史上地位尤著。刘徽(公元3世纪),三国魏、晋人,他于公元263年所作《九章算术注》,不仅全面诠释了《九章算术》载述的方法与算法,而且本身就包含了许多创造性贡献,并显示出中国古代数学的理论高度。除了前面已引述的刘徽注文外,以下我们着重选录刘徽《九章算术注》中最脍炙人口的段落,即:[4.5]“割圆术”(用多边形逼近法求圆面积与圆周率);[4.6],“阳马术”注(多面体体积计算),二者都体现了刘徽的极限思想。

[圆田]术曰:半周半径相乘得积步[②]。按:半周为从,半径为广,故广从相乘为积步也。假令圆径二尺,圆中容六觚之一面,与圆径之半,其数均等,合径率一而弧周率三也[③]。

又按:为图,以六觚之一面乘一弧半径,三之,得十二觚之幂。若又割之,次以十二觚之一面乘一弧之半径,六之,则得二十四觚之幂。割之弥细,所失弥少。割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣[④]。觚面之外,犹有余径,以面乘余径,则幂出弧表。若夫觚之细者,与圆合体,则表无余径。表无余径,则幂不外出

① 摘自《九章算术》方田章刘徽注。

② 设圆周长为L,半径为r,则圆面积$S=\frac{1}{2}Lr$。这个公式是正确的。

③ 此段是刘徽记述前人论证圆面积公式的方式:取圆内接正6边形的周长作为圆周长的近似值,取圆内接正12边形的面积作为圆面积的近似值。这实际上是以周三径一为圆周率。

④ 刘徽从圆内接正6边形开始割圆,设正$6\cdot 2^n(n=0,1,2,\cdots)$边形周长$L_n$,面积$S_n$,这表示了二个极限过程$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=L$,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$。

矣[1]。以一面乘半径,觚而裁之,每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂[2]。此以周、径,谓至然之数,非周三径一之率也[3]。谨按图验,要造密率。恐空设法,数昧而难譬,故置诸检括,谨详其记注焉[4]。

割六觚以为十二觚术曰:置圆径二尺,半之为一尺,即圆里觚之面也。令半径一尺为弦,半面五寸为勾,为之求股,以勾幂二十五寸减弦幂,余七十五寸,开方除之,下至秒、忽。又一退法,求其微数。微数无名知,以为分子,以十为分母,约作五分忽之二,故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二。以减半径,余一寸三分三厘九毫七秒四忽五分忽之三,谓之小勾。觚之半面而又谓之小股,为之求弦。其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽,余分弃之。开方除之,即十二觚之一面也。割十二觚以为二十四觚术曰:亦令半径为弦,半面为勾,为之求股。置上小弦幂,四而一,得六百六十九亿八千七百二十九万八千三百六十一忽,余分弃之,即勾幂也。以减弦幂,其余开方除之,得股九寸六分五厘九毫二秒五忽五分忽之四。以减半径,余三分四厘七秒四忽五分忽之一,谓之小勾。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂六百八十一亿四千八百三十四万九千四百六十六忽,余分弃之。开方除之,即二十四觚之一面也。割二十四觚以为四十八觚术曰……。割四十八觚以为九十六觚术曰……,得幂三百一十四寸六百二十五分寸

① 这是另一个极限过程$\lim\limits_{n\to\infty}[S_n+2(S_{n+1}-S_n)]=S$。总之,说明了圆面积$S$的下界序列$\{S_n\}$与上界序列$\{S_n+2(S_{n+1}-S_n)\}$的极限都是$S$。

② 将与圆合体的正多边形分割成无穷多个以每边(记为l)为底,以圆心为顶点的小三角形,其面积为$A=\frac{1}{2}lr$,圆面积$S=\sum\limits^{\infty}A=\sum\limits^{\infty}\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}Lr$。

③ 刘徽指出,在圆面积公式中,圆周与直径之比应是"至然之数",而不是周三径一之率。接着,刘徽批评了学者踵古,沿习周三径一的错误。

④ 检括,法度。刘徽提出的求"至然之数"的方法。

之六十四，即一百九十二觚之幂也①。以九十六觚之幂减之，余六百二十五分寸之一百五，谓之差幂。倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外弧田九十六所，谓以弦乘矢之凡幂也②。加此幂于九十六觚之幂，得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九，则出于圆之表矣③。故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸以为圆幂之定率，而弃其余分④。以半径一尺除圆幂，倍所得，六尺二寸八分，即周数⑤。令径自乘为方幂四百寸，与圆幂相折，圆幂得一百五十七为率，方幂得二百为率。方幂二百，其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少。按：弧田图令方中容圆，圆中容方，内方合外方之

---

① 以上引文略去求四十八觚面及九十六觚面的计算过程。下表是刘徽求正 $6\cdot 2^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 边形的边长、面积的程序：

正 $6\cdot 2^n$ 边形 n	边心距 $\sqrt{r^2-(\frac{1}{2}l_n)^2}$	余径 $r_n=r-\sqrt{r^2-(\frac{1}{2}l_n)^2}$	边长 $l_n=\sqrt{(\frac{1}{2}l_{n-1})^2+r_n^2}$	面积 $S_n=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2^{n-1}l_{n-1}r$
0	$866\,025\frac{2}{5}$	$133\,974\frac{3}{5}$	1 000 000	
1	$965\,925\frac{4}{5}$	$34\,074\frac{1}{5}$	$\sqrt{267\,949\,193\,445}$	
2	$991\,444\frac{4}{5}$	$8\,555\frac{1}{5}$	$\sqrt{68\,148\,349\,466}$	
3	$997\,858\frac{9}{10}$	$2\,141\frac{1}{10}$	130 806	
4			65 438	$313\frac{584}{625}$
5				$314\frac{64}{625}$

② 此即 $2(S_5-S_4)=\frac{210}{625}$ 寸^2

③ $S_4+2(S_5-S_4)=314\frac{169}{625}$ 寸$^2>S$。

④ 确定圆面积近似值 $S=314$ 寸^2。

⑤ 由圆面积公式 $S=\frac{1}{2}Lr$，将圆面积近似值 314 寸^2 及半径 1 尺代入，求出 $L=\frac{2S}{r}=6$ 尺 2 寸 8 分。

半。然则圆幂一百五十七，其中容方幂一百也[①]。又令径二尺与周六尺二寸八分相约，周得一百五十七，径得五十，则其相与之率也。周率犹为微少也[②]。

而觚差幂六百二十五分寸之一百五。以一百九十二觚之幂以率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂，以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四[③]。

置径自乘之方幂四百寸，令与圆幂通相约，圆幂三千九百二十七，方幂得五千，是为率。方幂五千中容圆幂三千九百二十七；圆幂三千九百二十七中容方幂二千五百也[④]。以半径一尺除圆幂三百一十四寸二十五分寸之四，倍所得，六尺二寸八分二十五分分之八，即周数也[⑤]。全径二尺与周数通相约，径得一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相与之率。若比昔，盖尽其纤微矣。举而用之，上法为约耳。当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳。

---

① 考虑圆的外切正方形，其面积 $S_{外方}$，又考虑圆的内接正方形，其面积 $S_{内方}$，则 $S_{外方}:S:S_{内方}=200:157:100$。

② 以周长 $L=6$ 尺 2 寸 8 分与直径 $d=2$ 尺相约，求出 $L:d=157:50$，相当于 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$。

③ 刘徽又求得圆面积近似值 $S=314\frac{4}{25}$ 寸^2。此近似值是以 192 边形面积 $S_5=314\frac{64}{625}$ 寸^2 为基础，增加 $\frac{36}{625}$ 寸^2 求得的。如何求得此增值，学术界有不同看法。

④ 由此求得 $S_{外方}:S:S_{内方}=5\,000:3\,927:2\,500$。

⑤ 将圆面积近似值 $S=314\frac{4}{25}$ 寸^2 及半径 $r=1$ 尺代入 $S=\frac{1}{2}Lr$，求出 $L=\frac{2S}{r}=6$ 尺 2 寸 $8\frac{8}{25}$ 分。

4.6. 阳马术及刘徽注①

[阳马]术曰：广袤相乘，以高乘之，三而一②。按：此术阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马。假令广、袤各一尺，高一尺，相乘之，得立方积一尺。邪解立方得两堑堵，邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也③。合两鳖臑成一阳马，合三阳马而成一立方，故三而一，验之以棊，其形露矣。悉割阳马，凡为六鳖臑，观其割分，则体势互通，盖易了也④。其棊或修短，或广狭，立方不等者，亦割分以为六鳖臑，其形不悉相似。然见数同，积实均也⑤。鳖臑殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合，不纯合，则难为之矣⑥。何则？按：邪解方棊以为堑堵者，必当以半为分；邪解堑堵以为阳马者，亦必当以半为分，一从一横耳⑦。

设为阳马为分内，鳖臑为分外。棊虽或随修短广狭，犹有此分常率知，殊形异体，亦同也者，以此而已⑧。其使鳖臑广、袤、高各二尺，用堑堵、鳖臑之棊各二，皆用赤棊⑨。又使阳马之广、袤、高各二

---

① 摘自《九章算术》商功章。

② 阳马是直角四棱锥，如图1。体积公式 $V_y=\frac{1}{3}abh$，其中 a，b 是底之广、袤，h 是高。《九章算术》还提出了鳖臑体积公式 $V_b=\frac{1}{6}abh$，鳖臑是四面皆为勾股形的四面体，如图2。一个阳马与一个鳖臑可以拼成一个堑堵，如图3。

③ 这是说，在堑堵中恒有 $V_y:V_b=2:1$. 今称刘徽原理，这是刘徽体积理论的核心。

④ 在 $a=b=h$ 的条件下，3个全等的阳马合成一个正方体，6个全等的鳖臑也合成一个正方体。阳马、鳖臑体积公式显然成立。这是棊验法。

⑤ 这是说当 $a\neq b\neq h$ 时，阳马、臑体积公式仍然成立。

⑥ 这是说，在 $a\neq b\neq h$ 的条件下，由于阳马不全等，鳖臑不对称也不全等，无法应用棊验法。

⑦ 以阳马为例，当 $a\neq b\neq h$ 时，一个长方体分出的三个阳马，如果一个是纵的，另一个就是横的，不全等，因此不能应用棊验法。

⑧ 下面开始证明在 $a\neq b\neq h$ 的情况下，刘徽原理仍然成立。

⑨ 刘徽仍然使用长、宽、高各1尺的棊，但下文注明这个过程“虽方随棊改而固有常然之势”，因此我们将图画成一般情形。如图(2)，这实际上是用三个平面平分红鳖臑的长、宽、高，将鳖臑分成2个堑堵Ⅰ′、Ⅱ′，2个鳖臑Ⅳ′、Ⅴ′。

尺，用立方之棋一，堑堵、阳马之棋各二，皆用黑棋[①]。棋之赤、黑，接为堑堵，广、袤、高各二尺。于是中分文其广、袤，又中分其高[②]。令赤、黑堑堵各自适当一方，高一尺、方一尺，每二分鳖臑则一阳马也。其余两端各积本体，合成一方焉，是为别种而方者率居三，通其体而方者率居一。虽方随棋改，而固有常然之势也[③]。

按：余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣。其于理也岂虚矣。[④] 若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其余弥细，至细曰微，微则无形，由是言之，安取余哉？[⑤] 数而求穷之者，谓以情推，不用筹算。

鳖臑之物，不同器用；阳马之形，或随修短广狭，然不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也。

---

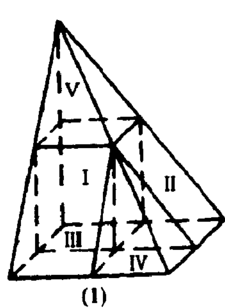
① 如图(1)，这实际上是用三个平面平分黑阳马的长、宽、高，将阳马分成了1个立方体I，2个堑堵II、III，2个阳马IV、V。

② 如图(3)，将红鳖臑与黑阳马拼合成一个堑堵。相当于用三个互相垂直的平面平分堑堵的长、宽、高。

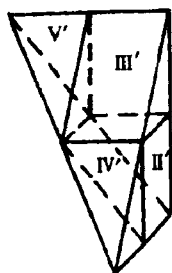
③ 将红堑堵II′与黑堑堵II、III′与III分别拼成1个立方体，与立方I共3个立方，在这三个立方中，属阳马与属鳖臑的体积之比为2:1（如图(4)）。将红鳖臑IV′与黑阳马IV、V′与V分别拼成一个堑堵，这2个堑堵又拼成1个立方，它们都与原堑堵相似（如图(5)），但其中阳马与鳖臑体积之比仍未知。

④ 如果能证明其剩余部分中可知其体积者属于鳖臑的与属于阳马的体积之比是1:2，则在整个堑堵中$V_y:V_b=2:1$便确定了。

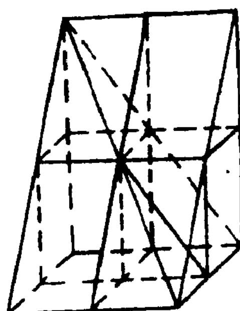
⑤ 对上述第4个小立方中的两个堑堵，由于它们的结构与原堑堵完全相似，可以进行同样的分割，证明在其中$\frac{3}{4}$中即原堑堵的$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$中有$V_y:V_b=2:1$，在$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$中仍未知。这个过程可以无限继续下去，$V_y:V_b=2:1$是否成立为未知的部分依次占原堑堵的$\frac{1}{4^n}$，$n=1,2,3,\cdots$。显然$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0$。

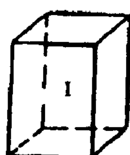


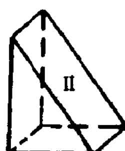
(1)

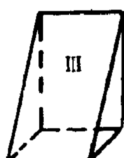


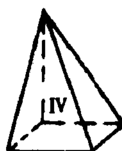
(2)

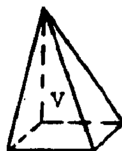

(3)

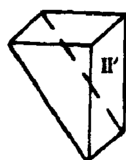


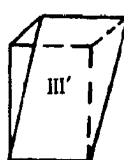










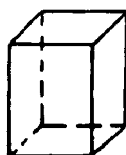




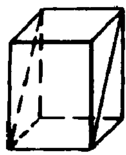




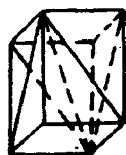








(4)



(5)

4.7. 球体积公式与祖暅原理[1]

《九章算术》"少广"章"开立圆术",给出球体积公式 $V=\frac{3}{16}\pi D^3(\pi=3)$,刘徽指出这一公式是不正确的。他创造了一种特殊的立体图形——"牟合方盖"(见[4.7]前半部分刘徽注),试图用以获得正确的计算公式但未成功。这一重要的问题被稍晚的祖冲之(429～500)和他的儿子祖暅解决,他们在推导球体积公式的过程中,提出了一般的"不可分量原理",即"祖暅原理",西方文献中则称"卡瓦列里原理"。祖氏父子的这项成就,被记录在《九章算术》"少广"章李淳风注中而得以留传至今(见[4.7]后半部分李淳风注)。李淳风(602～670),唐代数学家、天文学家,曾领导汇编、注释中国古代十部数学著作(合称《十部算经》,656 年完成)。

开立圆术曰:置积尺数,以十六乘之,九而一。所得,开立方除之,即立圆径[2]。立圆,即丸也。为术者盖依周三径一之率。令圆幂居方幂四分之三,圆囷居立方亦四分之三。更令圆囷为方率十二,为丸率九,丸居圆囷又四分之三也。置四分自乘得十六,三分自乘得九,故丸居立方十六分之九也。故以十六乘积,九而一,得立方之积。丸径与立方等,故开立方而除,得径也[3]。然此意非也。何以验之?取立方棋八枚,皆令立方一寸,积之为立方二寸。规之为圆囷,径二寸,高二寸,又复横因之,则其形有似牟合方盖矣。八棋皆似阳

① 摘自《九章算术》少广章,其中对刘徽注作了删节。

② 此即球径 $D=\sqrt[3]{\frac{16V}{9}}$,亦即球体积 $V=\frac{9}{16}D^3$。

③ 此为刘徽记载的前人推导球体积公式的方式:作以球径 D 为边长的正方体,及内切圆柱体,即圆囷。《九章算术》的作者认为 $V_{正方体}:V_{圆柱体}=4:\pi$,$V_{圆柱体}:V_{球}=4:\pi$,故 $V_{球}=\frac{\pi\times\pi}{4\times4}V_{正方体}=\frac{9}{16}D^3$,(取 $\pi=3$)。

马，圆然也。按：合盖者，方率也；丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉[①]？

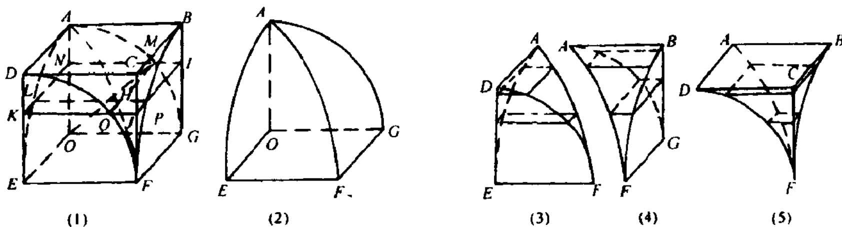
祖暅之开立圆术曰：以二乘积，开立方除之，即立圆径[②]。其意何也？取立方棋一枚，令立枢于左后之下隅，从规去其右上之廉；又合而横规之，去其前上之廉。于是立方之棋分而为四。规内棋一，谓之内棋，规外棋三，谓之外棋[③]。规更合四棋，复横断之，以勾股言之，令余高为勾，内棋断上方为股，本方之数，其弦也。勾股之法：以勾幂减弦幂，则余为股幂。若令余高自乘，减本方之幂，余即内棋断上方之幂也。本方之幂即此四棋之断上幂。然则余高自乘，即外三棋之断上幂矣。不问高卑，势皆然也[④]。然固有所归同而涂殊者尔。而乃控远以演类，借况以析微。按：阳马方高数参等者，倒而立

① 刘徽指出，《九章算术》所提出的开立圆术是错误的。为此，他取以球直径为边长的正方体的二个内切圆柱体，将其正交，其公共部分称作牟合方盖。他认为 $V_{合盖}:V_{球}=4:\pi$，因此说 $V_{圆柱}:V_{球}=4:\pi$ 是错误的，这说明刘徽对截面积原理已有深刻认识，虽然他没能求出牟合方盖的体积。

② 祖暅之即祖暅，他的球体积公式为 $D=\sqrt[3]{2V}$。本段取自李淳风注释。

③ 祖暅为了求牟合方盖的体积，考虑其 $\frac{1}{8}$，即第一象限中的部分 $ABCDEFGO$，如图(1)。从正方体割出牟合方盖的过程将这 $\frac{1}{8}$ 分成四块棋：内棋 $AEFGO$，即牟合方盖的 $\frac{1}{8}$，如图(2)；3 个外棋：$ADEF$、$ABGF$、$ABCDF$，如图(3)，(4)，(5)。

④ 用一平面在内棋的高 OA 上任一点 N 处（设 $ON=a$，称为余高）横截 $ABCDEFGO$，则横截面 $IJKN$ 的面积为球半径之平方 r^2，设内棋的截面正方形 $NMHL$ 的面积是 b^2，那么外三棋的截面长方形 $LHQK$、$MIPH$ 和正方形 $HPJQ$ 的面积之和应为 r^2-b^2。而由勾股形 ONM，$r^2-b^2=a^2$，即余高自乘。



之，横截去上，则高自乘与断上幂数亦等焉①。夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异②。由此观之，规之外三棋旁蹙为一，即一阳马也，三分立方，则阳马居一，内棋居二可知矣③。合八小方成一大方，合八内棋成一合盖。内棋居小方三分之二，则合盖居立方亦三分之二，较然验矣④。置三分之二，以圆幂率三乘之，如方幂率四而一，约而定之，以为丸率，故曰丸居立方二分之一也⑤。

（郭书春 选注）

① 一个倒立的长、宽、高均为球半径 r 的阳马距顶点距离为 a 处的截面积亦为 a^2。

② 这就是祖暅原理，17 世纪的卡瓦列里原理与之等价。

③ 由祖暅原理，外三棋的体积与此阳马相等，因而内棋的体积是小立方的 $\frac{2}{3}$，即 $\frac{2}{3}r^3$。

④ 取 8 个小立方合成一个边长为 D 的大立方体，牟合方盖是其体积的 $\frac{2}{3}$，即 $\frac{2}{3}D^3$。

⑤ 由 $V_{合盖}:V_{球}=4:\pi$，如取 $\pi=3$，则 $V_{球}=\frac{3}{4}V_{合盖}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}D^3=\frac{1}{2}D^3$。

5.《孙子算经》

中国是世界上最早采用十进位值制记数的国家，春秋战国之际已普遍应用的筹算，即严格遵循了十进位值制。关于算筹记数法，现在仅见的资料载于《孙子算经》。《孙子算经》三卷，作者名不详，成书年代约为公元4世纪，该书上卷是关于筹算法则的系统介绍，下卷则有著名的“物不知数”题，亦称“孙子问题”，后发展为更一般的“大衍求一术”。以下分别摘录《孙子算经》所载算筹记数法和物不知数题。引自南宋鲍澣之刻本《孙子算经》(1213)，见《宋刻算经六种》，文物出版社，1980。

5.1. 算筹记数法

凡算[①]之法，先识其位。一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当[②]。

5.2. 孙子问题

今有物不知其数，三三数之賸二，五五数之賸三，七七数之賸

① 算，即算筹，宋元以前的主要计算工具。《老子》说：“善数不用筹策。”说明春秋时已通行。《汉书·律历志》说：“其算法用竹，径一分(0.23厘米)，长六寸(13.8厘米)。”亦有骨、石、玉筹为之者。后来算筹的长度不断由长变短，截面由圆变方。

② 《夏侯阳算经》又补充“满六以上，五在上方。六不积算，五不单张。”这样，算筹数字分纵横两式：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	丨	〢	〣	〤	〥	〦	〧	〨	〩
横式	一	二	三	亖	𝍤	⊥	⊥̲	⊥̳	⊥̳̲

记数时个、百、万……位用纵式，十、千、十万……位用横式，这样纵横相间，并用空位表示0。可以表示任何一个自然数，也可以表示分数、小数。

二，问物几何？

答曰：二十三[①]。

术曰：三三数之賸二置一百四十，五五数之賸三置六十三，七七数之賸二置三十，并之得二百三十三，以二百十减之，即得[②]。凡三三数之賸一，则置七十，五五数之賸一，则置二十一，七七数之賸一，则置十五，一百六以上，以一百五减之，即得[③]。

（郭书春 选注）

---

① 以上相当于求解一次同余组 $N\equiv2(\mathrm{mod}3)\equiv3(\mathrm{mod}5)\equiv2(\mathrm{mod}7)$，并给出最小正整数解的答案 23。

② 这是给出解算过程：$N=140+63+30-105\times2=23$。

③ 这相当于对任意余数 R_1,R_2,R_3 给出了一次同余组 $N\equiv R_1(\mathrm{mod}3)\equiv R_2(\mathrm{mod}5)\equiv R_3(\mathrm{mod}7)$ 的最小正数解公式

$$N=70\times R_1+21\times R_2+15\times R_3-105\times p,$$

其中 p 为整数。

6.《张丘建算经》——百鸡术

《张丘建算经》三卷，据钱宝琮考，约成书于公元466～485年间。张丘建，北魏时清河（今山东临清一带）人，生平不详。最小公倍数的应用、等差数列各元素互求以及“百鸡术”等是其主要成就。“百鸡术”是世界著名的不定方程问题。13世纪意大利斐波那契《算经》、15世纪阿拉伯阿尔·卡西《算术之钥》等著作中均出现有相同的问题。以下摘录《张丘建算经》“百鸡术”部分（卷下最后一题），引自南宋鲍澣之刻本《张丘建算经》(1213)，见《宋刻算经六种》，文物出版社，1980。

今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一。凡百钱买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？

答曰：

鸡翁四，直钱二十；

鸡母十八，直钱五十四；

鸡雏七十八，直钱二十六。

又答：

鸡翁八，直钱四十；

鸡母十一，直钱三十三；

鸡雏八十一，直钱二十七，

又答：

鸡翁十二，直钱六十；

鸡母四，直钱十二；

鸡雏八十四，直钱二十八。[1]

术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三。即得[2]。

（郭书春 选注）

---

① 此题相当于解不定方程 $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$

并给出 $\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}$ $\begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases}$ $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$

三组解，它们是所有可能的正整数解。

② 这个方法是正确的。相当于给出整数解 $x=4t, y=25-7t, z=75+3t$ 中参数 t 的三个系数，但叙述过于简括，没有提示方法的由来。后来甄鸾（6 世纪）、谢察微、杨辉均未得要领。19 世纪宋元数学复兴，骆腾凤、丁取忠等才用大衍求一术或方程术重新解出百鸡问题。

7. 贾宪:《黄帝九章算经细草》

中国古典数学在宋元时期达到了高峰,这一发展的序幕是"贾宪三角"(二项展开系数表)的发现及与之密切相关的高次开方法("增乘开方法")的创立。贾宪 ,北宋人,约于1050年左右完成《黄帝九章算经细草》,原书佚失,但其主要内容被杨辉(约13世纪中)著作所抄录,因能传世。杨辉《详解九章算法》(1261)载有"开方作法本源"图,注明"贾宪用此术"。这就是著名的"贾宪三角",或称"杨辉三角"。《详解九章算法》同时录有贾宪进行高次幂开方的"增乘开方法",以下二段采自《永乐大典》卷16344《详解九章算法》(中华书局影印本,1960)。

贾宪三角在西方文献中称"帕斯卡三角",1654年为法国数学家B. 帕斯卡重新发现。

7.1. 开方作法本源[①](贾宪三角)

增乘方求廉法草曰[②]释锁求廉本源:列所开方数,如前,五乘方,列五位。隅算在外。以隅算一自下增入前位,至首位而止。首位得六,第二位得五,第三位得四,第四位得三,下一位得二。复以隅算如前升增,递低一位求之。(如图50页)

求第二位

六旧数　五加十而止　四加六为十　三加三为六　二加一为三

求第三位

六　十五并旧数　十加十而止　六加四为十　三加一为四

---

① 贾宪三角的本名。杨辉注云"出释锁算书,贾宪用此术",释锁在宋元时指开方,喻开方像开锁。

② 此是求贾宪三角各廉的增乘方法,大字为法,小字为草,廉指高次方程二次以上项的系数,源于刘徽对开立方术的几何解释。增乘即随乘随加。

	求第四位			
六	十五	二十并旧数	十加五而止	四加一为五
	求第五位			
六	十五	二十	十五并旧	五加一为六
上廉	二廉	三廉	四廉	下廉[1]

左 右

积 隅

一

一 一

一 二 一

一 三 三 一

一 四 六 四 一

一 五 十 十 五 一

一 六 十五 二十 十五 六 一

左袤乃积数

右袤乃隅算

中藏者乃廉

以廉乘商方

命实而除之

---

① 这就是求贾宪三角第七行开六次方所用各廉的增乘法，相当于如下程序(每行都是自下而上递加)。

列所开方数	求第一位	求第二位	求第三位	求第四位	求第五位	
1	1+5=6	6	6	6	6	上廉
1	1+4=5	5+10=15	15	15	15	二廉
1	1+3=4	4+6=10	10+10=20	20	20	三廉
1	1+2=3	3+3=6	6+4=10	10+5=15	15	四廉
1	1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	下廉

7.2. 增乘开方法[①]

递增三乘开方法草曰[②]：置积为实。别置一算名曰下法[③]。于实末常超三位约实。一乘超一位，二乘超二位。万下定实。[③]上商得数三十；乘下法，生下廉三十；乘下廉，生上廉九百；乘上廉，生立方二万七千。命上商，除实余五十二万六千三百三十六[④]。作法：商第二位得数。以上商乘下法，入下廉共六十；乘下廉，入上廉共二千七百；乘上廉入方共一十万八千。[⑤]又乘下法入下廉。共九十，乘下廉入上廉共五千四百。又乘下法入下廉共一百二十[⑥]。方一、上廉二、下廉三、下法四退方一十万八千，上廉五千四百，下廉一百二十，下法定一[⑦]。又于上商之次续商置得数第二位：四。以乘下法入廉一百二十四，乘下廉入上廉共五千八百九十六，乘上廉并为立方一十三万一千五百八十四。命上商，除实，尽，得三乘方一面之数如三位立方，依第二位取用[⑧]

（郭书春 选注）

---

① 增乘开方法又称递增开方法。贾宪给《九章算术》作细草给出了开二、三、四次方的程序。

② 此以$\sqrt[4]{1\ 336\ 336}$为例阐明增乘开方法，为法草合一，大字为法，小字为草。

③ 此为布位定位，如图(1)所示。

④ 此为商第一位，如图(2)所示。

⑤ 为求商的第二位得数而作法，先自下而上以商的第一位得数随乘随加，得立方，如图(3)所示。

⑥ 再自下而上以商的第一位得数随乘随加，得上廉、下廉如图(4)。

⑦ 将立方退一步，上廉退二步，下廉退三步，下法退四步，这就是减根方程 $x_1^4+12x_1^3+54x_1^2+108x_1=526336$，如图(5)。

⑧ 于个位商第二位得数，自下而上随乘随加，到立方，再乘立方，与实相消，适尽，如图(6)。

图1

图2

图3

图4

图5

图6

8. 秦九韶:《数书九章》

秦九韶(约1202～1261),字道古,四川安岳人,先后在湖北、安徽、江苏、浙江等地做官,1261年左右被贬至梅州(今广东梅县),不久死于任所。秦九韶与李冶、杨辉、朱世杰并称宋元数学四大家。他早年在杭州"访习于太史,又尝从隐君子受数学",1247年写成著名的《数书九章》。《数书九章》全书凡18卷,81题,分九大类(大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市易)。其最重要的数学成就——"大衍总数术"(一次同余组解法)与"正负开方术"(高次方程数值解法),使这部宋代算经在中世纪世界数学史上占有突出的地位。以下选录《数书九章》中关于"大衍总数术"与"正负开方术"的部分,摘自《宜稼堂丛书》本《数书九章》(1842)。

8.1. 大衍总数术

大衍总数术是系统的一次同余组解法。在中国古代算书中,同余问题最先见之于《孙子算经》(见本书[5.2])。秦九韶"大衍总数术"的主要贡献在于:①将《孙子算经》的算法推广到最一般的情形。设有一次同余组

$$N \equiv Ri \pmod{A_i}, \qquad i=1,2,\cdots,n$$

"大衍总数术"相当于提出了解的普遍公式:

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} Riki \frac{A}{Ai} \pmod{A},$$

这里 $A=A_1\times A_2\times\cdots\cdots\times A_n$,$k_1$ 则是满足关系

$$ki\frac{A}{Ai}\equiv 1 \pmod{Ai} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

的一组数,称为"乘率"。"大衍总数术"的关键部分,就是给出了确定 ki 的一般程序,即蜚声中外的"大衍求一术"

（L.马蒂生1876年指出这种"大衍求一术"与高斯1801年获得的一次同余组一般解法相等价）；②在模数非两两互素的情形下，"大衍总数术"首先对不同类型的模数，分别给出了确定的算法将它们化成两两互素，这是历史上第一次对模数非两两互素的同余式组的处理。

以下就是摘自《数书九章》"大衍类"的"大衍总数术"术文。

大衍总数术①曰：置诸问数②，类名有四。一曰元数，谓尾位见单零者，本门揲蓍、酒息、斛粜、砌砖、失米之类是也③。二曰收数，谓尾位见分厘者，假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会而求积日之类④。三曰通数，谓诸数各有分子母者，本门问一会积年是也。四曰复数。谓尾位见十或百及千以上者，本门筑堤并急足之类是也。

元数者，先以两两连环求等⑤，约奇弗约偶⑥。或约得五，而彼有十，乃约偶而弗约奇。或元数俱偶，约毕可存一位见偶。或皆约而犹有类数存⑦，姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等约之。或诸数皆不可尽类⑧，则以诸元数命曰复数，以复数格入之⑨。

收数者，乃命尾位分厘作单零，以进所问之数。定位讫，用元数

---

① 大衍总数术由三部分组成：第一部分是化非两两互素的问数（即模数）为两两互素的"定数"的算法；第二部分是由定数求乘率的程序——大衍求一术；第三部分是由乘率、定数及诸剩余求答案的一般公式。

② "问数"即模数。

③ "元数"是均为整数的问数，但不一定两两互素，其他各类都要先化成元数。

④ "收数"是带小数的问数；以下"通数"是带分数的问数；"复数"是尾数均为0的问数。

⑤ "连环求等"是秦九韶化元数为定数（两两互素的正整数）过程中的基本运算之一，即按一定程序在诸元素间两两求其最大公约数。"等"即最大公约数。

⑥ 奇、偶在这里的含义，学术界尚有争论。有的认为即传统的单数、双数，有的则认为不是传统的单、双数。无论如何，这是化非两两互素的正整数问数为两两互素的正整数的方法。

⑦ "类数"指仍有公约数的数。

⑧ "不尽类"是指通过上述方法化约所得的数，其连乘积尽管是原问数的最小公倍数，但仍非两两互素。

⑨ 指援用复数条下的"复乘求定之理"。

格入之[①]。或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之。

通数者，置问数，通分内子，互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位，约众位，得各元法数，用元数格入之。或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母仍求总等，存一位，约众位，亦各得元法数，亦用元数格入之。

复数者，问数尾位见十以上者。以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数[②]。两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶。或约偶弗约奇，复乘奇。或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼，则必复乘此，乃得定数。所有元数收数通数三格，皆有复乘求定之理[③]，悉可入之。

求定数．勿使两位见偶，勿使见一太多。见一多则借用繁，不欲借，则任得一[④]。以定相乘为衍母，以各定约衍母，各得衍数[⑤]。或列各定为母于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。

诸衍数，各满定母去之，不满曰奇[⑥]。以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率[⑦]。或奇得一者，便为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率。

大衍求一术云：置奇右上，定居右下，立天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生，入左下。然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使

---

① 指将收数化为元数后，套用上述化元数为定数的程序。下同。

② 实际上，复数是元数的一种特例。

③ 用最大公约数约两个元数中的一个，再乘另一个，这是秦九韶化元数为定数过程中的另一种基本运算。

④ 这是说，最后所得的定数中任何两个都不能有公约数，也不能出现“1”太多。

⑤ 设定数为 $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$，秦九韶定义

$$A = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

为衍母，又定义

$$G_i = \frac{A}{a_i},\ i=1,2,\cdots\cdots n \text{ 为衍数。}$$

⑥ 这是为求乘率 k_i 作准备，若 $G_i > a_i$，$G_i \equiv g_i (\mathrm{mod}\, a_i)$，$i=1,2,\cdots n$，$0 < g_i < a_i$，则称 g_i 为奇数。显然，若 $G_i < a_i$，G_i 便为奇数。

⑦ 以下就是“大衍求一术”即求满足同余式

$$k_i g_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, a_i)\ i=1,2,\cdots n \text{ 的 } k_i \text{ 的程序。}$$

右上末后奇一而止，乃验左上所得，以为乘率[1]。或奇数已见单一者，便为乘率。

置各乘率，对乘衍数，得泛用，并泛，课衍母，多一者为正用[2]。或泛多衍母倍数者，验元数，奇偶同类者，损其半倍，或三处同类，以三约衍母，于三处损之。各为正用数。或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数。当验元数同类者，而正用至多处借之。以元数两位求等，

---

① 用现代符号，大衍求一术的程序是：

天元 1	g
	a

1	g
	$a=gq_1+r_1$

1	$g=r_1q_2+r_2$
$c_1=q_1$	r_1 q_1

$c_2=q_2c_1+1$	r_2 q_2
c_1	$r_1=r_2q_3+r_3$

c_2	$r_2=r_3q_4+r_4$
$c_3=q_3c_2+c_1$	r_3 q_3

$c_4=q_4c_3+c_2$	r_4 q_4
c_3	$r_3=r_4q_5+r_5$

………

c_{n-2}	$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+1$
$c_{n-1}=q_{n-1}c_{n-2}+c_{n-3}$	r_{n-1} q_{n-1}

$c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}$	$r_n=1$ q_n
c_{n-1}	r_{n-1}

，

则 c_n 便是所求乘率 k。因要求到右上余 1 为止，故名求一术，这里 n 必定是偶数。

② 此段是大衍总数术的第三部分，给出求同余式解的最后公式。秦九韶把 k_iG_i 称为"泛用"，而把符合

$$\sum_{i=1}^{n}k_iG_i = A + 1$$ 的诸 k_iG_i 称为"正用"。

以等约衍母为借数[①]，以借数损有以益其无，为正用。或数处无者，如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之，均借补之。或欲从省勿借，任之为空可也[②]。然后其余各乘正用，为各总。并总，满衍母去之，不满为所求率数[③]。

8.2. 正负开方术

在秦九韶之前，贾宪、刘益(12世纪初)等已将《九章算术》开方术(包括开带从平方、带从立方)推广到高次情形。秦九韶则集大成，提出了求高次代数方程数值解的完整算法——正负开方术。对任意给定的数值方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

秦九韶的方法相当于用减根变换 $x=x+h$ 将方程变形为

$$f(h)=\bar{a}_0h^n+\bar{a}_1h^{n-1}+\cdots+\bar{a}_{n-1}h+\bar{a}_n=0$$

从初始近似(首商)x_0 开始，秦九韶给出了一个机械化的迭代程序来计算新方程的系数的根的逐位数字。这个程序现称"秦九韶程序"，与现代通用的"霍纳方法"(W. G. Horner，1819)基本一致。"正负开方术"不仅适用于系数允许为负的任意次方程，而且可计算无理根近似值至所需精度。《数书九

---

① 若两元数 a_i，a_j 有公因子 d_{ij}，则称 d_{ij}除衍母 A 之商$\frac{A}{d_{ij}}$为"借数"。借数是秦九韶为调整用数而定义的。例如当定数 Ai 为 1 时，考虑与其元数 a_i 有等的元素 a_j，此时利用借数$\frac{A}{d_{ij}}$将用数 $f_i=0$ 与 $f_j=k_jG_j$ 调整为"借用"：$f_i'=f_i+\frac{A}{d_{ij}}$，$f_j'=f_j-\frac{A}{d_{ij}}$。容易证明，在同余式组有解的情况下，秦九韶这种用借数调整用数的做法是可行的(调整后和 $R_if_i+R_jf_j$ 变为 $R_if_i'+R_jf_j'=R_if_i+R_jf_j+(R_i-R_j)\frac{A}{d_{ij}}$，据可解性条件 R_i-R_j 被 d_{ij}整除而有 $R_if_i+R_jf_j+(R_i-R_j)\frac{A}{d_{ij}}\equiv R_if_i+R_jf_j(\mathrm{mod}A)$，即解保持不变)。

② 秦九韶同时指出也可不用借数而直接求解。因而清黄宗宪等将借数之法视为"赘设"。

③ 这就是一次同余组解的一般公式

$$N\equiv\sum_{i=1}^{n}R_ik_iG_i(\mathrm{mod}A)=\sum_{i=1}^{n}R_ik_iG_i-pA。$$

章》共收集了21个高次方程(最高次数为10)问题，其中卷五(田域类)“尖田求积”题，是秦九韶详细说明他的方法步骤的标准例子，现摘录如下。

尖田求积，问有两尖田一段，其尖长不等。两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步。欲知其积几何①？

答曰：田积八百四十步。

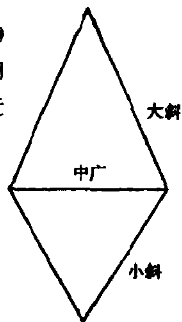
术曰：以少广求之，翻法入之②。置半广自乘，为半幂；与小斜幂相减、相乘，为小率；以半幂与大斜幂相减、相乘，为大率。以二率相减，余自乘，为实。并二率，倍之，为从上廉，以一为益隅，开翻法三乘方，得积③。一位开尽者，不用翻法。

草曰：置三十步，……④。

步法⑤：①万以从廉超一位，益隅⑥超三位，约商得十；②

---

① 此田形状如图。



② 以少广求之，实际上指以开方求之，因开方术在《九章算术》中编入少广章。翻法又称为换骨。以翻法入之是说开方中要用到翻法。秦九韶规定“实常为负”，开方过程中，实一般越来越大，逐渐接近0，但有时会出现实由负变正的情形，称为翻法。此问便如此。

③ 设尖田的大斜为a，小斜为b，中广为c，则此开方式表示四次方程

$$-x^4+2\{(\frac{c}{2})^2[a^2-(\frac{c}{2})^2]+(\frac{c}{2})^2[b^2-(\frac{c}{2})^2]\}x^2-$$

$$\{(\frac{c}{2})^2[a^2-(\frac{c}{2})^2]-(\frac{c}{2})^2[b^2-(\frac{c}{2})^2]\}^2=0$$

④ 以下一段文字是以$a=39$(步)，$b=25$(步)，$c=30$(步)代入而得到具体数字方程：$-x^4+763200x^2-40642560000=0$，此处从略。

⑤ 在得到上述方程后，“步法”即给出解所得方程

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

的具体步骤。引文中①、②……等序号为编者所加，以便与下文开方图相对应。

⑥ 益隅(或方、廉)指该项系数为负。秦氏规定“实常为负”(即常数项为负)，故负实不加“益”字。除了常数项，其他各项系数皆可正可负。

今再超进，乃商置百，其从上廉为七十六亿三千二百万，其益隅为一亿[①]。③约实，置商八百，为定商。以商生益隅，得八亿，为益下廉；④又以商生下廉，得六十四亿，为益上廉；与从上廉七十六亿三千二百万相消，从上廉余十二亿三千二百万；⑤又与商相生，得九十八亿五千六百万，为从方；⑥又与商相生，得七百八十八亿四千八百万，为正积；⑦与元实四百六亿四千二百五十六万相消，正积余二百八十二亿五百四十四万，为正实[②]。⑧又以益隅一亿与商相生，得八亿，增入益下廉，为一十六亿；⑨又以益下廉与商相生，得一百二十八亿，为益上廉；⑩乃以益上廉与从上廉一十二亿三千二百万相消，余一百一十五亿六千八百万，为益上廉；⑪又与商相生，得九百二十五亿四千四百万，为益方；⑫与从方九十八亿五千六百万相消，益方余八百二十六亿八千八百万，为益方。⑬又以商生益隅一亿，得八亿，增入益下廉，得二十四亿；⑭又以商相生，得一百九十二亿，入益上廉，得三百七亿六千八百万，为益上廉。⑮又以商生益隅一亿，得八亿，入益下廉，得三十二亿，毕。⑯其益方一退，为八十二亿六千八百八十万；益上廉再退，得三亿七百六十八万；益下廉再退，得三百二十万；益隅四退，为一万，毕[③]。⑰约正实，续置商四十步。与益隅一万相生，得四万，入益下廉，为三百二十四万；⑱又与商相生，得一千二百九十六万，入益上廉内，为三亿二千六十四万；⑲又与商相生，得一十二亿八千二百五十六万，入从方内，为九十五亿五千一百三十六万；⑳万命上续商，除实，适尽[④]。㉑所得八百四十步，为田积。

正负开三乘方图[⑤]。

---

① 这里实际上施行了变换 $x=100x_1$，方程变成 $-(100)^4x_1^4+7632000000x_1^2-40642560000=0$

② 自①至⑦为求根的第一位得数。

③ 自⑧至⑯为求减根方程：

$$-10000x_2^4-3200000x_2^3-307680000x_2^2-8268800000x_2+38205440000=0$$

④ 自⑰至⑳为求减根方程的根的第一位得数，即原方程的根的第二位得数。

⑤ 此前原有求率图即各系数的计算图，今删。开方图中的序号①、②、……亦为编者所加，以与细草中的序号对应。图中的数字原为筹式，今径改为阿拉伯数字。

术曰：商常为正，实常为负，从常为正，益常为负。

0	商	00	商
4064256000 0	实	406425 60000	实
0	虚方	0	虚方
76320 0	从上廉	763 200	上廉
0	虚下廉	0	下廉
-1	益隅	-1	益隅

①上廉超一位，益隅超三位，商数进一位。

②上廉再超一位，益隅再超三位，商数再进一位。

800	商	800	商
40642560000	实	4 0 642560000	实
0	虚方	0	方
7 63200	上廉	7 63200	从上廉
0	下廉	-6 40000	益上廉
-1	益隅	-800	下廉
		-1	益隅

③上商八百为定，以商生隅，入益下廉。

④以商生下廉，消从上廉。

800	商	800	商
40 642560000	实	40 642560000	实
0	方	9 8560000	方
1 23200	上廉	1 23200	上廉
-800	下廉	-800	下廉
-1	益隅	-1	益隅

⑤以商生上廉，

⑥以商生方，

入方。

800	商
40 642560000	实
78 848000000	正积
9 8560000	方
1 23200	上廉
-800	下廉
-1	益隅

得正积，乃与实相消。

800	商
38 205540000	正实
9 8560000	方
1 23200	上廉
-800	下廉
-1	益隅

⑦以负实消正积，其积乃有余，为正实，谓之换骨。

800	商
3 8 205540000	实
9 8560000	方
1 23200	上廉
-1 600	下廉
-1	益隅

⑧以商生隅，入下廉。一变。

800	商
3 8 205540000	实
9 8560000	方
1 23200	正上廉
-1 2 800	负上廉
-1 600	下廉
-1	益隅

⑨以商生下廉，入上廉内，相消。

800	商
3 8 205540000	实
9 8560000	方
-1 1 56800	上廉
-1 600	下廉
-1	益隅

⑩以正负上廉相消。

800	商
3 8 205540000	实
9 8560000	正方
-9 2 5440000	负方
-1 1 56800	上廉
-1 600	下廉
-1	益隅

⑪以商生上廉，

入方内，相消。

800	商
3 8 205540000	实
-8 2 6880000	方
-1 1 56800	上廉
-1 600	下廉
-1	益隅

⑫以正负方相消。

800	商
3 8 205540000	实
-8 2 6880000	方
-1 1 56800	上廉
-2 400	上廉
-1	益隅

⑬以商生隅，入下廉，

二变

800	商
3 8 205540000	实
-8 2 6880000	方
-3 0 76800	上廉
-2 400	下廉
-1	益隅

⑭以商生下廉，入上廉。

800	商
3 8 205540000	实
-8 2 6880000	方
-3 0 76800	上廉
-3 200	下廉
-1	益隅

⑮以商生隅，入下廉。

三变

840	商
3 8 20 55 40000	实
-8 26 88 0000	方
-30 76 800	上廉
-32 00	下廉
-1	益隅

⑰以商约实，续商置

⑯方一退，上廉二退，下廉

三退，隅四退，商续置。

四变

840	商
3 8 20 55 40000	实
-8 26 88 0000	方
-30 76 800	上廉
-32 40	下廉
-1	益隅

⑱以商生下廉，入上廉内。

四十。生隅，入下廉内。

840	商
3 8 20 55 40000	实
-8 26 88 0000	方
-32 06 400	上廉
-32 40	下廉
-1	益隅

⑲以商生上廉，入方内。

840	商
3 8 20 55 40000	实
-9 55 13 6000	方
-32 06 400	上廉
-32 40	下廉
-1	益隅

⑳以续商四十命方法，

除实，适尽。

840	商
0 0 00 00 00000	实空
-9 55 13 6000	方
-32 06 400	上廉
-32 40	下廉
-1	益隅

㉑所得商数八百四

十步，为田积。

已上系开三乘方翻法图。后篇效此[1]。

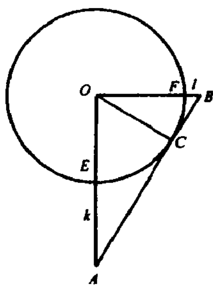
（郭书春 选注）

① 说明此为本书之范例。秦氏方法是一般方法。

9. 李冶:《测圆海镜》——天元术

随着高次方程数值求解技术的发展,列方程的方法也相应产生,这就是所谓“天元术”。在传世的宋元数学著作中,首先系统阐述天元术的是李冶的《测圆海镜》。

李冶(1192～1279)原名李治,号敬斋,金代真定栾城人,曾任钧州(今河南禹县)知事,1232 年钧州被蒙古军所破,遂隐居治学,被元世祖忽必烈聘为翰林学士,仅一年,便辞官回乡。1248 年撰成《测圆海镜》,其主要目的就是说明用天元术列方程的方法。“天元术”与现代代数中的列方程法相类似,“立天元一为某某”,相当于“设 x 为某某”,可以说是符号代数的尝试。李冶还有另一部数学著作《益古演段》(1259),也是讲解天元术的。以下摘录的是《测圆海镜》卷七第 2 问,引自《知不足斋丛书》本《测圆海境》(1798)。



假令有圆城一所,不知周径。或问丙出南门直行一百三十五步而立,甲出东门直行一十六步见之。问径几何?①又法:二行相乘得数,又自之,为三乘方实。并二行步,以乘二行相乘数,又倍之为从。二行相并数以自乘于上,又二行相减数自乘,减上位为第一廉。第二廉空。一益隅。益积开之得半径②。其第一廉只是四段二行相乘数③。

① 如图所示,设南行 EA 为 k,东行 FB 为 l,半城径为 x。

② 此表示四次方程

$$-x^4+[(k+l^2)-(k-l)^2]x^2+2kl(k+l)x+(kl)^2=0$$

隅是未知数最高次幂系数,源于刘徽对开立方术的几何解释。益隅表示负系数。

③ 此是 $(k+l)^2-(k-l)^2=4kl$,为 x^2 的系数。

草曰：立天元一为半城径[①]副置之。上加南行步得 𝍠元
𝍠𝍫𝍤 为股，下位加东行步得 𝍠元
𝍩𝍥 为勾[②]。勾股相乘得 𝍠
𝍠𝍭𝍠元
𝍪𝍠𝍮〇 为直积一段，以天元除之得 𝍠
𝍠𝍭𝍠太
𝍪𝍠𝍮〇 为弦，以自之得 𝍠
𝍢〇𝍡
𝍡𝍯𝍠𝍪𝍠太
𝍮𝍤𝍡𝍢𝍪〇
𝍣𝍮𝍥𝍭𝍥〇〇 为弦幂，寄左。乃以勾自之得 𝍠
𝍫𝍡元
𝍡𝍭𝍥，又以股自之得 𝍠
𝍡𝍯〇元
𝍠𝍰𝍡𝍪𝍤，二位相并得 𝍡
𝍤𝍬〇元
𝍠𝍰𝍣𝍰𝍠 为同数。与左相

---

① 立天元一为某相当于设 x 为某，此处是设 x 为城半径 r。

② 由图，$x+k$ 即 $x+135$ 为股 b，$x+l$ 即 $x+16$ 为勾 a。 𝍠元
𝍠𝍫𝍤 为天元多项式，它以"元"放在未知数的一次项旁或以"太"放在常数项旁来表示，其他项的幂次由与"元"或"太"的相对位置确定。《测圆海境》中以高次幂在上，这样文中 𝍠元
𝍠𝍫𝍤 相当于 $x+135$， 𝍠
𝍠𝍭𝍠元
𝍪𝍠𝍮〇 相当于 $x^2+151x+2160=0$， 𝍠
𝍠𝍭𝍠太
𝍪𝍠𝍮〇 太相当于 $x+151+2160x^{-1}=0$。可以看出，以天元（或其幂）乘（或除）天元式只要上下移动"元"或"太"即可。

消得

𝍠̸[1]
〇
𝍰𝍥𝍬〇
𝍮𝍤𝍪𝍢𝍪〇
𝍣𝍮𝍥𝍭𝍥〇〇

。益积开三乘方，得一百二十步，即半城径也[2]。

（郭书春 选注）

① 这是同数相消，当时又称为如积相消，即两相等的天元多项式相减，所得相当于$-x^2+8640+652320x^{-1}+4665600x^{-2}=0$，以$x^2$乘两端，得$x^4+8640x^2+652320x+4665600=0$。

② 用增乘开方法求其正根，得$x=120$。

10. 朱世杰:《四元玉鉴》

朱世杰(1300前后),字汉卿,号松庭,寓居燕山(今北京附近),"以数学名家周游湖海二十余年","踵门而学者云集"(莫若、祖颐:《四元玉鉴》后序)。朱世杰数学代表作有《算学启蒙》(1299)和《四元玉鉴》(1303)。《算术启蒙》是一部通俗数学名著,曾流传海外,影响了朝鲜、日本数学的发展。《四元玉鉴》则是中国宋元数学高峰的又一个标志,其中最杰出的数学创造有"四元术"(多元高次方程列式与消元解法)、"垛积术"(高阶等差数列求和)与"招差术"(高次内插法),以下分别录述,所有引文摘自《白芙堂算学丛书》本《四元玉鉴》(1876)。

10.1. 四元术

四元术以"天"、"地"、"人"、"物"分别表示4个未知数来布列四元高次方程,这是天元术的自然推广。朱世杰四元术更重要的贡献,还在于创立了解联列高次方程的消元法。《四元玉鉴》卷首"假令四草"给出4个例题,对"四元消法"有简要说明。以下摘录其中第4题"四象会元"。

四象会元　今有股乘五较与弦幂加勾乘弦等[①]。只云勾除五

---

① 五较指勾股较 $b-a$,勾弦较 $c-a$,股弦较 $c-b$,弦和较 $(b+a)-c$,弦较较 $c-(b-a)$之和,实际上等于 $2c$。这里是给出条件 $2bc=c^2+ac$。

和与股幂减勾弦较同[1]。问黄方带勾、股、弦共几何[2]？

答曰：一十四步。

草曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦，物元一为开数[3]。四象和会求之，求得今式[4] ‖太| ，求得云式[5] ||||太|||| ，求得三元之式 |〇太〇 ，求得物元之式 ‖太 。四式和会消而剔之[6]，式皆物易天位[7]，得前式〇 ‖ 〇 ‖太 ，后式 太 ‖ ，便为左式。以左式消前式，〇 ‖≡ |||| ||| ‖ 便为右式。内二行得式

---

[1] 五和指勾股和 $a+b$，勾弦和 $a+c$，股弦和 $b+c$，弦和和 $c+(a+b)$，弦较和 $c+(b-a)$之和，实际上等于 $2a+4b+4c$。这里是给出条件$\frac{2a+4b+4c}{a}=b^2-(c-a)$。

[2] 黄方是以弦减勾股和$(a+b)-c$，本题问$(a+b)-c+a+b+c=2a+2b$ 为多少。

[3] 这是设 x 为勾，y 为股，z 为弦，u 为开数。开数即所求数，即黄方带勾、股、弦 $2a+2b$。

[4] 四元术以“太”表示常数项，居中，而以“天”、“地”、“人”、“物”表示 4 个未知数，分居于下、左、右、上得出四元式。因此，今式即：$x-2y+z=0$。

[5] 云式即$-x^2+2x\quad xy^2+xz+4y+4z=0$。（以下诸四元式同理，略注）。

[6] “剔”是从某四元式中剔出某未知数（或其幂）以消元。至于剔的过程，诸说不同。

[7] “物易天位”即令 $x=u$。

太
○
一丅 ，外二行得式 二〇☰ 𝍧
二 𝍪
二 𝍧 内外二行相消[①]，三约之，得

开方式 丅 ≐ 丅
𝍦
|||| ，平方开之，得一十四步，合问。

10.2. 垛积术

中国古代高阶等差级数的研究始于北宋沈括(1031～1095)的“隙积术”(《梦溪笔谈》第18卷)。朱世杰称此类问题为“垛积”，并将其与二项系数表联系起来，得到了一系列重要的求和公式。以下内容摘自《四元玉鉴》卷中“茭草形段”门及卷下“果垛叠藏”门，但对题序作了调整。

今有茭草一垛直钱二十五贯五百七十八文，只云最上一束直钱九文，次下层层每束累贵三文，问底子几何[②]？

答曰：二十八束。

术曰：立天元一为茭草底子。如积求之，得一十五万三千四百六十八，为益实；二十一为从方，二十七为从廉，六为从隅，立方开

---

① 内外二行相消，即二元二行式的消元法，其中包含了朱世杰四元消法的基本思想。二元二行式是最简单形式的二元式，若用现代符号将朱世杰的左式、右式表为 $\begin{cases}A_1y+A_0=0\\B_1y+B_0=0\end{cases}$(其中 A_0,B_1 称内二行，A_1,B_0 称外二行，都是仅含 x 而不含 y 的多项式)，则内二行相乘，外二行相乘，再相减，即可消去 y 得 $F(x)=A_0B_1-A_1B_0=0$。这是关于 x 的一元方程，可用增乘开方法解之。

本例中 $A_0=2,B_1=8x,A_1=-7,B_0=3x-4x^2+294$，内外相乘相消得 $12x^2-21x-2058=0$。《四元玉鉴》其它例题中还有针对一般二元方程组(即不限于二行式)的“互隐通分相消”法，与前述“剔消”、“易位”和“二元相乘相消”等一起构成一套系统的消元算法。

② 这是“茭草形段”门第6问，茭草垛即一阶等差级数 $\sum_{n=1}^{x}n$。

之合问[1]。

今有茭草六百八十束，欲令落一形垛之。问底子几何[2]？

答曰：一十五束。

术曰：立天元一为落一底子。如积求之，得四千八十，为益实；二为从方，三为从廉，一为正隅，立方开之，合问[3]。

今有三角撒星更落一形果子，积九百二十四个，问底子几何[4]？

答曰：七个。

术曰：立天元一为三角撒星更落一底子。如积求之，得六十六万五千二百八十，为益实；一百二十为从方；二百七十四为从上廉；二百二十五为从二廉，八十五为从三廉，一十五为从四廉；一为正

---

① 设 x 为茭草底，这里相当于求解方程 $6x^3+27x^2+21x-153468=0$，它由 $9\times\frac{3\times2}{2!}x(x+1)+6\times(x-1)x(x+1)=6\times25578$ 推出。左端第一项中的 $\frac{1}{2!}x(x+1)$ 即等差级数 $\sum_{n=1}^{x}n$ 的求和公式。

② 这是“茭草形段”门第 1 问。

③ 设 x 为落一垛底，此即求解 $x^3+3x^2+2x-4080=0$，它由 $\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3!}x(x+1)(x+2)=680$ 推出。这是二阶等差级数求和公式。朱世杰在《四元玉鉴》“茭草形段”门第 2 问与第 4 问中又分别给出了三阶与四阶等差级数求和公式：

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4!}x(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$\sum_{n=1}^{X}\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5!}x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

④ 这是“果垛叠藏”门第 6 问。

隅，丘乘方开之，合问①。

10.3. 招差术

内插法在中国古代的发展是与天文历法紧密结合的。东汉刘洪《乾象历》首先使用一次内插法确定合朔时刻。隋唐时期刘焯、一行分别在《皇极历》和《大衍历》中创用了等间距与不等间距二次内插法。到了元代，郭守敬《授时历》已解决了三次函数的内插问题。朱世杰则进一步发展了高次内插法，他与秦九韶一样称内插法为“招差术”。《四元玉鉴》卷中“如象招数”门五问，都与招差术有关，其中给出了相当于现代牛顿-格里高里(Newton-Gregory)公式(1670,1676)的四次内插公式。以下摘录的是“如象招数”门第5问。

---

① 设 x 为三角撒星更落一垛底，此为求解 $x^6+15x^5+85x^4+225x^3+274x^2+120x=665280$。它由

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$
$$=\frac{1}{6!}x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=924$$

推出。以上这些例题说明朱世杰已掌握了公式

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{p!}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+p-1)$$
$$=\frac{1}{(p+1)!}x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+p)$$

朱世杰在《四元玉鉴》卷首“古法七乘方图”中用两组平行于左右两袤的平行线将贾宪三角各数联结起来，上述公式中当 $p=2,3,4,\cdots\cdots$ 时的级数恰是贾宪三角第 2,3,4,……条斜线上的数字，而其和恰是第 3,4,5,……条斜线上的第 x 个数字，上述公式大约就是由此推出的。朱世杰在《四元玉鉴》中还给出了求和公式

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{p!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)\cdot r$$
$$=\frac{1}{(p+2)!}x(x+1)(x+2)\cdots(x+p)[(p+1)x+1]$$

$p=1$ 时称为四角垛，$p=2$ 时称为“岚峰形垛”，$p=3$ 时称为“三角岚峰形垛”。

今有官司依立方招兵[①]，初招方面三尺，次招方面转多一尺。每人日支钱二百五十文。已招二万三千四百人，支钱二万三千四百六十二贯。问招来几日？

答曰：一十五日。

术曰：立天元一为三角落一底子。如积求之，得九万二千七百三十六为益实，六百六十为从方，一百八十一为从上廉，二十二为从下廉，一为正隅，三乘方开之，得三角落一底子一十二个[②]。加三即日数[③]。……[④]

或问还源。依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵。今招一十五方，每人日支钱二百五十文。问招兵及支钱各几何？

答曰：兵二万三千四百人，

钱二万三千四百六十二贯。

---

① 依立方招兵，即依 n^3 招兵，第一天招 3^3，第二天招 $(3+1)^3$，第 n 天招 $(3+n-1)^3$。

② 设 x 为三角落一垛底。此为求解

$$x^4+22x^3+181x^2+660x-92736=0$$

此四次方程来自于

$$(x+3)\Delta_1+\frac{1}{2!}(x+2)(x+3)\Delta_2+\frac{1}{3!}(x+1)(x+2)(x+3)\Delta_3$$

$$+\frac{1}{4!}x(x+1)(x+2)(x+3)\Delta_4=23400 \qquad (*)$$

其中 $\Delta_1=27,\Delta_2=37,\Delta_3=24,\Delta_4=6$ 分别是上差、二差、三差、下差：

日数	每日招兵数			
1	$3^3=27$ (Δ_1)			
		$37(\Delta_2)$		
2	$4^3=64$		$24(\Delta_3)$	
		61		6 (Δ_4)
3	$5^3=125$		30	
		91		6
4	$6^3=216$		36	
		127		…
5	$7^3=343$		…	
		…		
…	……			

上述$(*)$式即是四次招差公式。

③ $(*)$式的推导过程实际上假设日数为 $x+3$。

④ 以下为“钱求日术”，从略。

术曰：求得上差二十七，二差三十七，三差二十四，下差六。求兵者，今招为上积；又，今招减一为茭草底子积，为二积；又，今招减二为三角底子积，为三积；又，今招减三为三角落一积，为下积。以各差乘各积，四位并之，即招兵数也①。

（郭书春 选注）

① 此是朱世杰自注，为上述算法的还原算法，直接给出招差公式：

$$f(n)=n\Delta_1+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta_2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta_3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta_4$$

并求得 $f(15)=23400$。

显然，招差公式中自第二项起分别是茭草垛、三角垛、三角落一垛的前 n 项和。朱世杰在这里得到的是一般公式，相当于现代使用的牛顿-格里高里公式。

印度与阿拉伯

11. 阿耶波多:《阿耶波多历数书》

古代印度数学约产生于公元前8世纪至前2世纪的“绳法经”时期。《绳法经》(Sulvasūtra)是关于祭台建筑的宗教法规,其中包含许多几何知识。

迄今所知最早的印度数学家阿耶波多(Āryabhata I),公元476年生于恒河南岸的拘苏摩补罗,卒年不详;23岁时完成《阿耶波多历数书》(Āryabhatīya),这是他的主要著作。古代印度数学与天文学密不可分,《阿耶波多历数书》包括了《天文表集》、《算术》、《时间度量》与《球》等篇。在数学方面,阿耶波多所制正弦表在三角学史上有重要地位,其中用同一单位度量半径与圆周,孕有弧度制观念。阿耶波多又创造了具有浓郁印度特色的“粉碎法”(梵语称“库塔卡”),开古代印度一次不定方程研究之先河。以下摘录《阿耶波多历数书》“数学篇”有关部分,除了上述两项重要成就外,还包括开方算法、比例法以及算术级数求和等内容,译自:Āryabhatīya of Āryabhata, Critically edited with translation and notes by K. S. Shukla and K. V. Sarma, Chapter Ⅱ. Mathematics, pp. 33 ~ 84. Indian National Science Academy, New Delhi, 1976.

2. [前面十个数位][①] 单位、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿、十亿，依次地后一位数比前一位大十倍。

3(a－b)、正方形与平方　等边等对角线的四边形以及它们的面积称为“正方形”。二等量相乘积也是“正方形”。

3(c－d)。立方体与立方　三个等量连续相乘的乘积也等于有十二条[等]边的立体[长方体]体积，称为“立方体”。

4. 平方根[从最后一节奇位减去尽可能大的平方值后，在平方根线上记下这个减数的平方根]。总是对[右侧]偶位除以平方根的二倍。然后从[右侧]奇位减去[商]的平方。在下一位记下这个商[这就是说，在平方根线上已记数字的右侧]这就是平方根。[如果右侧还有数，就重复这一手续。][②]

5. 立方根[从最后一节的立方位减去尽可能大的立方值后，在立方根线上记下这个减数的立方根。在最后一节立方位的右

---

① 方括号内字是后人据意添加，非原著，下同。

② 举例：求 55225 的平方根，以 o,e 分别表示被开方数的奇位、偶位：

```
                    oeoeo            235
                    55225            平方根线
减去平方……………………4
除以根的二倍……4)15(3
                    12
                     32
减去商的平方……………9
除以根的二倍        46)232(5
                      230
                        25
减去商的平方…………………25
                         0
```

运算完毕，平方根是 235，余数是 0。

侧]第二个非立方位除以[刚求到的]立方根的平方三倍;[然后从第二个非立方位数后侧]第一个非立方位减去商的平方及[立方根的]三倍乘积。[然后]从立方位[在第一个非立方位右侧]减去商的立方。[在立方根线上在已记下的立方根右侧记下这个商,把它看成新的立方根。如果右侧还有数,就重复这一手续。]

6$(a-b)$、三角形面积　高[从顶至底]与半底的乘积是三角形面积量数。

6$(c-d)$、三棱锥体积　[三角形底]面积与高的乘积之半是六棱立体的体积①。

7$(a-b)$、圆面积　半周半径乘积显然是圆面积。

7$(c-d)$、球体积　[大圆]面积与其平方根乘积得球的精确体积②。

8. 梯形面积　[一般说,梯形]上下底各乘以高,除以上下底的和,其结果是上下底上各自的高[至对角线交点止]。上下底的和折半,乘以高,结果是[梯形]面积③。

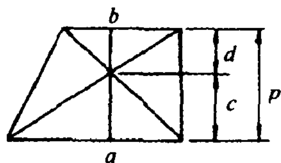
10. 圆周长　100 加 4,乘以 8,加上 62000。这是直径 20000 的圆周长近似量数。

11. 正弦表的几何计算法　把象限圆弧[根据需要]等分。然后从[直角]三角形以及长方形,对于任何已给半径,人们可求出所

---

① 结论是错的。

② 阿耶波多可能从 7$(a-b)$推得:半径为 R 的面积是边长为$\sqrt{\pi R^2}$的正方形面积。类似地半径为 R 的球体积是边长为$\sqrt{\pi R^2}$的立方体体积,这就是$(\sqrt{\pi R^2})^3=\pi R^2\sqrt{\pi R^2}$。



③ 这是说

$$c=\frac{ap}{a+b}\quad 面积\ A=\frac{1}{2}(a+b)p$$

$$d=\frac{bp}{a+b}$$

需要的任意等分弧的正弦值[①]。

12. 正弦差的推导　第一个正弦值除以本身，然后减去所得商，就是第二个正弦差。同样，第一个正弦值减去后面所有正弦值和除以第一个正弦值，就得到其余的正弦差。[②]

15. 灯杆、标杆影长　灯杆、标杆相距距离乘标杆高，除以标杆、灯杆高度差。所得商是从标杆底起量的标杆影长。[③]

16. 标杆影端与灯杆距离以及灯杆高　[当等高二标杆在灯杆同一侧时，二标杆]影端距离与影长[长影或短影]相乘，除以影长之差：所得结果是直线段[长影端或短影端到灯杆距离]。这线段与标杆高相乘，再除以[长或短]影长，就得底[灯杆高]。[④]

---

① 求每隔15°角度的正弦值，12等分圆周，

A、B、C、D…为等分点。$MB=R\sin 30°=\frac{R}{2}=1719$

$OM=\sqrt{R^2-(\frac{R}{2})^2}=R\sin 60°=2978$

$AB=\sqrt{R^2\sin^2 30°+R^2\mathrm{rers}^2 30°}$

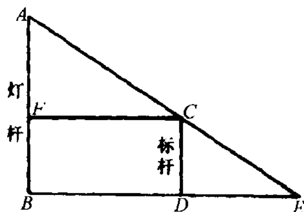
$R\sin 15°=890$

$ON=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 15°}=R\sin 75°=3321$ 这里取圆周长为 360×60，$\pi=3.14$。

② 如果 $R_1, R_2, \cdots, R_{24}$ 是24个 $R\sin\theta$ 值，又 $\delta_1(=R_1), \delta_2, \cdots, \delta_{24}$ 表示相邻正弦差，命题12是说

$$\delta_2=R_1-\frac{R_1}{R_1}, \delta_{n+1}=R_1-\frac{\sum_{i=1}^{n}R_i}{R_1}$$

③ 这是说标杆影长 $DE=\frac{FC\cdot CD}{AF}=\frac{BD\cdot CD}{AB-CD}$



④ 这是说

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BD}{QD}, \frac{AB}{LM}=\frac{BC}{MC}, \frac{BD}{QD}=\frac{BC}{MC}=\frac{CD}{QD-MC}$$

因此，$BD=\frac{CD\cdot QD}{QD-MC}$

$$BC=\frac{CD\cdot MC}{QD-MC}$$

$$AB=\frac{BC\cdot LM}{MC}$$

17. 斜边上平方与半弦上平方定理[直角三角形]底的平方加上直角边平方和是斜边平方。[一弦分圆周为二弧]二弧矢的乘积显然等于半弦平方。

19. 算术数列部分和　项数减1,然后除以2,然后加上前面的项数,然后乘以公差,然后加上首项。所得结果是[前面诸项]算术平均值。这一结果乘以项数就是前面诸项之和。①

20. 算术数列项数　项数[可用下面方法求得:数列之和]乘以8,又乘以公差,以乘积加上首项2倍与公差的差的平方,然后取平方根。然后减去首项的2倍,然后除以公差,然后[把所得商]加1。结果除以2②。

22. $\sum n^2$ 与 $\sum n^3$　三数连乘积:这是说项数加1,再加项数以及项数,当除以6时,就给出自然数平方和。自然数数列和的平方是自然数立方数列的和③。

23. 从二数和及平方和求乘积　两数和的平方减去两数平方的和,差的一半是二数乘积。

24. 从差及积求二数　乘积乘以4,加二数差的平方。所得和开方,加上差,减去差。所得结果的一半[分别]是[已知乘积]的二数④。

---

① 从 $p+1$ 项开始的前 n 项和是 $n\{a+(\frac{n-1}{2}+p)d\}$。

② 如等差数列 $a,a+d,a+2d\cdots$ 前面 n 项的和记为 S,则项数 $n=\frac{1}{2}\{\frac{\sqrt{8ds+(2a-d)^2}-2a}{d}+1\}$

③ 这是说 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$,$1^3+2^3+\cdots+n^3=\{\frac{n}{2}(n+1)\}^2$

④ 这是说已给 $x-y=a$,$xy=b$,那么

$$x=\frac{\sqrt{4b+a^2}+a}{2},y=\frac{\sqrt{4b+a^2}-a}{2}$$

26. 三率法　三率法是实乘以要求项。乘积除以主项，得对应于实的所求项[1]。

28. 逆推法　在逆推法中乘数变为除数，除数变为乘数，加数变成减数，而减数变成加数[2]。

29. 从和数求未知数　除去其中一个以外，依次以其余未知量之和[是已知的]求和。和数除以未知量个数减 1。所得商是所有

---

① 三率法就是比例算法　婆什迦罗在《丽罗娃蒂》设题："有优质樟脑 63 重量单位，值 104 钱币，问：同质樟脑 $12\frac{1}{4}$ 重量单位，值多少"按照三率法排成横式

主项　　实　　要求项

$63 —— 104 —— 12\frac{1}{4}$

所求项 $=104\times 12\frac{1}{4}\div 63=20\frac{56}{252}$（钱币）

李约瑟在《中国科学技术史》卷 3 数学篇中指出：在汉文和梵文这两种语言中，表示分子的专门术语是相同的，汉文的"实"和梵文 phala 都是果实。同样，表示分母的汉文"法"和梵文 pramana（主项）也都表示标准的长度单位。甚至连与此有关的第三个大家都知道的术语，在这两种语言中也可以看作是相同的。因为梵文的 iccha（要求项）对应于汉文的所求率。

② 已知一数乘以 2，加上 1，除以 5，乘以 3，然后减去 2，又除以 7，结果是 1。问：原数是多少？解：从最后结果的 1 开始，从后而前地逆推。取相反运算符号：$1\times 7, +2, \div 3, \times 5, -1, \div 2$ 答案是 7。

未知量之和①。

32～33、余数粉碎法(库塔卡)　对应于较大余数的除数除以对应于较小余数的除数。[不计商数]所得余数[又与除数]相除。[直至最后余数足够小，而商是偶数个]。最后一个余数乘以某一选定的数。所得乘积加上[对应于已给大小=]余数的差、辗转相除中

---

① 举例说，某数除以 8，余 5；除以 9，余 4；除以 7，余 1；求此数。这就是

	(1)	(2)	(3)
余数	5	4	1
除数	8	9	7

以粉碎法施行于第(1)(2)两种情况。

对应于较大余数的除数 8 除以对应于较小余数的 9，得商数 0，余数 8。这个商数 0 不计，而把余数 8，除数 9 辗转相除，直到有足够小的余数

```
8)9(1
  8
 ───
  1)8(8
    8
   ───
    0
```

取选定数为 1，乘余数 0，然后加 1(这是大小二余数之差)结果是 1，又除以 1(辗转相除最后一个除数，也就是最后第二个余数)得商 1。然后依次记出辗转相除得到的一系列商数：1 以下记 8，再下是选定数，再下是刚才所得的商 1。

```
1   按法递推计算，得   1  1  10
8                      8  9  9
1                      1  1
1                      1
```

然后上面一数除以 9(对应于题给较小余数的除数)得余数 1。以此余数 1 乘 8(对应于题给较大余数的除数)加较大余数 5，得 13。同时满足(1)，(2)，它也是 8×9 作为除数的余数。

粉碎法施行于

	(4)	(5)
余数	13	1
除数	72	7

得结果 85，它同时满足(1)，(2)，(3)。通解是

85(mod　8×9×7)

的最后第二个余数能整除所得的和数。

从上而下依次记出辗转相除中所有商数,排成一列。接着写出选定的那个数,再在它的下面写出刚才所求出的整除商。

把这一列数按下面步骤递推计算:最后第二个数乘以紧接上面一数,又加下面一数。[然后删去下面这一数]重复这种手续,直至只剩上面两个数。

[上面一数]除以对应于较小余数的除数,然后以其余数乘以对应于较大余数的除数,然后加上较大的那个余数,结果就是[这两个除数的]答案。

(沈康身 译)

12. 婆罗摩笈多:《婆罗摩修正历数书》

公元 5 世纪至 12 世纪,是印度数学发展的鼎盛时期。这一时期最有代表性的印度数学家,除阿耶波多以外,还有婆罗摩笈多(Brahmagupta,约 598~约 660)、马哈维拉(Mahāvira,9 世纪)、婆什伽罗(Bhāskara Ⅱ ,1114~1185?)等。婆罗摩笈多是印度中部印多尔之北乌贾因地方人。乌贾因(Ujjain)是中世纪印度三大天文、数学活动中心之一。婆罗摩笈多于公元 628 年完成其主要著述《婆罗摩修正历数书》(Brahma-sphuta-siddhānta),全书 24 章,专论数学的有两章(第 12 章,"算术";第 18 章,"代数")。婆罗摩笈多是最早认识负数概念的数学家之一,并在历史上第一次提出负数的乘除法则;婆罗摩笈多在不定分析方面率先研究了二次方程 $y^2=Nx^2+1$,并得到许多结果,后称"婆罗摩笈多结论"。这类方程在近代文献中误称为"佩尔(Pell)方程"(最早论及这类方程的欧洲学者是费马、沃利斯和 W. 布隆克尔等)。以下摘录《婆罗摩修正历数书》"代数"章有关内容,译自:H. T. Colebrooke, Algebra with Arithmetic and Mensuration from Sanskrit of Brahmagupta and Bhascara, pp. 325~377, John Murray, London, 1817.

第 18 章　代数

第 2 节　算法

31. 正量、负量与零的加法规则　二正量的和是正的,二负量的和是负的。一个正量、一个负量的和是它们的差,如果它们[绝对值]相等,则其和为零。零与负量之和是负的,正数与零之和是正。

二个零之和为零。

32～33. 减法规则　正量减正量，负量减负量就从[绝对值]大的减去小的，如果从小的减去大的，其差应反号。从零减去负量得正，从零减去正量得负。负量减去零，得负。正量减去零得正，零减去零得零。从负量减去正量，从正量减去负量，它们必须合并。

34. 乘法规则　负量与正量的乘积得负。二负量乘积得正，二正量乘积得正，零与负量乘积、零与正量乘积是零。二零之乘积是零。

35. 除法规则　正量除以正量，负量除以负量都得正量。零除以零没有价值。正量除以负量得负量，负量除以正量得负量，正量或负量除以零，得一分数，以零作分母；或是零除以负量或正数。

36. [结论]　乘方与平方规则　负量或正量的平方得正量。零的平方得零。平方的平方根就是原数。

39. 平方根的加减法规则　被开方数各除以一假定的数，商的平方根相加，其和的平方，乘以假定数，乘积的平方根就是所求的和。二平方根相减，其差的平方乘以假定数，乘积的平方根就是所求的差。

例　告诉我$\sqrt{2}$，$\sqrt{8}$的和与差。

说明　2，8 各除以假设的数，如 2，得 1，4。商的平方根是 1，2。它们的和差的平方分别是 9，1。各乘以假设数，得 18，2。二者的平方根是所求的和、差①。

第 3 节　简单方程②

44. 简单方程法则　绝对项之差变号后，除以未知数[系数]

---

① 法则是说 $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\pm\sqrt{\frac{y}{a}}\right)\sqrt{a}$

$=\sqrt{a\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\pm\sqrt{\frac{y}{a}}\right)^{2}}$，关键是假设的 a 要使 $\sqrt{\frac{x}{a}}$，$\sqrt{\frac{y}{a}}$ 都能开尽。

② 一次方程。

之差就是方程的未知数[值][①]。

第4节　二次方程

45. 消去中项法则　从平方项及简单项的另一端取绝对项。绝对项乘以平方项[系数]的4倍，加上中项[系数]的平方。[其和]的平方根，减去中项[的系数]把结果除以平方项[系数]的2倍，得中项[值][②]。

第7节　二次不定方程

64. 任意选定一数的平方乘一常数，加上另一选定的[插入]数，开平方。重复两次。其第一组根与常数的乘积合并第二组根的乘积给出[新方程]的第二个根。合并它们的交叉乘积给出[新方程]的第一个根，而[新方程]的插入数是前后选定[插入]数的乘积[③]。

65. 二根除以加数或减数的平方根，借此可以求出插入数为1的根[④]

67. 当加数是4时，第二个根的平方减去3。折半后乘以第二个根，就得到[加数是1的新方程]的第二个根，第二个根平方减去

---

① 法则是说，对于一次方程 $ax+b=cx+d$ 所求

$$x=\frac{-(b-a)}{a-c}$$

② 这是说，二次方程 $ax^2+bx=c$ 的根

$$x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}$$

③ 这是说，如果 α,β 是方程 $Nx^2+k=y^2$ 的解，α',β' 是方程 $Nx^2+k'=y^2$ 的解，则 $x=\alpha\beta'+\alpha'\beta$，$y=N\alpha\alpha'+\beta\beta'$ 是新方程 $Nx^2+kk'=y^2$ 的解。

这里 α,α' 是前后选定的数，也就是第一组根；N 是常数；k,k' 是另一先后选定的插入数；β,β' 是第二组根。

④ 这是说，如果 (α,β) 是 $Nx^2\pm k^2=y^2$ 的根，则 $(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k})$ 是 $Nx^2\pm1=y^2$ 的根。

1,折半后乘以第一个根,就得到[新方程]的第一个根。①

68. 当减数是 4 时,第二个根的平方加 3,加 1;二者和的乘积折半后再减去一。把结果乘以第一个和减去 1,是所求[新方程]第二个根。前者乘以原来二根的乘积是对应于[新方程]第二个根的第一个根②。

(沈康身 译)

---

① 这是说,如果(α,β)是

$Nx^2+4=y^2$ 的根,则

$$x=\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-1)$$

$$y=\frac{1}{2}(\beta^2-3)\beta$$

是 $Nx^2+1=y^2$ 的根。

② 这是说,如果(α,β)是 $Nx^2-4=y^2$ 的根,则 $x=\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta^2+3)(\beta^2+1)$, $y=(\beta^2+2)\{\frac{1}{2}(\beta^2+3)(\beta^2+1)-1\}$是 $Nx^2+1=y^2$ 的根。

命题 64、65、67、68 原著的表述都很隐晦,经后人特别是 30 年代印度数学史家达生(B. Datta)的解释,就逐渐能为数学界接受。这四条命题系统阐述了二次不定方程

$$Nx^2+1=y^2 \qquad (*)$$

的整数解法。

命题 64 后人称为婆罗摩笈多引理,欧拉(1764)、拉格朗日(1768)又重新发现。其特殊情况:对于 $Nx^2+k=y^2$ 取 $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $k=k'$,则 $x=2\alpha\beta$, $y=\beta^2+N\alpha^2$ 是 $Nx^2+k^2=y^2$ 的根,这一结论称为婆罗摩笈多推论。

只要找到 $Nx^2+k=y^2$ 的解,特别是 $k=4$, $k=-4$(命题 67)时,立刻得到(*)的特解。运用摩罗摩笈多引理或推论可以得到另一组解。反复迭代就可以得到无穷多组整数解。

13. 婆什伽罗:《丽罗娃蒂》及其他

婆什伽罗于公元1114年生于印度南部的比杜尔,长期在印度文化中心乌贾因工作,曾任乌贾因天文台主持人,约1185年卒于乌贾因。

婆什伽罗的两部数学著作——《丽罗娃蒂》(Līlāvatī)和《算法本源》(Vija-Gaṅita),可能是他1150年完成的《天文系统极致》(Siddhāntasiromani)的两个部分。这两部著作被认为是中世纪印度数学的最高标志。

《丽罗娃蒂》据传是作者题献给自己的女儿的。全书13章,全面发展了自阿耶波多以来印度数学的各项成就。《丽罗娃蒂》中的几何部分,涉及直角三角形与相似三角形、球的面积与体积、棱台体积等等,这方面内容对于古代不同文明地区数学发展的比较饶有意义,这里适当选录。《丽罗娃蒂》对传统的印度三角学与不定分析作出了前人未及的推进,其中还记载了婆什伽罗在排列组合方面的先驱性结果。这些是我们摘引的重点。

对"零"的认识是印度数学的重大贡献之一。最早将零看作一个数并讨论其加减运算的印度著作是瓦拉哈米希拉(Varāhamihira,约505～587)的《太阳的知识》(Sūrya Siddhanta)。印度人起初亦用空位表示零,但在婆什伽罗时代以前已产生了"0"记号(瓜廖尔石碑,公元876年)。婆什伽罗在《算法本源》第1章第3节中对零的运算法则给出了完整的论述,特别是他已认识到零作除数的意义,我们一并摘录于后[13.2]。《算法本源》全书8章,除了零与正负数运算法则,还包含有二次不定方程$Nx^2+1=y^2$解法的改进、二次代数方程有两根之认识等突出成果。

[13.1]和[13.2]的全部引文译自H.T.Colebrooke:

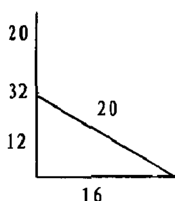
Algebra with Arithmetic and Mensuration from Sanskrit of Brahmagupta and Bhaskara, pp. 1～129, pp. 136～138. John Murray, London, 1817.

13.1.《丽罗娃蒂》

第 6 章　平面图形

147. 竹梢与根之间水平距离平方，除以竹长，商数加或减竹高。各折半，就是所折断的二部分长。他们分别代表直角三角形的弦与股。

148. 例　平地上一枝竹，高 32 尺。在某处被风吹折，竹梢触地离根 16 尺、数学家，你说：竹离根何处折断[①]？

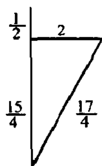


列式　竹高 32 尺，竹梢与根距 16 尺，这是直角边。

151. 勾的平方除以股弦差，差减去商，差加上商，二者之差、和各折半，分别是股、弦。

152. 朋友！池宽是勾，莲花露出水面值是弦股差，水深是股，求水深是多少？

153. 莲花蕾露出水面$\frac{1}{2}$尺，被风吹离中心 2 尺，数学家！快快计算水深是多少[②]？



列式　股弦差$\frac{1}{2}$尺，勾 2 尺按照法则所说，股及弦都能求出股$\frac{15}{4}$，这是水深花蕾高，即弦，是$\frac{17}{4}$。

156. 弦平方的二倍减去勾股和平方，将差开方、勾股和减去

---

① 《九章算术・商股》第 13 题："今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问：折者高几何？"术曰：以去本自乘，所得，以减竹高而半其余，即折者之高也。

② 《九章算术・勾股》第 6 题，"今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐。问：水深、葭长各几何？"术曰："半池方自乘，以出水一尺自乘，减之，余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长。"

平方根，又加上平方根。各自折半，分别是勾与股[①]

163～164、射影法则　在三角形中二边之和乘以二边之差，除以其底，底减去商，底加上商，折半。这是二边在底上的射影[②]。

164. 边长及其在底上射影各自平方差的平方根是底上的高。半底乘高是三角形的正确面积[③]。

165. 例　三角形的底是14，两边13，15。快告诉我，三角形的高是多少？边在底上的射影是多少？面积是多少？

答：按照法则所说，边在底上的射影是5，9，高是12。面积是84。

167. 法则　四边形四边长的和折半。分别减去各边长。四个差连乘积开方作为四边形面积是不准确的，但对于三角形是正确的[④]。

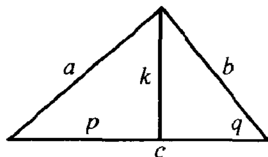
201. 法则　圆的直径乘以3927，除以1250，其商与圆周近似。[⑤]

---

① 设直角三角形勾、股、弦为a、b、c，则命题是说

$$a=\frac{a+b-\sqrt{2c^2-(a+b)^2}}{2},$$

$$b=\frac{\sqrt{2c^2-(a+b)^2}+a+b}{2}$$



② 这是说，对斜三角形ABC底上射影

$$p=\frac{1}{2}\{c-\frac{(a+b)(b-a)}{c}\}q=\frac{1}{2}\{c+\frac{(a+b)(b-a)}{c}\}$$

③ 这是说，斜三角形ABC底上的高$h=\sqrt{b^2-q^2}=\sqrt{a^2-p^2}$，它的面积$\triangle=\frac{1}{2}ch$。综合命题163，164所得，以三角形三边表示的面积公式与秦九韶《数书九章》(1247)卷5第2题三斜求积公式相同(二者都等价于希腊海伦公式)："以小斜幂、并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上。以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实。一为从隅，开平方，得积。"这就是所求三角形面积

$$\triangle=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2-(\frac{c^2-b^2+a^2}{2})^2}$$

④ 这是说，如四边形边长为a,b,c,d，$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$作为四边形面积公式是不准确的。作为三角形面积，例如取$d=0$，$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$则是正确的。

⑤ 这是说$\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416$，与刘徽《九章·方田》"圆田术"注相同。

或是乘以 22,除以 7,这是近似圆周,取作实际应用。

203. 法则　四分之一直径乘以圆周是圆面积。此值再乘以 4,是球表面积。此值,即球表面积乘以直径,除以 6,是准确球体积①。

206～207. 法则

弦与直径的和、差相乘　直径减去此乘积的平方根,折半,就是矢

直径减矢,乘以矢,此乘积的平方根二倍是弦。

半弦平方除以矢,商加上矢,就是圆的直径②。

209～211. 法则　103 923,84 853,70 534,60 000,52 055,45 922,41 031。乘以圆的直径。乘积除以 120000。其商依次是圆[内接正]三角形至九边形的边长③。

213.　法则[求近似弦长的简便法则]　弧长乘其余弧长,把乘积记在一边,圆周长平方的$\frac{1}{4}$乘以 5,减去所记乘积。又以所记

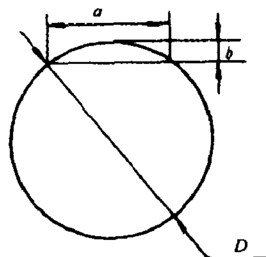
---

① 婆什伽罗在后文中对这里的球面积、体积公式给出了依赖于无限小分割过程的证明。

② 这里包含三个命题

$b=D-\sqrt{(D+a)(D-a)}$

$a=2\sqrt{(D-b)b}\quad D=\frac{a^2}{4b}+b$



③ 我们列表表示其精度,a_n 表示直径为 2 的圆内接正 n 边形边长

边长	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
《丽罗娃蒂》	0.866025	C.7071083	0.587783	0.5	0.4337916	0.3826833	0.3420201
真值	sin60°	sin45°	sin36°	sin30°	$\sin\frac{180°}{7}$	sin22.5°	sin20°
相对误差 10^{-7}	4.6	2.3	1.7	0	2120	0.3	2780

乘积除以差。商乘以直径的 4 倍，结果是[弧所对]弦长[①]。

215. 法则　圆周长的平方乘弦，再乘 5，除以弦加直径的 4 倍、圆周长平方的$\frac{1}{4}$减去这个商，圆周长折半，减去差的平方根，就

① 这是求正弦的近似公式。

公式是说在单位圆内弧 c 所对弦长(图 1)

$$\sin\theta\approx\frac{4c\bar{c}}{\frac{5}{4}C^2-c\bar{c}}\quad \theta\leqslant[0,\pi]$$

$$=f(\theta)=\frac{16(\pi-\theta)\theta}{5\pi^2-4(\pi-\theta)\theta}\qquad(1)$$

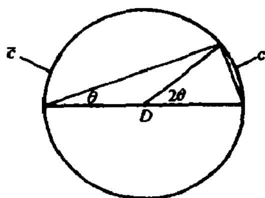


图　1

其中 C 为圆周长，c 为 c 的余弧：$\bar{c}=C-c$。

例如 C 所对圆周角 $\theta=30°$，它对的弦长 $\sin\theta$，代入公式，得$\frac{1}{2}$。在$[0,\pi]$区间公式所取得的正弦近似值，每间隔 10°，对照真值列表如下：

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$f(\theta)$	0	0.17525	0.34317	0.5	0.64183	0.76471	0.86486	0.93903	0.98461	1
真　值	0	sin10°	sin20°	0.5	sin40°	sin50°	sin60°	sin70°	sin80°	1
相对误差 10^{-2}	0	0.9	0.3	0	0.15	0.17	0.13	0.07	0.02	0

用计算机在同一直角坐标系中作出公式(1)左右两端曲线：前者用实线，后者用虚线，可以观察到二者上下波动，相差甚微，如示意图(图 2)。

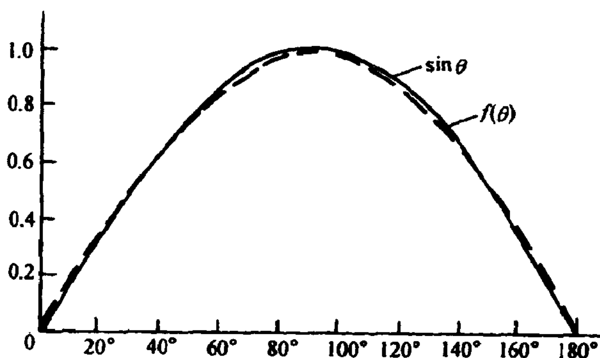


图 2

是[弦]所对弧[长]①。

第 7 章　挖土、立体体积

221. 法则　底面积与顶面积的和加上底与底长的和与底宽的和(二者)的乘积、除以 6,商就是平均面积,乘以深就是所求土方体积。体积的$\frac{1}{3}$是同底同高锥体体积②。

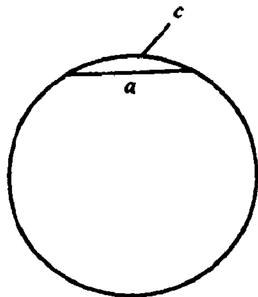
第 12 章　粉碎法③

248. 法则　首先作为研究粉碎法的准备:被除数、除数、加数都应被某一数约简。如果这个数能约尽被除数与除数,但不能约尽加数,则问题有误,即问题无解④。

---

① 这是从已知弦长 a 反算其所对弧长 c 的近似公式

$$c=\frac{C}{2}-\sqrt{\frac{C^2}{4}-\frac{5C^2a}{4(a+4D)}}$$

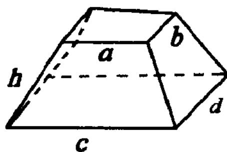


易于验证这是从 215 节公式(1)推得,说明中世纪印度数学家对回代、二次方程知识极为熟练,但公式没有化简又忽略其共轭弧,其正确答案应是

$$c=\frac{C}{2}\pm\frac{C}{2}\sqrt{1-\frac{5a}{a+4D}}。$$

② 这是长方台体积公式

$$V=\frac{h}{6}\{ab+cd+(a+c)(b+d)\}$$



这与《九章·商功》刍童术相当于说

$$V=\frac{h}{6}\{(2c+a)d+(2a+c)b\}等价。$$

③ 粉碎法即库塔卡,其解一次不定方程方法与《阿耶波多历数书·数学篇》32~33 节所说相像,与秦九韶《数书九章》大衍求一术也相像,但彼此有区别。

④ 我们设一次不定方程 $N=ax+R_1=by+R_2$,等价于 $ax+c=by$,$c=R_1-R_2$,即

$$y=\frac{ax+c}{b}\qquad(1)$$

这里称:a—— 被除数;b—— 除数;c—— 加数(当 $R_1>R_2$),减数(当 $R_1<R_2$);x—— 所求乘数;y—— 所求商。

在(1)式中 $a=a_1d$,$b=b_1d$,其中 $d=(a,b)$;如果 $c=c_1d$,248 节是说应先把(1)化为 $y=\frac{a_1x+c_1}{b_1}$后再进行运算,如果 $d\nmid c$ 则(1)无解。

249～251． 被除数、除数互除，最后一个余数是二者的公约数，二者除以这个公约数，就成为既约。既约的被除数、除数互除，直至被除数[下]的余数是 1。所得商数，从上而下地排列，加数记在下面，零记在最下面。

最后第二数乘紧接上面一数，加最下面一数，然后甩去最下面一数，继续[自下而上]这种运算，直至余下的一对数。

最上面一数累减既约被除数，其余数是所求商。另一数累减既约除数，其余数是所求乘数[①]。

---

① 这里有三层意思：其一，a，b 辗转相除，

$$
\begin{array}{l}
b)a(q_1 \\
\underline{-bq_1} \\
\quad r_1)b(q_2 \\
\quad \underline{-r_1q_2} \\
\qquad r_2 \\
\qquad \underline{\ddots} \\
r_{n-1})r_{n-2}(q_n \\
\quad \underline{-r_{n-1}q_n} \\
\qquad r_n
\end{array}
$$

当 $r_n=0$，$r_{n-1}=(a,b)$，就取

$$a_1=\frac{a}{r_{n-1}}$$

$$b_1=\frac{b}{r_{n-1}}$$

这与欧几里得算法同义，也与《九章·方田》更相减损术等价。

其二，如$(a,b)=1$就辗转相除到 $r_n=1$。把商自上而下地排列，逐次算出 b_i，法则是说：

商	b_i
q_1	$b_1=q_1b_2+b_3$
q_2	$b_2=q_2b_3+b_4$
$\vdots$	$\vdots$
q_i	$b_i=q_ib_{i+1}+b_{i+2}$
$\vdots$	$\vdots$
q_n	$b_n=cq_n+0=cq_n$
c	
0	

其三，所求乘数，$x=b_2-at$，$y=b_1-bt$，t 为任意自然数。

252. 当商数个数是偶数时，运算正确。如果是奇数时，所求得商和乘数必须从对应的[除数或被除数中]减去，其余数才是真正的商和乘数[①]。

第 13 章　排列与组合

267. 法则　从 1 开始，公差为 1，末项为数字个数的算术数列连乘积是[所求]数字的排列数。乘积除以数字个数，乘以数字的和。又把结果重复记在各数位上，相加。其和是所有排列各数的和。

268. 例　数字 2 与 8 有多少种排列？3，9，8 有多少种排列？从 2 到 9 八个数又有多少种排列？请快告诉我，这些数的和各是多少？

列式　例之一　2，8

位数是 2，从 1 到数字个数的乘积是 2，因此排列数是 2，这一乘积乘数字的和 10，除以数字个数 2，得 10，重复记在各数位上

---

① 这里指出　252 节法则如在 n 为偶数时正确，当 n 为奇数，则(1)式的通解应是

$x=at-b_2, y=bt-b_1$。

阿耶波多算法则 r_n 大小不限，但 n 奇偶有别，并规定 r_n 应乘一任择的数 t，使 $r_{n-1} \mid (r_nt\pm c)$。当 n 为奇时取+，偶时取−，商自上而下地排列，逐次算出 a_t，其中 $q=\dfrac{r_nt\pm c}{r_{n-1}}$

商	a_t
q_1	$a_1=q_1a_2+a_3$
q_2	$a_2=q_2a_3+a_4$
$\vdots$	$\vdots$
q_t	$a_t=q_ta_{t+1}+a_{t+2}$
$\vdots$	$\vdots$
q_n	$a_n=q_nt+q$
t	
q	

(1)式的通解是　$x=a_2-bt, y=a_1-at$。

秦九韶算法规定 $r_n=1$，且 n 为奇数，则所求　$x=-cj_n-bt$，其中

$j_n=q_nj_{n-1}+j_{n-2}, j_0=0, j_1=1, j_2=q_2, \cdots, j_t=q_tj_{t-1}+j_{t-2}$。

$$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$$

得 110,这是[所求]各数的和。

列式　　例之二　3,9,8

算术数列 1,2,3[连]乘积是 6,此为排列数。这一乘积乘以数字之和 20,是 120。除以数字个数 3,得 40,重复记在各数位上,相加

40
40
[40]

得 4440 是所求和。

列式　例之三　2,3,4,5,6,7,8,9

从 1 开始,公差是 1 的算术数列 1,2,3,4,5,6,7,8,其连乘积是 40320。以此连乘积乘数字之和 44,是 1774080,除以数字个数 8,结果是 221760,这一商重复记在各数位上,相加,其和是 2463999935360。

270. 法则　如前法求排列。但是要分别除以相同数字个数的排列。就是所求[重复]排列,所有排列各数的和求法如前。

271. 例　2,2,1,1 的排列有多少?数学家,如果你精通排列法则,请快告诉我,所有排列各数的和是多少?也请告诉我:4,8,5,5,5 相应的问题[结果]。

答　例1　6 种排列:2211,2121,2112,1212,1221,1122。这些数的和是 9999。

例 2　120 种排列。这些数的和是 1199988。

274. 如果数字之和已确定,从数字之和减 1 开始作递降数列,直至位数小 1 为止,除以 1,又除以 1+1,又除以 1+2,等等。法则为真,只限于数字的和小于位数加 9,数学如大海洋,浩瀚无涯,为避免冗长,只述其略。

275. 例　五位数数字之和是 13,问:有多少种不同排列?如果你知道,请告知结果!

这里,数字的和减1是12,从此开始作递降数列直至位数5小1,除以1,1+1,1+2等等$\frac{12}{1},\frac{11}{2},\frac{10}{3},\frac{9}{4}$。它们的乘积是$\frac{11880}{24}=495$,答数是495种排列。

277. 谁周览《丽罗娃蒂》全部篇章?在数学的殿堂里您将领略其欢快和愉悦。

13.2. 零的运算

《算法本源》第一章　算　法

第三节　零

12. 零的加减法则。一个量,不论是正的量还是负的量,加上零或减去零都保持不变。但如果这个量被零减,则得到相反的量。

13. 例．零加上或减去数正3或负3或零,答数几何?

列式．3,$\dot{3}$,0[1]。这些数加上零或减去零都保持不变:3,$\dot{3}$,0。

列式．3,$\dot{3}$,0。它们被零减就变成$\dot{3}$,3,0。

14. 法则。在零的乘法和其它运算[2]中,乘积为零;一个数被零乘也得零,但一个数被零除则变成一个分母为零的分数。

15. 例．请告诉我:零乘以2积是多少?零除以3商是多少?3除以零商是多少?零的平方?零的平方根?

列式．乘数2,被乘数零,积0。

乘数0,被乘数2,积0。

被除数0,除数3,商0。

被除数3,除数0,商为分数$\frac{3}{0}$。

这个分数,其分母为零,将表示一个无限大量。

16. 这个以零作分母而构成的量,无论加入或取出多少量,都

---

① 婆什伽罗以"·"号表示负数,$\dot{3}$即−3。

② "其他运算"指除法、平方与开平方,但下文中对运算结果则仅提到"乘积"。

不会发生任何变化;就像无穷而永恒的上帝,历经宇宙洪荒或创生时期而没有任何变化一样,虽然那时有各种生物被大量吞灭或产生。

(沈康身　译)

14. 阿尔·花拉子米:《代数学》

公元8世纪,阿拉伯数学随着阿拉伯帝国的兴盛而崛起。身处欧亚文化交汇地的阿拉伯学者们,广泛吸收古希腊、印度与中国的数学成果,使阿拉伯数学在融合东、西方数学的基础上取得了对文艺复兴以后欧洲数学的进步有深刻影响的发展。

中世纪阿拉伯最重要的数学活动中心是巴格达,阿拔斯王朝(750~1258)在那里设立的"智慧宫",聚集了大批学者,他们掀起著名的翻译运动,将欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯、丢番图、托勒密、婆罗摩笈多等古希腊、印度数学家的著作译成阿拉伯文,同时作出独创的贡献,其中最卓越的代表是阿尔·花拉子米。

阿尔·花拉子米(Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi,约780~850),出身于波斯北部的花拉子模城(在今乌兹别克斯坦境内),曾就学中亚古城默夫(Merv),813年后到巴格达任职,成为智慧宫领头学者之一;820年左右写成《代数学》一书,原名"Hisāb al-jabr W'al-muqubalah"。al-jabr 意为"还原",指把负项移至方程另一端"还原"为正项。al-muqubalah 意为"对消",指方程两端可消去相同的项或合并同类项。全名直译应为"还原与对消的科学"。书中第一次给出了一元二次方程的一般解法及几何论证,引进了移项、同类项合并等代数运算,还指出了二次方程无(实)根的条件等等。《代数学》约1140年被英国切斯特地方的罗伯特(Robert of Chester)译成拉丁文,译名"Liber algebrae et almucabala",作为一种标准的数学课本在欧洲行用了数百年,引导了16世纪意大利数学家在三、四次方程求解方面的突破。

花拉子米还有另一部数学著作《算术》，只留下一本残缺的拉丁文译稿，18世纪正式出版时定名《印度计算术》(Algoritmi de numero indorum)，"Algoritmi"为花拉子米的拉丁译名，现代术语"算法"(algorithm)即源于此。该书是第一本介绍印度十进位值制记数法的阿拉伯著作。

以下摘录《代数学》一书的有关内容，译自 L. C. Karpinski：Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Khowarizmi，Macmillan，New York，1915. Karpinski 仅据拉丁文本英译了第一部分。《代数学》的完整英译本是 F. Rosen：Algebra of Mohammed ben Musa，Oriental Translation Fund，London，1831，系直接根据阿拉伯文本译出。

……

此外，还要指出，还原与对消运算的对象有三种：根、平方和数①。数，无论是与根，还是与平方都没有任何比率关系。其次，根是由能够自乘的个体构成的，当它自乘时，或者是一个大于单位1的数，或者比单位1还小。平方是根与自身相乘的结果。

那么，这三种形式中每两种可以彼此相等。它们是：

平方等于根，

平方等于数，和

根等于数②。

---

① 这里"根"指未知数，"平方"指未知数的平方，"数"指某个常数，它们相当于现在代数学中的 x，x^2 和常数 C。把未知数叫根始于花拉子米。在一次问题中，他把未知数叫"东西"或"财产"。在二次问题中，他把未知数的平方叫"财产"，而把未知数本身叫"根"。

② 用现在代数学的符号表示，即方程 $ax^2=bx$，$ax^2=c$ 和 $bx=c$。

第一章 平方等于根[①]

下面就是"平方等于根"的一个例子:一个平方等于 5 个根。那么,该平方的根是 5;且这个根的平方是 25[②],当然,它的根等于 5。

另一个例子:$\frac{1}{3}$平方等于 4 个根。那么,该平方的根是 12 且 144 表示根的平方[③]。类似地,5 个平方等于 10 个根。因而 1 个平方等于 2 个根,且该平方的根是 2,4 表示这个平方[④]。

当平方的数目大于 1 或小于 1 时,可以用相同的方法把它化归为 1。对于根,要随着平方施行同样的运算。

第二章 平方等于数

用下面的方法来论证"平方等于数":一个平方等于 9。那么,9 就计量了由 3 所表示的根的平方。

平方的数目无论是多少,都要用同样的方法把它化归为 1。这就是说,如果有 2 个,或 3 个,或 4 个或更多的平方,它们及根所组成的方程将被化简为由 1 个平方及根所组成的方程。如果平方的数目小于 1,即如果是$\frac{1}{3}$,或$\frac{1}{4}$,或$\frac{1}{5}$个平方,也要按同样的方法处理。

例如,5 个平方等于 80。因此 1 个平方等于 80 的$\frac{1}{5}$,这就是 16[⑤]。或者取另一个例子:$\frac{1}{2}$个平方等于 18。因而 1 个平方等于

---

① 本章及以后各章的标题均由约翰·舒贝尔所加。约翰·舒贝尔(Johann Scheubel,1494~1570)是收藏罗伯特所译《代数学》拉丁文本的德国数学家。该译本现存纽约哥伦比亚大学图书馆。

② $x^2=5x, x=5, x^2=25$。

③ $\frac{1}{3}x^2=4x, x=12, x^2=144$。

④ $5x^2=10x, x=2, x^2=4$。

⑤ $5x^2=80, x^2=16$。

36[①]。对所有的平方数目，无论怎样多，都能用同样的方法化归为1个平方。或者，当平方的数目小于1时，也要把它化归为1。对于数，应随着平方施行同样的运算。

第三章　根等于数

下面是“根等于数”的一个例子：1个根等于3，因而9是这个根的平方。

另一个例子：4个根等于20，因而1个根是5；再看一个例子：$\frac{1}{2}$个根等于10。因而1个根等于20，当然，400表示根的平方。

正像我们所指出的，根、平方和数是彼此不同的。因此也可以由我们刚才讲述的三类对象组成包含三项的三种不同类型的方程。

它们是：一个平方和根等于数，
　　　　一个平方和数等于根，
　　　　根和数等于一个平方[②]。

第四章　平方和根等于数

下面是“平方和根等于数”的一个例子：1个平方和10个根等于39。因而，在此方程中的问题是：当平方是多少时，它与其10个根之和是39？解这类方程的方法就是取刚刚提到的根数的一半。在这个问题中，根的数目是10，因而取5，将其自乘，得25，把它同39相加，得64，开平方得8，从中减去根数之半，即5，余3。数3就表示所求平方的一个根。当然，平方本身是9。因而所要求的平方

---

① $\frac{1}{2}x^2=18, x^2=36$。

② $x^2+bx=c, x^2+c=bx, bx+c=x^2$。

是 9①。

类似地，无论所考虑的平方的数目是多少，都要化归为 1 个平方。同样，在化简平方数的时候，无论是数还是根，都可以用与化简平方数相同的方法进行化简。

下面是这种化简的一个例子：2 个平方和 10 个根等于 48。因而这个方程的问题可以这样提出：两个平方是多少时，它与 10 个根之和等于 48？首先必须把两个平方化简为 1 个，由于 1 个平方是 2 个平方的二分之一，我们马上就可得知，问题中的所有项都要除以 2，这就给出了“1 个平方和 5 个根等于 24”。它的意思是：1 个平方是多少时，它与其 5 个根之和等于 24？首先有必要记起上文给出的法则——取根数之半，这就是$2\frac{1}{2}$，令其自乘得 $6\frac{1}{4}$，加上 24，得 $30\frac{1}{4}$，开平方得 $5\frac{1}{2}$，从中减去根数之半，即 $2\frac{1}{2}$，余 3，这就是根，而平方则是 9②。

……

第六章　几何证明

关于方程的六种类型，我们在数的范围内已经讨论得很充分了。现在有必要用几何学方式来证明我们曾用数字解释过的问题的正确性。我们的第一个命题就是：1 个平方和 10 个根等于 39。

---

① $x^2+10x=39, 10\times\frac{1}{2}=5, 5^2=25, 25+39=64, \sqrt{64}=8, 8-5=3, x=3, x^2=9$。

对于一般方程　$x^2+bx=c$，其解为 $x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}-\frac{b}{2}$，当根是负值时，舍弃不取。

② $2x^2+10x=48, x^2+5x=24, 5\times\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}, (2\frac{1}{2})^2=6\frac{1}{4}$。$6\frac{1}{4}+24=30\frac{1}{4}, \sqrt{30\frac{1}{4}}=5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}=3, x=3, x^2=9$。对于一般方程 $ax^2+bx=c$，先化成方程为 $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$。如前，$x=\sqrt{(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}$。

其证明是构造一个具有未知边的正方形，且设这个正方形表示未知量的平方，它及其根都是我们所要求的。设有正方形 ab(图1)①，它的任一边都表示一个根。当我们把它的任一边增大某个倍

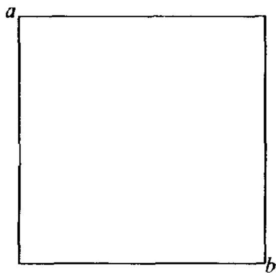


图 1

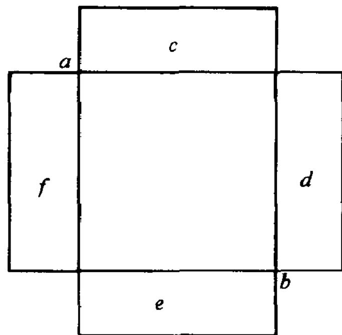


图 2

数时，其结果当然就表示相同倍数的根。因此，当我们考虑“一个平方和 10 个根”时，我们取数 10 的四分之一，并在正方形的每一个边上加出一个矩形面积，其长等于第一个正方形(ab)的边长，而宽是 $2\frac{1}{2}$，即 10 的四分之一。这样四块矩形面积被加在正方形 ab 上。(图 2)② 正如我们刚刚说过的，它们每一个的长都是正方形 ab 的边长(即一个根)，而宽是 $2\frac{1}{2}$。记这些面积为 c,d,e,f。由此我们得到四块不等边的面积，它们也是未知的，在此图形四角处面积的大小是 $2\frac{1}{2}$乘以 $2\frac{1}{2}$，为将其补足成一个较大的、完整的面积，我们添加四个乘积——每个为 $2\frac{1}{2}$乘$2\frac{1}{2}$，作出一个有较大面积的图形，面积总共增加了 25。

现在，显然表示未知数平方的第一个正方形(x^2)与周围的四

① 图 1，引自哥伦比亚大学所收藏的手稿。

② 此图引自哥伦比亚大学收藏的手稿。

块面积($10x$)之和是 39。当我们把它加上 25,即把四个较小的正方形放在正方形 ab 的四个角处时,一个较大的正方形 GH 完成了。(图 3)[①] 由此可知整个图形的面积是 64,它的根是 8,并且这个根就表示所完成的大正方形的一个边。因此,当我们从 8 中两次减去 10 的四分之一时,即减去位于大正方形 GH 顶端两个小正方形的边时,余 3。从 8 中减去 5 必定余 3,这就是第一个正方形 ab 的一个边。

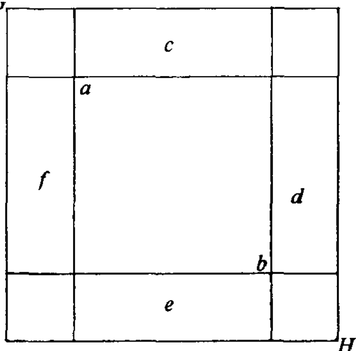


图 3

那么,3 就表示正方形 ab 的一个边,即所求未知数平方的一个根。且未知数的平方是 9。因此,我们取 10 的一半,将其自乘。当我们把这一乘积加上 39 时,大正方形 GH 就可以画成了[②]。要是缺少四角,所画的大正方形就不完整了。显然,任何一个数的四分之一自乘之后再乘以 4,得数与这个数的二分之一自乘的结果相同[③]。因此,如果将根数之半自乘,整个结果将等于或可以对消根数的四分之一自乘之后再乘以 4 的结果。……

(杜瑞芝 译　包芳勋 校)

① 此图引自哥伦比亚手稿。Karpinski 英译文中尚附有 Dresden 手稿中的插图,此处从略。

② 这就相当于我们现在配平方法的代数过程。

③ 即 $(\frac{a}{4})^2\times 4=(\frac{a}{2})^2$,由此,花拉子米在求根时取根数之半自乘,而在几何论证时,则取根的四分之一为边:作出四个小正方形加在原来的图形上。

15. 奥马·海亚姆:《代数学》

阿拉伯数学在花拉子米之后继续繁荣,直至13世纪,其间先后出现的重要数学家有巴塔尼(al-Battāni,约858～929),阿布-瓦法(Abul Wefa,940～998),比鲁尼(al-Birūni,973～约1050),奥马·海亚姆(Omar Khayyam,约1048～约1131)和纳西尔丁(Nasir al-Din,1201～1274),他们在代数方程求解、二项系数表、平行公设研究、三角学等方面有突出成就。

奥马·海亚姆生于波斯霍拉桑的内沙布尔(今伊朗境内),卒于同地。奥马曾长期担任依斯法罕(亦在今伊朗境内)天文台台长,并负责改革历法。他最著名的数学著作是《代数学》,原名"还原与对消问题论证"(Risāla fi'l—barāhin alā masā'il al-jabr wa'lmuqābala),完成于1100年左右,奥马将代数定义为"解方程的科学",进一步推进了代数方程理论,特别是创立了借助于圆锥曲线的三次方程几何解法。以下摘录该书有关部分,译自俄文版《奥马·海亚姆文集》(Омар Хайям: Трактаты, pp. 69～112, Москва, 1961. Б. А. Розенфельд 俄译),同时参照英文版 The Algebra of Omar Khayyam (New York, 1931, D. S. Kasir 英译)校对。奥马·海亚姆《代数学》最早的西文译本是 L'algèbre d'Omar Alkhayyami, (Paris, 1851, F. Woepcke 法译)。

还原与对消的方法是一门科学技艺,其对象是绝对的数和可测量的量。后者本身虽然是未知的,却可通过相关的已知"事物"来确定。这种事物或者是一个量,或者是一个只有通过细心研究才能确定的唯一关系。在这门技艺中,人们所寻求的是从已知量推导未

知量的关系，并进而发现上述的对象。这种技艺的完美体现在科学的方法之中，人们借助这种科学方法来确定数字的和几何的未知量。

所谓可测量的量，就是指连续量。根据《范畴篇》[①]的习惯用语和我在形而上学[②]方面的说明，连续量有四种，即线，面，体和时间。一些人把地点看作是面的再分割，它属于连续量的分割。但已有的研究否定了这种意见。事实上，地点只是某种环境下的面[③]，而环境的确定已超出目前研究领域的范围。还原与对消方法的研究对象通常不包括时间，但如果扩充到时间，那也是允许的。

数学家习惯于称与他们的技艺相联系的待定未知量为"东西"[④]，东西自乘得到的积为"平方"[⑤]，平方和东西的乘积为"立方"[⑥]，平方的自乘之积为"平方平方"，东西的平方与东西的立方之积为"立方平方"，立方自乘之积为"立方立方"等等，依此类推。由欧几里得的著作《几何原本》可知[⑦]，所有这些幂成连比例，即1比根[⑧] 等于根比平方，等于平方比立方。因此，一个数比一个根等于根比平方，等于平方比立方，等于立方比平方平方，等等，依此类推。

需要指出，只有很好地掌握欧几里得《原本》和《已知条件》(Data)，以及阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》的前两卷，才能够领会本书的内容。无论是谁，如果缺乏以上任何一种著作中的知识，就不能很好地理解我的工作。我在本书中尽量将自己限制于这三种著作的范围。

---

① 古希腊哲学家亚里士多德的著作。

② 指奥马本人的哲学著作，见 A. Christensen：Un Traite de metaphysique d'Omar Le monde Oriental，1908，vol. 1. pp. 1～16.

③ 关于"地点"的概念，亚里士多德在《物理学》第四卷中有论述，参阅苗力田主编《亚里士多德全集》第2卷，中国人民大学出版社，1991。

④ "shai"，相当于现在的 x。

⑤ *māl*，直译为"力量"，"权势"，表示 x^2。

⑥ ka'b，直译为"骰子"，表示 x^3。

⑦ 见 T. Heath，Elements of Euclid，1956，vol. Ⅱ. p. 390.

⑧ 即未知数，把未知数叫"根"始于花拉子米.

还原与对消问题的求解是借助于方程完成的。方程就是使一些幂等于另一些幂。如果数学家在测量问题中使用了平方平方，那只是一种借喻，并没有真实意义。因为把平方平方作为测量的结果是荒谬的，哪些量是可测量的呢？首先是一次量，即根或正方形的边；其次是二次量，即平面图形，正方形是可测量的，因为它是平面图形；最后是三次量，即立体，立方体是可测量的，因为它由六个正方形包围着。此外，再没有其他可测量的量了。平方平方，以及更高次幂的量，都不是可测量的量。如果说平方平方是可测量的，是指它的某些部分，而不是指它本身——这两件事完全不同。因此，平方平方无论从本质上还是偶然地都不是可测量的量。它既不像偶数，也不像奇数，奇、偶数偶然地被算作可测量的量是根据了它们作为不连续量来表示连续量的方式。

在数学家关于方程的著作中，方程式由以下四种几何量组成：绝对的数、边、平方和立方，解决了三种由数、边和平方组成的方程[①]。我们将论证求由四种幂组成的方程[②]的未知数的方法。这四种量都是可测量的：数，根，平方和立方。

利用圆的性质来论证方程的解——也就是说像欧几里得《原本》和《已知条件》这两部著作那样[③]——是容易实现的，但是只有利用圆锥曲线才能论证其解的方程，则涉及《圆锥曲线论》的前两卷。当问题的对象是绝对数时，无论是我们还是掌握这一技艺的任何人都不能论证这些类型的方程[④]。除非这些方程仅包含三个低次幂（即数、东西、平方）。也许在我们之后的什么人会填补这一空白。对于那些利用欧几里得著作就能论证的方程，我们将给出数值的证明，当问题的对象是数而不是可测量时，我们将放弃数值的证明而用几何方法进行论证。大家知道，欧几里得在他的第 5 卷中

---

① 指花拉子米解决的三种方程：$x^2+bx=a, x^2+a=bx, x^2=a+bx$

② 即由 a, x, x^2, x^3 组成的三次方程。

③ 利用圆的性质求解方程是指用直尺圆规作图就可以论证方程解的正确性。

④ 这句话表明，在海亚姆的时代，三次方程的数值解法，即根式解法已经有人研究。“问题的对象是绝对数”意即求方程的数值解。

给出关于量的比例性质的命题之后，又在第 7 卷中证明了关于数的相同命题。

包含四种幂的方程有的简单，有的复杂。简单的方程有 6 种：

1. 数等于根；
2. 数等于平方；
3. 数等于立方；
4. 根等于平方；
5. 平方等于立方；
6. 根等于立方①

其中有三种在数学家们的著作中已经提到②。他们认为，东西比平方与平方比立方一样。由此得出，含有平方和立方的方程等价于含有东西和平方的方程③。同样地，数比平方被认为与根比立方一样，但是他们没有用几何学证明这一点。设一个数等于立方，如果是数值问题，那么该立方体的棱只有利用以前关于立方数的排序知识才能得到④；如果是几何问题，就必须借助于圆锥曲线。

……

在论证完用圆的性质（即借助于欧几里得著作）可以求解的那些方程之后，现在我们着手研究需用圆锥曲线来论证的那些方程。它们共有 14 种类型⑤：1 种简单的：数等于立方，6 种 3 项的和 7 种 4 项的。

在这些研究之前我们首先介绍一些以《圆锥曲线论》为基础的命题，这可以帮助读者入门，同时使本书不再需要上面已提到的三部著作之外的东西。这三部著作有两部是欧几里得的《原本》与《已知条件》，另一部就是《圆锥曲线论》前两卷。

---

① 1. $x=a$，2. $x^2=a$，3. $x^3=a$，4. $x^2=bx$，5. $x^3=cx^2$，6. $x^3=bx$。

② 指 $x=a$，$x^2=a$ 和 $x^2=bx$。

③ 指 $x^3=bx^2$ 等价于 $x^2=bx$，$x=0$ 这个根在当时不予考虑。

④ 指通过查立方表求出一个数的立方根。

⑤ $a=x^3$，$x^3+bx=a$，$x^3+a=bx$，$bx+a=x^3$，$x^3+cx^2=a$，$x^3+a=cx^2$，$cx^2+a=x^3$，$x^3+cx^2+bx=a$，$x^3+cx^2+a=bx$，$x^3+bx+a=cx^2$，$cx^2+bx+a=x^3$，$x^3+cx^3=bx+a$，$x^3+bx=cx^2+a$，$x^3+a=cx^2+bx$。

[求作两线段，使它们在另两已知线段之间，且使这四条线段成比例。][1]

设 AB，BC 为两已知线段，它们相交于 B 且成直角。作一抛物线，使其顶点在 B，主轴和参数为 BC。于是得到抛物线 BDE，其顶点和主轴的位置已知，参数值也是给定的。它与直线 BA 相切，因为 B 是直角，且如《圆锥曲线论》第 1 卷命题 33 所示，它是坐标角。我们以类似方式作第二条抛物线：顶点在 B，主轴和参数为 AB，这将是抛物线 BDG，根据阿波罗尼奥斯著作第 1 卷命题 56，抛物线 BDG 与直线 BC 相切。所以这两条抛物线必相交。设交点为 D。因为两抛物线的位置已知，所以 D 的位置确定。从点 D 分别作 BC，AB 的垂线 DH，DF，据《已知条件》，它们的长度可以确定。由此断言：四条线段 AB，BH，BF，BC 成比例。（图 1）

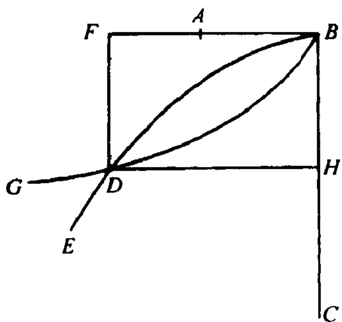


图 1

证明：因为线段 HD 是抛物线 BDE 的坐标线[2] 所以 HD 的平方等于 BH 与 BC 的乘积。从而，BC 比 HD（等于 BF）等于 BF 比 BH，DF 是抛物线 BDG 的坐标线，所以 DF（等于 BH）的平方等于 BA 与 BF 的乘积。由此可知，BF 比 BH 等于 BH 比 BA。所以这四条线段成连续比。同时因为 HD 是从已知点出发。按已知角度向已知直线所作的线段，所以它的长度已知。以类似方式可以证明 DF 的长度也是已知的。由此可知，线段 BH，BF 的长度已知，它们是线段 AB，BC 的中间比，即 AB 比 BH，等于 BH 比 BF，等于 BF 比 BC。这就是我们所要证明的。

〔已知具有平行边界和直角的立体[3] $ABCDE$ 的底边是正方形

① 即已知线段 a，b，求线段 x，y，使它们成连比例 $a:x=x:y=y:b$。
② 抛物线的垂直于主轴的弦。
③ 即长方体，以下同。

$ABCD$，设正方形 MH 已知，求作一以 MH 为底的且具平行边界和直角的立体，使它与已知立体 $ABCDE$ 相等〕(图 2)。

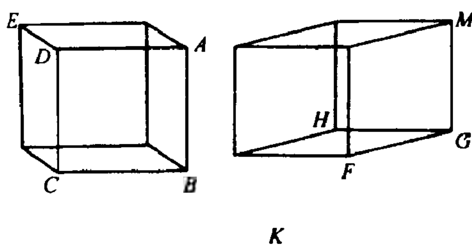


图 2

设 AB 比 MG 等于 MG 比 K，且 AB 比 K 等于 GF 比 DE。GF 垂直于正方形 MH 于 G 点，将此图形补充完整，使之成一立体 $MGFH$，则此立体等于已知立体。

证明：正方形 AC 比正方形 MH 等于 AB 比 K，所以正方形 AC 比正方形 MH，等于 GF（立体 $MGFH$ 的高）比 DE①（立体 $ABCDE$ 的高）。根据《原本》第 11 卷的命题②，由这两个立体的高成反比例，所以它们相等。

以下，每当我们提到"立体"时，都表示具平行边界和直角的立体。同样，当提到"平面图形"时，都表示具平行边和直角的平面图形③。

〔已知立体 $ABCD$ 以正方形 AC 为底。求作底为正方形，高等于已知线段 EF，并与已知立体 $ABCD$ 相等的立体〕(图 3)

设 EF 比 BD 等于 AB 比 K，取 AB 和 K 的比例中项 EL，作 EL 垂直于 EF，将此图形补充为平面图形。然后，取 EH 垂直于平面图形 FL 且等于 EL，将此图形补充完整，使之成一立体 $HEFL$。

---

① 从 $AB:MG=MG:K$ 可得知 $AB^2:MG^2=AB:K$，即 $AC:MH=AB:K=GF:DE$。

② 命题 34："相等的平行六面体，其底与高成反比例；而且，底与高成反比例的平行六面体彼此相等。"

③ 即长方形。

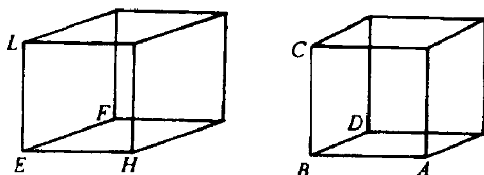


图 3

可以断言，立体 F ——底为正方形 HL，高为已知线段 EF——的体积与已知立体 D 的体积相等。

证明：正方形 AC 比正方形 HL 等于 AB 比 K。所以正方形 AC 比正方形 HL 等于 EF 比 BD。因为这两个立体的底与高成反比，所以它们等积。这就是所要求证的。

现在我们就转向简单方程的第 3 种：立方等于数。

设一数等于立体 $ABCD$——底为单位正方形，高的长度为此数，求作一与之相等的立方体。取线段 AB，BD 的两个比例中项①。那么正如我们已经证明的，它们在数值上已知。设其为 E，G。作 FH 等于 E，并以其为棱作立方体 $FHKL$。那么这个立方体和它的棱在数值上是已知的。可以断言这一立方体等于立体 D。(图4)

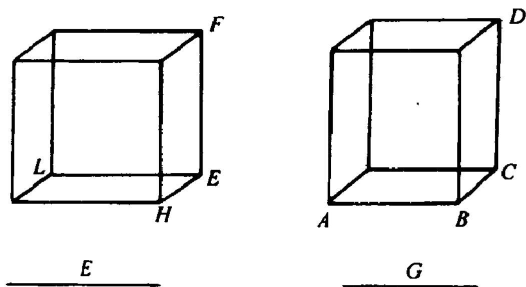


图 4

证明：正方形 AC 与正方形 FK 是 AB 比 HK 的重比②，而

① 设为 x，y，则有 $AB:x=x:y=y:BD$。

② "AB 比 HK 的重比"即 $(AB:HK)(AB:HK)$ 或 $AB^2:HK^2$。

AB 比 HK 的重比等于 $AB:G$，此四线段[①]中的第一个比第三个等于 HK（第二个）比 BD（第四个）[②]。所以，立体 L 和 D 的底（FK，AC）与它们的高（HK，BD）成反比例。由此可知这两个立体相等。这就是我们所求证的。

（杜瑞芝 译　包芳勋、李文林 校）

---

① 指 AB、E、G、BD。

② 由 $AB:E=E:G=G:BD$ 可得 $AC:FK=(AB:HK)^2=(AB:E)^2=AB:G=E:BD=HK:BD$。

日　本

16. 关孝和：《括要算法》及其他

17世纪以前的日本数学主要承袭中国古算传统。约在17世纪晚期，关孝和创立了独特的“和算”。和算后又经关孝和的学生建部贤弘（1664～1739）等人推进，对日本数学的发展有重要影响。

关孝和，1642年左右出生于郡马县一武士家庭，曾长期在江户（今东京）任德川幕府贵族家臣，1708年卒于江户。关孝和共有著作20余种，多数以抄本形式秘传，生前发表的仅有《发微算法》（1674），身后又由学生整理出版了一部《括要算法》（1709）。关氏和算著作充分体现了东方数学特色，但以笔算代数代替筹算与珠算，取得了一系列包含近世数学萌芽的成果，最主要的如：“圆理”（径、弧、矢间关系的无穷级数表示）、行列式概念、垛积（无穷级数求和）与伯努利数、极值条件、方程判别式等。作为示例，以下摘录《括要算法》中垛积术和与圆理有关的球体积论证两部分，以及关孝和另一部著作《解伏题之法》关于行列式的论述，分别节译自平山谛、下平和夫、広瀬秀雄编：《关孝和全集》，pp. 271～370，pp. 142～158，大阪教育图书株式会社，大阪，1974。

16.1. 垛积术

关孝和在《括要算法》中求乘方垛积（自然数前n项p次幂之

和 $\sum_{r=1}^{n} r^p$)时，先于伯努利(Jacob Bernoulli)设想该幂和是 n 的 $p+1$ 次多项式，并认为这多项式 $S(n)=a_0n^{p+1}+a_1n^p+a_2n^{p-1}+\cdots\cdots+a_pn$ 诸项系数与二项系数三角形第 $p+1$ 层系数有对应关系，从而得出了现今所谓的"伯努利数"。

卷元　垛积总术

圭垛演段：置基数自乘，得数与一个相消得式，置圭垛原法，内减一级数，余一为实，以二级数为法。实如法而一。得二分之一为加，是为逐乘二级之取数也。

平方垛演段：置基数再自乘，得数与一个相消得式。置二级数，取二分之一，得一个二分个之一，一级数二位相并，共得二个二分个之一。通分内子得五，寄位，置平方垛原法三，以分母二相乘得六，内减寄位，余一为实。置三级数，以分母二相乘得六，为法。实

如法而一，得六分之一为加。是逐乘三级之取数也……①

（沈康身 译）

---

① 从垛积总术所记十种演段可以推知关孝和熟知以下关系：

$$(p+1)S(n)=n^{p+1}=G_1\binom{p-1}{1}n^p+G_2\binom{p+1}{2}n^{p-1}+\cdots+G_p\binom{p+1}{p}n$$

当 $n=1$ 时

$$p+1=1+G_1\binom{p+1}{1}+G_2\binom{p+1}{2}+\cdots+G_p\binom{p-1}{p}$$

借此可以得到一系列递推公式

当 $p=1$ 时，$G_1=(2-1)\div 2=\frac{1}{2}$，

$p=2$ 时，$G_2=\{3-(1+3G_1)\}\div 3=\frac{1}{6}$，

$p=3$ 时，$G_3=\{4-(1+4G_1+6G_2)\}\div 4=0$，

$p=4$ 时，$G_4=\{5-(1+5G_1+10G_2+10G_3)\}\div 5=-\frac{1}{30}$，

……

除 G_1 外均与今之伯努利数相合，关孝和以 $p=1,2,3,\cdots,11$ 所对应的递推关系，用中算习惯名称：$p=1$ 圭垛，$p=2$ 平方垛，$p=3$ 立方垛，……，$p=11$ 十乘方垛。对每一种垛求和都作详细推导。他得到结果：$a_i=G_i\frac{\binom{p+1}{i}}{(p+1)}$，列表如下：

$p+1$ \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0									
3	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	0								
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0							
5	$\frac{6}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{10}{30}$	0	$\frac{1}{30}$							
6	$\frac{2}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	0	0					
7	$\frac{6}{42}$	$\frac{21}{42}$	$\frac{21}{42}$	0	$\frac{7}{42}$	0	$\frac{1}{42}$	0				
8	$\frac{3}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{14}{24}$	0	$\frac{7}{24}$	0	$\frac{2}{24}$	0	0			
9	$\frac{10}{90}$	$\frac{45}{90}$	$\frac{60}{90}$	0	$\frac{42}{90}$	0	$\frac{20}{90}$	0	$\frac{3}{90}$	0		
10	$\frac{2}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{15}{20}$	0	$\frac{14}{20}$	0	$\frac{10}{20}$	0	$\frac{3}{20}$	0	0	
11	$\frac{6}{66}$	$\frac{33}{66}$	$\frac{55}{66}$	0	$\frac{66}{66}$	0	$\frac{66}{66}$	0	$\frac{33}{66}$	0	$\frac{5}{66}$	0
12	$\frac{2}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{22}{24}$	0	$\frac{33}{24}$	0	$\frac{44}{24}$	0	$\frac{33}{24}$	0	$\frac{10}{24}$	0

16.2. 球体积与圆理

“圆理”意指与圆有关的算法，以无穷级数为基础，计算各种曲线与曲面所围成的面积与体积等，包含了积分思想。《括要算法》中关于球体积的论证，充分体现了这一思想。

卷贞

求立圆积术　玉法

假如有立玉、贯一尺，则问玉积若干？

答曰：玉积五百二十三寸三百三十三十九分寸之二百零三。

立圆率解第一、求初积　径一尺立圆、厚各二分、截五十片，以径矢弦术各得弦幂，相并上下弦幂，以厚乘之，得数折半之，各得截积。通计为初积。

第二、求中积　径一尺立圆、厚各一分。截一百片，以径矢弦术各得弦幂。相并上下弦幂，以厚乘之，得数折半之，各得截积，通计为中积。

第三、求后积　径一尺立圆、厚各五厘，截二百片，以径矢弦术各得弦幂，相并上下弦幂，以厚乘之，得数折半之，各得截积，通计为后积。

第四、求约积　列初积与中积于左，以中积与后积差相乘之，得数寄位，列初积与中积差，内减中积与后积差，为法。以中积相乘之。得数加入寄位，共得数为实。如法而一。不满者，各以五厘约之，得六百六十六寸三分寸之二，为约积也。

第五、求定积　列约积，通分内子，以圆周率相乘之，得数为实。列圆周率、四之，亦以分母三乘之，得数为法。实如法而一，不满者各以四约之，得五百二十三寸三百三十九分寸之二百零三，为

定积也①。

（沈康身 译）

---

① 立玉、立圆都是指球体。和算惯于用等间隔平面截割球体，以圆台近似体积公式估计球的体积。关孝和立圆积术，对于贯(直径)1尺的球积求法先分割求出初积、中积、后积。这相当于说，图中球大圆半径$OE=R$，取m等分，从直角三角形关系：径$2OB_i=2OB_{i+1}=2R=d$；矢$D_iE=\frac{i}{m}R, D_{i+1}E=\frac{i+1}{m}R$，弦$A_iB_i$、$A_{i+1}B_{i+1}$，$(i=0,1,2,\cdots,m-1)$三者关系是

$(\frac{A_iB_i}{2})^2=R^2-(\frac{m-i}{m})^2R^2$。把球台视为上下底平均为底，等间隔为高的圆柱，而所求球体积视为这些圆柱和。

$$j_n=j_{2m}\approx 2\sum_{i=0}^{24}\frac{\pi}{4}\frac{A_iB_i^2+A_{i+1}B_{i+1}^2}{2}\cdot\frac{R}{m}$$

关孝和称 $A_iB_i^2$ 为弦幂。

$\frac{A_iB_i^2+A_{i+1}B_{i+1}^2}{2}\cdot\frac{R}{m}$为截积。他求出初积$j_{50}=666.4$，中积$j_{100}=666.6$，后积$j_{200}=666.65$（立方寸）。文中所说约积为$j_{100}+\frac{(j_{200}-j_{100})(j_{100}-j_{50})}{(j_{100}-j_{50})-(j_{200}-j_{100})}=\frac{2}{3}$（立方尺）

$$(1)$$

而所求球体积称为

$$定积=\frac{\pi}{4}约积-\frac{\pi}{6}（立方尺） \qquad (2)$$

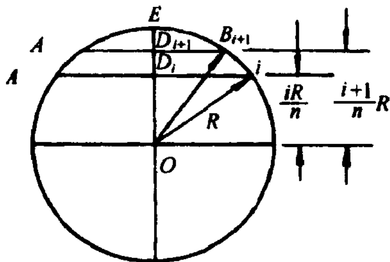
显然，如直径为d、关氏的算法将导出

$$V_{球}=\frac{\pi}{6}d^3 \qquad (3)$$

关氏在其著作中曾多次运用相当于今称外推极限法以提高结果的精度，当他发现截积和数列相邻项差之比为常数，他设计

$$约积=j_{100}+(j_{200}-j_{100})+(j_{400}-j_{200})+\cdots$$
$$=j_{100}+(j_{200}-j_{100})(1+r+r^2+\cdots)$$

并用他常用的增约术 $1+r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}$ 使



$$约积=j_{100}+(j_{200}-j_{100})\frac{1}{1-r},$$

又以 $r=\frac{j_{200}-j_{100}}{j_{100}-j_{50}}$代入，就得正确公式(2)，相应得(3)是可以理解的。

16.3. 行列式

《解伏题之法》写于1683年，其中首次提出了行列式的概念及算法。关孝和行列式理论后又经其弟子修正、发展。和算家们的行列式理论产生于高次方程的消元问题，这与西方行列式理论的背景颇为异趣。在欧洲，行列式概念最早是莱布尼茨(1693)等结合线性方程组求解而提出。范德蒙德(A. T. Vandermonde，1772)给出了第一个独立的行列式理论阐述。以下是《解伏题之法》中行列式算法的“生尅”、“寄消”两部分。

解伏题之法

生尅第五，附交式、斜乘得换式，①，验芟治②之后，求生尅③也。

假如，

一式	乙	甲
二式	丁	丙

④

---

① 从两个方程：$\begin{cases}a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0\\ b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m=0\end{cases}(m\geqslant n)$导出等价的 n 个 $n-1$ 次方程：

$$\begin{cases}A_{11}+A_{12}x+\cdots+A_{1n}x^{n-1}=0\\ A_{21}+A_{22}x+\cdots+A_{2n}x^{n-1}=0\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ A_{n1}+A_{n2}x+\cdots+A_{nn}x^{n-1}=0\end{cases}$$

叫做换式。从这 n 个方程中消去 x，得到

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22}\cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2}\cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=0,$$和算行列式算法导源于此。

② 芟、治是行列式展开计算之前，所进行的方程初等变换，目的是简化行列式展开计算。某行(列)约去一个非零公因式叫芟，约去一个非零公因数叫治。

③ 求生尅，即求行列式展开之各项，生相当于正项，尅相当于负项。

④ 这里是两个一次方程，相当于二阶行列式。原书为纵式——中国古代天元式，现为排版方便改为横式，以下各阶及展开式均如此。关孝和的展开法是Sarrus法。每组前面标有生尅的元素(干支、或宿名)乘积项是展开式各项，后面为等于0的项。

乙丙相乘	生	0	一	甲丙

丁甲相乘	尅	0	一	甲丙

假如，

一式	丙	乙	甲
二式	己	戊	丁
三式	壬	辛	庚

丙戊庚相乘	生	0	一	乙戊庚	四	甲戊庚
乙辛甲相乘	生	0	二	甲戊辛	五	甲丁辛
壬乙丁相乘	生	0	三	乙丁辛	六	乙丁庚

丙辛丁相乘	尅	0	三	乙丁辛	五	甲丁辛
己乙庚相乘	尅	0	一	乙戊庚	六	乙丁庚
壬戊甲相乘	尅	0	二	甲戊辛	四	甲戊庚

假如，

一式	房	氐	亢	角
二式	斗	箕	尾	心
三式	危	虛	女	牛
四式	娄	奎	壁	室

房箕女室相乘	生	0	一	氐箕女室	五	亢箕女室	九	角箕女室
斗虛壁角相乘	尅	0	二	角箕虛壁	六	角尾虛壁	十	角心虛壁
危奎亢心相乘	生	0	三	亢心虛奎	七	亢心女奎	十一	亢心牛奎
娄氐尾牛相乘	尅	0	四	氐尾牛奎	八	氐尾牛壁	十二	氐尾牛室

房奎尾牛相乘	生	0	四	氐尾牛奎	十三	亢尾牛奎	十七	角尾牛奎
斗氐女室相乘	尅	0	一	氐箕女室	十四	氐尾女室	十八	氐心女室
危箕壁角相乘	生	0	二	角箕虛壁	十五	角箕女壁	十九	角箕牛壁
娄虛亢心相乘	尅	0	三	亢心虛奎	十六	亢心虛壁	廿	亢心虛室

房奎女心 剋 相乘	0	廿一	氐心女奎	七	亢心女奎	廿五	角心女奎
斗氐壁牛 生 相乘	0	廿二	氐箕牛壁	八	氐尾牛壁	廿六	氐心牛壁
危箕亢室 剋 相乘	0	廿三	亢箕虚室	五	亢箕女室	廿七	亢箕牛室
娄虚尾角 生 相乘	0	廿四	角尾虚奎	六	角尾虚壁	廿八	角尾虚室

房虚壁心 生 相乘	0	廿九	氐心虚壁	十六	亢心虚壁	十	角心虚壁
斗奎亢斗 剋 相乘	0	卅	亢箕牛奎	十三	亢尾牛奎	十一	亢心牛奎
危氐尾室 生 相乘	0	卅一	氐尾虚室	十四	氐尾女室	十二	氐尾牛室
娄箕女角 剋 相乘	0	卅二	角箕女奎	十五	角箕女壁	九	角箕女室

房箕壁牛 剋 相乘	0	廿二	氐箕牛壁	卅三	亢箕牛壁	十九	角箕牛壁
斗虚亢室 生 相乘	0	廿三	亢箕虚室	卅四	亢尾虚室	廿	亢心虚室
危奎尾壁 剋 相乘	0	廿四	角尾虚奎	卅五	角尾女奎	十七	角尾牛奎
娄氐女心 生 相乘	0	廿一	氐心女奎	卅六	氐心女壁	十八	氐心女室

房虚危室 剋 相乘	0	卅一	氐尾虚室	卅四	亢尾虚室	廿八	角尾虚室
斗奎女角 生 相乘	0	卅一	角箕女奎	卅五	角尾女奎	廿五	角心女奎
危氐壁心 剋 相乘	0	廿九	氐心虚壁	卅六	氐心女壁	廿六	氐心牛壁
娄箕亢牛 生 相乘	0	卅	亢箕牛奎	卅三	亢箕牛壁	廿七	亢箕牛室

右各逐式交乘而得生剋也。虽然相乘之数位繁多而不易见，故以交式斜乘代之。

交式：①

从换三式起换四式，从换四式起换五式，逐如此换二式换三式者，不及交式也，顺逆共递添一，得次，乃式数奇者皆顺，偶者顺逆相交也。

换三式

顺	顺	顺
一	二	三

换四式

顺	逆	顺	逆
一	二	三	四
一	三	四	二
一	四	二	三

换五式

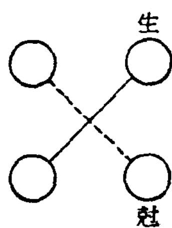
一	二	三	四	五
一	三	二	五	四
一	四	五	二	三
一	五	四	三	二
一	二	四	五	三
一	四	二	三	五
一	五	三	二	四
一	三	五	四	二
一	二	五	三	四
一	五	二	四	三
一	三	四	二	五
一	四	三	五	二

斜乘②：

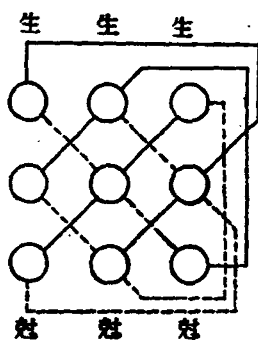
交式各布之，从左右斜乘而得生尅也，若当空级者除之换式数奇者，以左斜乘为生，右斜乘为尅；偶者，左斜乘、右斜乘共生尅相交也。

① 按对角线乘积展开，三阶以上得不到全部项，必须先逐次交换行列式的行（列），然后再斜乘。关孝和的交式，指方程组中方程顺序的交换，表中汉文数字表示方程序号，相当于行列式之行号。关孝和的“换五式”，有失误，松永良弼《解伏题交式斜乘谚解》(1715)予以纠正。

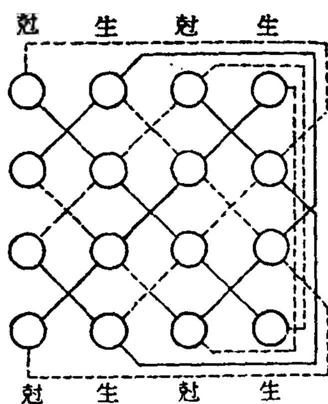
② 关孝和斜乘各项符号与现今行列式展开符号相反，其五阶之“换五式”亦不正确。应当是交互生尅。1798 年，石黑信由与管野元健分别予以订正。



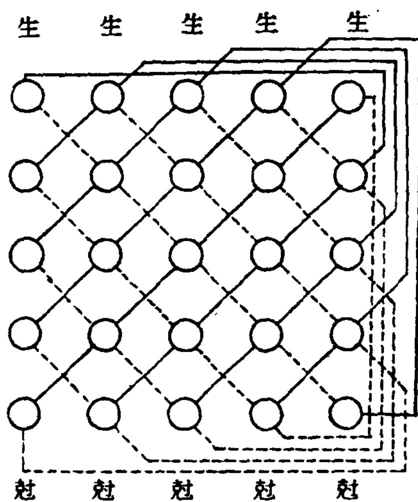
换二式



换三式



换四式



换五式

（徐泽林 译）

Ⅱ. 古代希腊



17. 三大几何作图问题

希腊数学一般指从公元前 600 年至公元 600 年间，活动于希腊半岛、爱琴海区域、马其顿与色雷斯地区、意大利半岛、小亚细亚以及非洲北部的数学家所创造的数学。地中海沿岸优越的地理条件，使希腊的商人、学者能够方便地来往于埃及、巴比伦等地，学习到那里的文化知识。但希腊数学并非完全因袭埃及与巴比伦传统，而是发展形成了迥然不同的风格、体系。

现在所知最早的希腊数学家是泰勒斯(Thales of Miletus，约 625 B.C. ～547 B.C.)，他领导的米利都学派开希腊命题证明之先河。其后的毕达哥拉斯(Pythagoras，约 560 B.C. ～480B.C.)学派，提出"万物皆数"，力主数学抽象。希腊数学传统正是始于此二人，但他们都无著作传世。

公元前 5 世纪上半叶希波战争以后，希腊数学开始走向繁荣，学派林立，最主要的有智人学派(亦称巧辩学派)、柏拉图(Plato，427 B.C. ～347 B.C.)学派(柏拉图的学生有欧多克索斯[Eudoxus of Cnidus，约前 4 世纪]和亚里士多德[Aristotle，384 B.C. ～322 B.C.]等)，以芝诺(Zeno，约 496B.C. ～430B.C.)为代表的埃利亚学派和以德谟克利特(Democritus，约 460 B.C. ～370 B.C.)为代表的原子论学派等。其中智人学派以提出并致力研究三大几何作图问题而著称。

三大几何作图问题是：倍立方、化圆为方和三等分任意角。由于限制了只能使用直尺和圆规，使问题变得难以解决并富有理论魅力，刺激了许多学者投身研究。早期对化圆为方作出贡献的有安纳萨戈拉斯(Anaxagoras，约

500 B. C. ～428 B. C.)，希波克拉底(Hippocrates of Chios，前 5 世纪下半叶)、安蒂丰(Antiphon，约 480 B. C. ～411 B. C.)和希比亚斯(Hippias of Elis，400 B. C. 左右)等人；从事倍立方问题研究的学者也很多，欧托基奥斯(Eutocius，约 480～?)曾记载了柏拉图、埃拉托塞尼(Eratosthenes，约 276 B. C. ～195 B. C.)、阿波罗尼奥斯(Apollonius，约 262 B. C. ～190 B. C.)和帕波斯(Pappus，约 300～350)等人共 12 种作图方法；尼科米迪斯(Nicomedes，约 250 B. C. 左右)、帕波斯等人则给出了三等分角的方法。当然所有这些研究都无法严格遵守尺规作图的限制，但它们却引出了大量的新发现(如圆锥曲线、许多三、四次曲线和某些超越曲线等)，对整个希腊几何产生巨大影响。三大作图问题自智人学派提出之时起，历经二千余年，最终被证明不可能只用直尺、圆规求解(1837 年旺策尔[P. L. Wantzel]首先证明了倍立方和三等分任意角不可能只用尺规作图；1882 年林德曼[C. L. F. Lindemann]证明了 π 的超越性，从而确立了尺规化圆为方的不可能)。

关于三大几何作图问题的起源和古代探讨，在智人学派之后一些希腊学者的著述中留有记载，这些分散片断的记载，成为了解早期希腊数学的珍贵资料。以下选录部分内容，各节作者与出处将随文注明。

17.1. 倍立方

A. 赛翁论倍立方问题的可能起源[①]

埃拉托塞尼在其题为《柏拉图》的著作中写道：当先知得到神

① 赛翁(Theon of Smyrna)，活动于公元 125 年前后，有著作《数学评述》(Mathematical Exposition)传世。这里摘录其片断，转译自 I. Thomas (eds.)：Selections Illus trating the History of Greek Mathematics，vol. I. p. 257. Harvard University Press，1939.

的谕示向提洛岛的人们宣布，为了止息瘟疫，他们必须建造一个祭坛，体积是现有那个祭坛的两倍时，工匠们试图弄清怎样才能造成一个立体，使其体积为另一个立体的两倍，为此他们陷入深深的困惑之中，于是他们就这个问题去请教柏拉图。柏拉图告诉他们，先知发布这个谕示，并不是因为他想得到一个体积加倍的祭坛，而是因为他希望通过派给他们这项工作，来责罚希腊人对于数学的忽视和对几何学的轻视。

B. 普罗克洛斯论希波克拉底对这一问题的简化。①

“简化”是将一个问题或定理转化成另一个已知的或已构造出的问题或定理，使得原命题清晰明了。例如，为解决倍立方问题，几何学家们转而探究另一问题，即依赖于找到两个比例中项。从那以后，他们致力于如何找到两条已知线段间连比例中的两个中项的探索。据说最先有效地简化这些困难作图的是希俄斯的希波克拉底②，他还化月牙形为方，并作出许多几何学上的其他发现。说到作图，如果曾经有过这方面的天才的话，这个人就是希波克拉底。

C. 欧托基奥斯阐述倍立方问题的早期历史及一种机械解法③

埃拉托塞尼致托勒密王④

① 普罗克洛斯(Proclus，410～485)，希腊晚期数学家，主要著作《欧几里得几何原本第一卷译注》流传至今，这里摘录其片断，译自 G. R. Morrow 英译本 Proclus' Commentary on the First Book of Euclid's Element, p. 167, Princeton University Press, 1970.

② 设 a,b 是两条已知线段，x,y 是其间的两个比例中项，即 $a:x=x:y=y:b$，则有 $a^3:x^3=a:b$，若令 $b=2a$，则有 $x^3=2a^3$，这表示以 x 为边的立方体的体积是以 a 为边的立方体体积的两倍。

③ 欧托基奥斯在其《阿基米德“论球与圆柱”注释》中列出了求两已知线段间两个比例中项的12种解法。这里节录该书所载“埃拉托塞尼致托勒密王的一封信”，译自英译本 Eutocius' Commentary on Archimedes' Sphere and Cylinder, in M. R. Cohen and I. E. Drabkin (eds.): A Source Book in Greek Science, pp. 62－66, Harvard University Press, 1948.

④ Wilamowitz 1894 年提出这封信是伪造的，但其中所涉及的历史不容置疑，信中所叙述的证明和作图都确为埃拉托塞尼的工作。信中的国王是 Ptolemy Euergetes，埃拉托塞尼是其子的私人教师。

历史上传说，古代的一位悲剧诗人描述了弥诺斯为格劳科斯修坟，当弥诺斯发现坟墓的每一边都是一百尺时，他说："你们设计的坟墓作为皇族成员的安息地太小了，将体积加倍。不要破坏形状，赶快将坟墓的每边加倍。"

显然这是一个错误。因为如果边长加倍，表面积变成原来的四倍，体积变成八倍。

当今的几何学家们也在探索将已知立方体的体积加倍而不改变其形状的途径。这个问题以二倍立方体著称，即已知一个立方体，他们想办法将其加倍。当长期以来所有的探索都徒劳无功时，希俄斯的希波克拉底最先发现，如果能找到一个方法，作出已知的两条线段间连比例中的两个比例中项，其中长线段是短线段的两倍，立体就被加倍。这样他的难点被分解成另一个不太复杂的问题。

后来传说，某些提洛岛的人为遵循先知的谕示，想办法将一个祭坛加倍，他们陷入了同样的困境。于是他们派代表去请求学园中柏拉图学派的几何学家帮他们找到解法。这些几何学家们积极地着手解决这个问题，求两条已知线段间的两个比例中项。据说塔林敦的阿尔希塔斯应用半圆柱体得到一种解法，而欧多克索斯用了所谓的"曲线"。所有解决这一问题的人在寻找演绎的证明方面是成功的，但除门奈赫莫斯[①]（尽管他只是很勉强地做到）外，他们都不能用行之有效的方法证明这个作图。

现在我发现了一种简单方法，通过应用一种器具，不仅能得到两线段间的两个比例中项，而且能得到所需要的许多比例中项。应用这一发现，我们能够将任何表面是平行四边形的已知立体化成立方体，或者将其从一种形状变成另一种形状，而且也可以作出一个与已知立体形状相同，但体积大一些的立体，也就是保持相似性。……

---

① 门奈赫莫斯（Menaechmus，公元前4世纪中叶）利用圆锥曲线作出两条已知线段间的两个比例中项，是希腊数学中运用圆锥曲线的最早记录。

17.2. 化圆为方

A. 安蒂丰化圆为方①

安蒂丰画了一个圆,并作一个能够内接于它的多边形。我们假设这个内接图形是正方形。然后他将正方形的每边分成两部分,从分点向圆周作垂线,显然这些垂线平分圆周上的相应弧段。接着他从垂线与圆周的交点向正方形边的端点连线,于是得到四个以线段(即正方形的边)为底的三角形,整个内接的图形现在成为八边形。他以同样的方法重复这一过程……,得到的内接图形为十六边形。……他一再地重复这一过程,随着圆面积的逐渐穷竭,一个多边形将内接于圆,由于其边极微小,将与圆重合。正如我们从《原本》中所知,既然通常我们能够作出一个等于任何已知多边形的正方形,那么注意到与圆重合的多边形与圆相等,事实上我们就作出了等于一个圆的正方形。②

B. 布里松化圆为方③

……他作一个正方形外切于圆,作另一个正方形内接于圆,在这两个正方形之间作第三个正方形。然后他说这两个正方形(即内接和外切正方形)之间的圆及中间的正方形都小于外部的正方形且大于内部的正方形,他认为分别比相同的量大和小的两个量相等。因此他说圆被化成正方形。④

---

① 记录在辛普利休斯《亚里士多德〈物理学〉评注》中。辛普利休斯(Simplicius,?~549),希腊晚期数学家、哲学家。这里的片断译自 A. Wasserstein 英译本 Commentary on Aristotle's Physics, Phronesis,4(1959),p. 93.

② 辛普利修斯认为安蒂丰违反了"一条线段与圆周不可能重合"的几何原理。

③ 记载于亚历山大《亚里士多德〈诡辩的批驳〉评注》中,布里松(Bryson of Heraclea,公元前450年左右),早期希腊数学家。亚历山大(Alexander of Aphrodisias)则是活动于公元200年左右的希腊数学家。这里的片断译自英译本. Commentary on Aristotle's Sophistical Refutations, in M. R. Cohen and I. E. Drabkin (eds.):A Source Book in Greek Science, p. 54. Harvard University Press,1948.

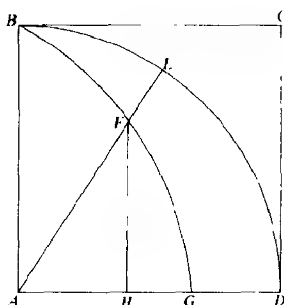
④ 亚里士多德和注释者都认为布里松的方法是一种诡辩。

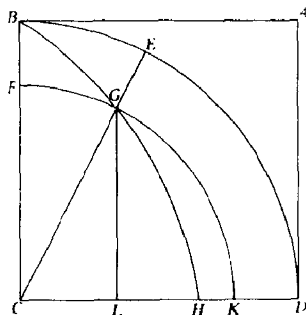
C. 帕波斯论割圆曲线①

为了化圆为方，狄诺斯特拉托斯和尼科米迪斯以及其他一些近代的几何学家应用了某种曲线，此曲线以其特殊的性质而得名，被他们称为割圆曲线②，它是以这种方式形成的。

设 *ABCD* 为一正方形，以 *A* 为圆心画弧 *BED*，*AB* 如此运动：点 *A* 保持固定，而 *B* 沿弧 *BED* 移动；而且令总是与 *AD* 保持平行的 *BC* 随点 *B* 沿 *BA* 移动，在等同的时间里，匀速运动的 *AB* 通过角 *BAD*(即点 *B* 通过弧 *BD*)，*BC* 通过线段 *BA*(即点 *B* 移过 *BA* 的长度)。显然 *AB* 和 *BC* 将同时与线段 *AD* 重合。在运动过程中，线段 *BC*，*BA* 将互相交于某一点，此点随它们连续地变化位置，在线段 *BA*，*AD* 及弧 *BED* 间描绘出一条凹曲线，如 *BFG*，它似乎对于求得等于已知圆的正方形有帮助。其主要性质是：如果向圆周作任意线段，如 *AFE*，则整条弧与 *ED* 之比等于线段 *BA* 与 *FH* 之比，这从曲线形成的方式来看是显然的③。

……





① 帕波斯《数学汇编》摘录，取自英译本 Mathematical Collections，IV. I. Thomas (ed.)：Selections Illustrating the History of Greek Mathematics，vol. I. pp337－347，Harvard University Press，1939.

② 数学史家认为智人学派的主要人物希皮亚斯在设法三等分一角时发明了割圆曲线。

③ 帕波斯接着详细论证了与点 F 有关的这个比值，此处从略。

如果 $ABCD$ 是一个正方形，BED 是以 C 为圆心的圆上的一段弧，而 BGH 是以上述方式形成的割圆曲线，可以证明弧 DEB 与线段 BC 之比等同于 BC 与线段 CH 之比。

……

显然，如果取一线段作为线段 HC，CB 的第三比例项，它将等于弧 BED，而且这条线段的四倍等于整个圆周。得到一条等于圆周的线段，就能轻而易举地作出一个正方形，使之等于圆本身。因为正如阿基米德所证明的，圆的周长和半径所作成的矩形是圆的两倍。

D. 希波克拉底化月牙形为方[①]

(1)化月牙形为方，最先由希波克拉底研究，而且看来以正确的形式陈述出来。由于与圆有密切联系，它似乎属于命题中罕见的一类。因此我们将详细地论述并对它们进行全面研究。希波克拉底建立了他的出发点，且将其作为第一个对他的目的有用的定理加以陈述，即相似弓形之比与它们底的平方之比相等。他通过证明直径上的正方形之比等同于圆之比证明这一定理。

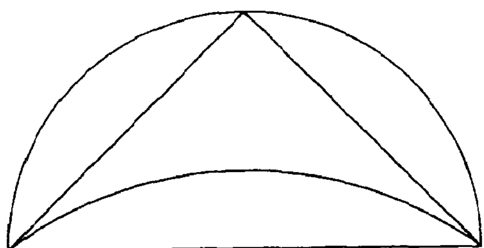
(2)先证明了这一点后，他描述了怎样可能将一个外圆周等于半圆的月牙形化为正方形。他是这样做的，作一个外接于等腰直角三角形的半圆，在底边上作一个弓形，使它相似于三角形的边所截得的弓形。由于底边上的弓形等于边上弓形之和，因此当底边上弓形之上的三角形的一部分加上两个弓形时将等于三角形。所以已证明的等于三角形的月牙形，就可以化为正方形。将一个半圆作为月牙形的外圆周，希波克拉底用这种方法轻而易举地化月牙形为方。

(3)接下来，按顺序他假定外圆周大于半圆，通过作一个三边彼此相等的梯形得到：梯形两平行边中较大的一条，其上的正方形

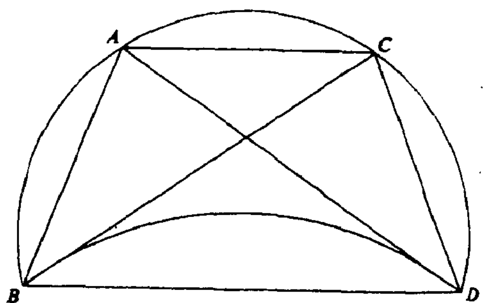
---

① 记载在辛普利休斯《亚里士多德〈物理学〉评注》中。本译文译自 I. Thomas (ed.): Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, vol. I. pp. 239～249, Harvard University Press, 1939.

等于其余每边上正方形的3倍。然后使梯形内接于一个圆，且使其最大边外接一个弓形，相似于三个相等的边与圆所形成的弓形。如



果画出梯形的对角线，显然所说的弓形大于半圆。因为这条对角线对着梯形的两边，它上面的正方形定然大于其他两边中一条边上的正方形的2倍。因此 BC 上的正方形大于 BA 或 AC 上的正方形的2倍，CD 也是如此。所以梯形的最大边 BD 上的正方形，必定小于对角线与所说的最大边和对角线对着的其余一边上的正方形和。因为 BC，CD 上的正方形大于 CD 上的正方形的3倍，BD 上的正方形等于 CD 上的正方形的3倍，因此梯形最大边所对的角是锐角。所以其上的弓形大于半圆，这个弓形是月牙形的外圆周。



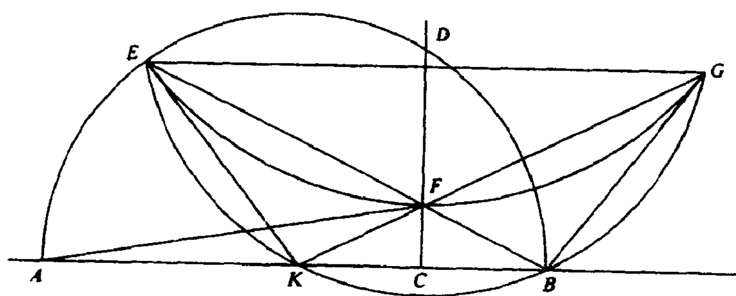
(4)如果外圆周小于半圆，希波克拉底应用下面的基本作图也解决了这个问题。设有一圆，直径为 AB，圆心为 K。设 CD 平分 BK 并与 BK 成直角。设线段 EF 位于 AB 与圆周之间并趋向于

B,以使它上的正方形等于一条半径上的正方形的 $1\frac{1}{2}$倍。作 EG 平行于 AB,连接 KE,KF。连接线段 KF 并将其延长与 EG 相交于 G,再连接 B 与 F,B 与 G,那么显然 EF 的延长线将通过 B——因为假设 EF 趋向于 B——且 BG 等于 EK。

如此,我认为梯形 $EKBG$ 能内接于一个圆。

下面设一个弓形外接于一个三角形 EFG,显然 EF,FG 上的弓形相似于 EK,KB,BG 上的弓形。

这样就形成了一个外圆周为 $EKBG$ 的月牙形,它将等于由三个三角形 BFG,BFK,EKF 组成的直线形。因为月牙形之内,直线形中由线段 EF,FG 形成的弓形之和等于直线形之外 EK,KB,BG 所形成的弓形。每一个内部弓形是每一个外部弓形的 $1\frac{1}{2}$倍,因为根据假设,EF 上的正方形是半径,即 EK,KB 或 BG 上的正方形的 $1\frac{1}{2}$倍。又因为月牙形由三个弓形与直线形减去两个弓形组成——直线形包含两个弓形而不是三个——而这两个弓形之和等于三个弓形之和,因而月牙形等于直线形。



(5)于是希波克拉底化每种月牙形为方,不仅保证将外圆周等于半圆的月牙形化为方形,而且将外周大于及小于半圆的月牙形化为方形。

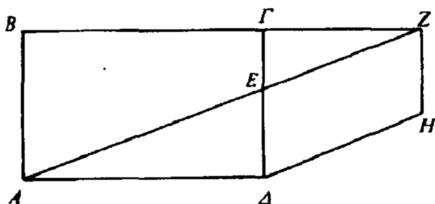
17.3. 三等分角

帕波斯论三等分一个角的方法[①]

……当早期的几何学家们用平面方法探究上述关于角的问题时[②]，他们无法解决它，因为这个问题从性质来看是一个立体问题[③]。由于他们还不熟悉圆锥曲线，因此陷于困惑。但是他们后来借助于圆锥曲线用以下描述的斜伸法将角三等分。

用斜伸法解

已知一个直角平行四边形 $AB\Gamma\Delta$，延长 $B\Gamma$，使之满足作出 AE，使得线段 EZ 等于已知线段。



假设已经作出这些，并作 ΔH，HZ 平行于 EZ，$E\Delta$。由于 ZE 已知且等于 ΔH，所以 ΔH 也已知。Δ 已知，所以 H 位于在适当位置给定的圆周上。由于 $B\Gamma$，$\Gamma\Delta$ 包含的矩形已知且等于 BZ，$E\Delta$ 包含的矩形[欧几里得. Ⅰ.43][④]，所以 BZ，$E\Delta$ 包含的矩形已知，即 BZ，ZH 包含的矩形已知，故 H 位于一双曲线上。但它也位于在适当位置给定的圆周上，所以 H 已知。[⑤]

……

---

① 译自英译本 Pappus' Mathematical Collection, in I. Thomas(ed.):Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, vol. I. pp. 353～361, Harvard University Press, 1939.

② 指将一个已知的直线角分成三个相等的部分。

③ 帕波斯关于几何问题类型的论述参见本书[22]"帕波斯《数学汇编》"节选。

④ 在任何平行四边形中，对角线两边的平行四边形的补形彼此相等。

⑤ 接下来帕波斯给出了综合。

证明了这一点后，用下述方法三等分已知直线角。

首先设 $AB\Gamma$ 是一个锐角，从直线 AB 上任一点作垂线 $A\Gamma$，并作平行四边形 ΓZ，延长 ZA 至 E，由于 ΓZ 是一个直角的平行四边形，在 EA，$A\Gamma$ 间作线段 $E\Delta$，使之趋于 B 且等于 AB 的两倍——上面已经证明这是可能的，我认为 $EB\Gamma$ 是已知角 $AB\Gamma$ 的三分之一。

因为设 $E\Delta$ 被 H 平分，连接 AH，则三条线段 ΔH，HA，HE 相等，所以 ΔE 是 AH 的两倍。但它也是 AB 的两倍，所以 BA 等于 AH，角 $AB\Delta$ 等于角 $AH\Delta$。由于 $AH\Delta$ 等于 $AE\Delta$，即 $\Delta B\Gamma$ 的两倍，所以 $AB\Delta$ 等于 $\Delta B\Gamma$ 的两倍。如果我们平分角 $AB\Delta$，那么就三等分了角 $AB\Gamma$。

用圆锥曲线的直接解法

这种立体轨迹提供了另一种三分已知弧的方法，不必用到斜线。

设过 A，Γ 的直线在适当的位置给定，从已知点 A，Γ 作折线 $AB\Gamma$，使得角 $A\Gamma B$ 是 ΓAB 的 2 倍，我认为 B 位于一双曲线上。

因为设 $B\Delta$ 垂直于 $A\Gamma$ 并且截取 ΔE 等于 $\Gamma\Delta$，当连接 BE 时，它将与 AE 相等。设 EZ 等于 ΔE，所以 $\Gamma Z=3\Gamma\Delta$。现在置 ΓH 等于$\frac{1}{3}A\Gamma$，所以点 H 将给定，剩下部分 AZ 等于 $3H\Delta$。

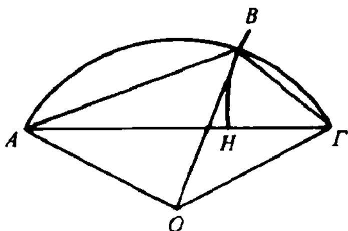
由于 $BE^2-EZ^2=B\Delta^2$，且 $BE^2-EZ^2=\Delta A\cdot AZ$，所以 $\Delta A\cdot AZ=B\Delta^2$，即 $3A\Delta\cdot\Delta H=B\Delta^2$，所以 B 位于以 AH 为横轴，$\sqrt{3}AH$ 为共轭轴的双曲线上。显然 Γ 点在圆锥曲线顶点 H 截取的线段 ΓH 是横轴 AH 的二分之一。

综合也是清晰的。因为要求分割 $A\Gamma$ 使得 AH 是 $H\Gamma$ 的 2 倍，就要过 H 以 AH 为轴画共轭轴为$\sqrt{3}AH$ 的双曲线，并且证明它将使我们作出上面提到的具有 2 倍之比的角度。如果 A，Γ 两点是弧的端点，那么以这种方法画的双曲线截得已知圆上的一段弧的三分之一就易于理解了。①

（高　嵘译　梁宗巨校）

---

① 设 $A\Gamma$ 为以 O 为圆心的圆上的一段弧。设 $A\Gamma$ 被 H 按 $AH=2H\Gamma$ 分割。以 AH 为横轴，$\sqrt{3}AH$ 为共轭轴作双曲线，设双曲线交圆弧于 B。那么根据帕波斯的命题，$\angle B\Gamma A=2\angle BA\Gamma$。所以它们的 2 倍相等，或 $\angle BOA=2\angle BO\Gamma$，这样 OB 三等分 $\angle AO\Gamma$ 及弧 $AB\Gamma$。



18. 欧几里得:《几何原本》

从公元前338年希腊诸邦被马其顿控制,至公元前30年罗马征服最后一个希腊化国家托勒密王国的三百余年,史称希腊数学"黄金时代"。这一时期希腊数学的中心亚历山大城,学者云集,先后出现了欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯三大数学家,他们的成就标志着希腊古典数学的巅峰。

关于欧几里得的生平我们所知甚少。根据有限的记载推断,他早年就学于雅典,公元前300年左右应托勒密一世(Ptolemy I)之邀到亚历山大,成为亚历山大学派的奠基人。欧几里得写过不少数学、天文、光学和音乐方面的著作,最重要的莫过于《几何原本》(Elements)。欧几里得用公理法对当时的数学知识作了系统化、理论化的总结。《几何原本》全书共13卷,卷I提出5条公理、5条公设作为基本出发点。书中给出119个定义和465条命题及证明,构成了历史上第一个数学公理体系。

《几何原本》原作早已失传,现在的各种版本都是根据后人的修订、注释重新整理出来的,其中公元4世纪赛翁(Theon of Alexandria)的修订本是后来传世的《几何原本》的主要底本。《几何原本》可以说是数学史乃至科学史上流传最广、影响最大的著作之一。除早期的希腊文、阿拉伯文和拉丁文抄本外,仅从1482年第一个拉丁文印刷本在意大利威尼斯问世以来,已用各种文字出版一千多版。目前最流行的英译本是T. L. Heath:The Thirteen Books of Euclid's Elements (Cambridge, 1908)。以下选录《几何原本》中最有代表性的定义、公理、公设,以及比例论、不可通约理论、穷竭法、立方体理论的部分命题,转译自I. Thomas(ed.):Selections Illustrating the Histo-

ry of Greek Mathematics, vol. I. pp. 437～479. Harvard University Press, 1939.

18.1. 基本原则

《几何原本》卷 I

定义

1. 点是没有部分的。

2. 线是没有宽度的长。

3. 线的末端是点。

4. 直线是与其上的点相平齐的线①。

5. 面是只有长度和宽度的。

6. 面的边缘是线。

7. 平面是其上的线均匀平放着的面。

8. 平面角是在一平面内但不在一直线上的两条相交线的相互倾斜度。

9. 当包含角的线是直线时，这个角叫做平角。

10. 当一条直线竖立在另一条直线上，使得相邻的角彼此相等时，每一个相等的角是直角，竖立在另一条直线上的直线称作垂直于它所竖立的直线。

11. 钝角是大于直角的角。

12. 锐角是小于直角的角。

13. 边界是物体的尽头。

14. 图形是被一个或多个边界包围的。

15. 圆是由一条曲线包围的平面图形，从其内一点出发落在曲线上的所有线段彼此相等。

16. 这个点叫做圆心。

17. 圆的直径是过圆心且在两个方向上止于圆周的任意线段。这样的线段将圆二等分。

---

① I. Thomas 等学者认为欧几里得这样的陈述不能算是令人满意的定义。

18. 半圆是直径和由它截得的圆周所围成的图形。半圆的中心与圆心相同。

19. 直线形是由线段围成的。三边形是由三条线段围成的，四边形是由四条线段围成的，多边形是由多于四条的线段围成的。

20. 在三边形中，等边三角形是三条边相等的，等腰三角形是只有两条边相等的，不等边三角形是三条边都不等的。

21. 此外，在三边形中，直角三角形有一个直角，钝角三角形有一个钝角，锐角三角形有三个锐角。

22. 在四边形中，正方形是各边相等且各角都是直角的；长方形是角为直角但边不全相等的；菱形是边相等但角不都是直角的；长菱形是对边和对角彼此相等但边不全相等，且角不是直角的；除这些之外的四边形称作不规则四边形。

23. 平行直线是在同一平面内向两方无限延伸，而在两个方向上彼此不相交的直线。

公设

1. 假定从任意一点到任意一点可作一直线。

2. 一条有限直线可不断延长。

3. 以任意中心和直径可以画圆。

4. 凡直角都彼此相等。

5. 若一直线落在两直线上所构成的同旁内角和小于两直角，那么把两直线无限延长，它们将在同旁内角和小于两直角的一侧相交。

公理

1. 等于同量的量彼此相等。

2. 等量加等量，和相等。

3. 等量减等量，差相等。

4. 彼此重合的图形是全等的。

5. 整体大于部分。

18.2. 比例论

《几何原本》卷 V.

定义

1. 当一个较小量能度量一个较大量时,较小量是较大量的部分。

2. 当较大量能被较小量度量时,较大量是较小量的倍量。

3. 比是两个同类量之间的一种大小关系。

4. 当一个量成倍增加后就能够大于另一个量,则说这两个量有一个比。

5. 有四个量,如果第一量与第三量,第二量与第四量分别乘以等倍的量,前者的等倍量以相应的顺序分别同样地大于、等于或小于后者的等倍量,则说第一量比第二量与第三量比第四量有相同比。①

6. 将有相同比的量称作成比例的量。

7. 在四个等倍量中,当第一量的倍量大于第二量的倍量,但第三量的倍量不大于第四量的倍量时,则说第一量比第二量大于第三量比第四量。

8. 一个比例最少要有三项。

9. 当三个量成比例时,则说第一量比第三量是第一量比第二量的二次比。②

10. 当四个量成比例时,第一量比第四量称作第一量比第二量的三次比,无论有几个量成比例都如此类推。③

---

① 设有 a,b,c,d 四个量,a 与 c,b 与 d 分别乘以同样的倍数 m,n,若 $ma \gtreqless nb$ 可推出 $mc \gtreqless nd$,则说 $a:b=c:d$。

② 若 $a:x=x:b$,则 $\frac{a}{b}=\frac{a^2}{x^2}$,$a:b$ 等于 $a:x$ 的二次比。

③ 这四个量一定成连比。若 $a:x=x:y=y:b$,则 $a:b=a^3:x^3$,a 比 b 是 a 与 x 的三次比。

11. 对应量这个术语用于前项对于前项及后项对于后项中。

12. 更比指前项比前项，且后项比后项。①

13. 反比指后项作前项，前项作后项。②

14. 合比是指将前项与后项合起来作为一项比后项。

15. 分比是指用前项与后项的差比后项。

16. 换比是指用前项比前项与后项的差。

17. 有几个量，又有数目相同的另一组量，两个两个取成相同的比例，则第一组量中首量比末量如同第二组量中首量比末量，这时就产生了首末比；换言之，去掉中间项，取两头的项。③

18. 有三个量，又有数目相同的另一组量，当第一组量中的前项比后项如同第二组量中的前项比后项时，第一组量中的后项比余下的一项如同第二组量中余下的一项比前项，这时就产生了调动比例。④

18.3. 不可通约理论

《几何原本》卷 X

定义

1. 能被同一公度量尽的量称为可公度的量，不能被任何公度量尽的量称为不可公度的量。

2. 当一些线段上的正方形被同一面积量尽时，这些线段是平方可公度的，当这些线段上的正方形不能被任何作为公度的面量尽时，这些线段就是平方不可公度的。

3. 由这些假设可以证明，存在无穷多用一条指定的线段可公度或不可公度的线段，一些仅是长度可公度或不可公度。另外一些

---

① 若 $a:b::A:B$，则 $a:A::b:B$。

② 若 $a:b::A:B$，则 $b:a::B:A$。

③ 若 $a,b,c\cdots m,n$ 是一组量，$A,B,C\cdots M,N$ 是另一组，且 $a:b=A:B$，等等，直至 $m:n=M:N$，则 $a:n=A:N$，证明在卷 V.22 中给出。

④ 若 a,b,c 和 A,B,C 是两组量，且 $a:b=B:C$，则比例式 $b:c=A:B$ 被称作调动的。接下来有 $a:c=A:C$。证明在卷 V.23 中给出。

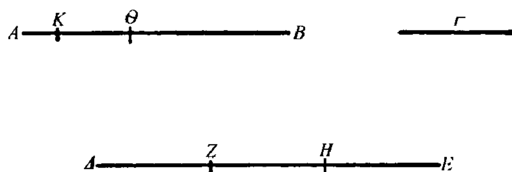
也是平方可公度或不可公度。那么,把这条指定的线段称为有理的,则与它可公度的线段,无论是长度和平方可公度还是仅为平方可公度,叫做有理线段,而那些与它不可公度的线段叫做无理线段。

4. 把指定线段上的正方形称作有理的,则与它可公度的那些面叫做有理的,与它不可公度的那些面叫做无理的,并且把构成无理面的线段称为无理的,即如果这些面为正方形就指其边,如果这些面为其他直线形,则指与其相等的正方形的边。

命题 1

给出两个不相等的量,如果从较大的量中减去一个大于它的一半的量,再从余下的量中减去一个大于它的一半的量,如此继续下去,必得到某个余量小于给定的较小量。

设 AB,Γ 是两个不相等的量,其中 AB 是较大的;我认为如果从 AB 中减去一个大于它的一半的量,再从所余量中减去一个大于其半的量,如此继续下去,将会得到某个小于 Γ 的量。



因为若将 Γ 增加若干倍,它总会大于 AB[卷 V. 定义 4]。设将 Γ 若干倍,ΔE 是它的倍数,大于 AB,将 ΔE 分成等于 Γ 的几部分 ΔZ,ZH,HE,从 AB 中减去大于它的一半的 $B\theta$,再从 $A\theta$ 中减去大于其半的 θK,如此继续下去,直至 AB 上的分割数等于 ΔE 上的分割数。

设 AK,$K\theta$,θB 是等于 ΔZ,ZH,HE 的分割数,因为 ΔE 大于 AB,且从 ΔE 中减去小于其半的 EH,而从 AB 中减去了大于其半的 $B\theta$,所以余量 $H\Delta$ 大于余量 θA。又因为 $H\Delta$ 大于 θA,从 $H\Delta$ 中减去其半 HZ,从 θA 中减去大于其半的 θK,所以余量 ΔZ 大于余

量 AK。现在 ΔZ 等于 Γ，所以 Γ 大于 AK。因此 AK 小于 Γ。

所以存在 AB 的余量 AK 小于给出的较小量，即 Γ；证毕。——

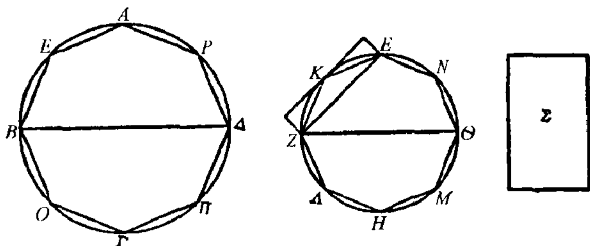
如果从大量中累减所余之半，也可以类似地证明这个结果。①

18.4. 穷竭法

《几何原本》卷Ⅻ.2.②

圆与圆之比等于其直径上的正方形之比。

设 $AB\Gamma\Delta$，$EZH\Theta$ 是两个圆，$B\Delta$，$Z\Theta$ 为它们的直径；我认为圆 $AB\Gamma\Delta$ 比圆 $EZH\Theta$，如同 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\Theta$ 上的正方形。



因为如果圆 $AB\Gamma\Delta$ 比圆 $EZH\Theta$ 不同于 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\Theta$ 上的正方形，那么 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\Theta$ 上的正方形就会等于圆 $AB\Gamma\Delta$ 比上某个小于圆 $EZH\Theta$ 的面积或某个大于圆 $EZH\Theta$ 的面积。首先设那个比的较小面积为 Σ。设正方形 $EZH\Theta$ 内接于圆 $EZH\Theta$，则内接正方形大于圆 $EZH\Theta$ 的一半，因此，如果过点 E，Z，H，Θ 作圆的切线，则正方形 $EZH\Theta$ 是圆外切正方形的一半，而圆小于外切正方形，所以内接正方形 $EZH\Theta$ 大于圆 $EZH\Theta$ 的一半。设点 K，Λ，M，N 平分圆弧 EZ，ZH，$H\Theta$，ΘE，连接 EK，KZ，$Z\Lambda$，ΛH，HM，$M\Theta$，ΘN，NE，所以三角形 EKZ，$Z\Lambda H$，$HM\Theta$，ΘNE 中的

① 这个重要定理因阿基米德用过它而通常被称作阿基米德原理。但它无疑属于欧多克索斯。欧几里得主要用它来证明《原本》Ⅻ.2。

② 欧德莫斯认为这个重要定理是希波克拉底的发现。

每一个都大于它所在弓形的一半，因此，如果过点 K,Λ,M,N 作圆的切线并在线段 $EZ,ZH,H\Theta,\Theta E$ 上作平行四边行，三角形 $EKZ,Z\Lambda H,HM\Theta,\Theta NE$ 中的每一个都是它所在平行四边形的一半，而它所在的弓形小于平行四边形，所以三角形 $EKZ,Z\Lambda H,HM\Theta,\Theta NE$ 中的每一个都大于它所在弓形的一半。然后，平分余下的圆弧，连接线段，如此继续做下去，我们就会得到一些小于圆 $EZH\Theta$ 与面积 Σ 之差的弓形。因为在卷 10 的第 1 个定理中已经证明，给定两个不相等的量，如果从较大量中减去大于其半的量，再从余下量中减去大于其半的量，如此继续，总可得到某个量小于给定的较小量。设得到了这样的弓形，且圆 $EZH\Theta$ 中 $EK,KZ,Z\Lambda,\Lambda H,HM,M\Theta,\Theta N,NE$ 上的弓形小于圆 $EZH\Theta$ 超出面积 Σ 的部分。所以余下的部分，多边形 $EKZ\Lambda HM\Theta N$ 大于面积 Σ。同样，设有一个内接于圆 $AB\Gamma\Delta$ 的多边形 $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ 相似于多边形 $EKZ\Lambda HM\Theta N$，所以 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\Theta$ 上的正方形如同多边形 $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ 比多边形 $EKZ\Lambda HM\Theta N$[Ⅻ.1]。但因为 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\Theta$ 上的正方形如同圆 $AB\Gamma\Delta$ 比面积 Σ，所以也有圆 $AB\Gamma\Delta$ 比面积 Σ 如同多边形 $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ 比多边形 $EKZ\Lambda HM\Theta N$[Ⅴ.11]，所以，由更比，圆 $AB\Gamma\Delta$ 比它的内接多边形如同面积 Σ 比多边形 $EKZ\Lambda HM\Theta N$。圆 $AB\Gamma\Delta$ 大于它的内接多边形，所以面积 Σ 也大于多边形 $EKZ\Lambda HM\Theta N$。但它又小于后者，这是不可能的。所以 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\Theta$ 上的正方形如同圆 $AB\Gamma\Delta$ 比某个小于圆 $EZH\Theta$ 的面积是不真实的。类似地我们可以证明 $Z\Theta$ 上的正方形比 $B\Delta$ 上的正方形如同圆 $EZH\Theta$ 比某个小于圆 $AB\Gamma\Delta$ 的面积也不真实。

其次，我认为圆 $AB\Gamma\Delta$ 比上某个大于圆 $EZH\Theta$ 的面积也不同于 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\Theta$ 上的正方形。

如果可能，设成那个比的较大面积是 Σ。所以，由反比例，$Z\Theta$ 上的正方形比 $B\Delta$ 上的正方形如同面积 Σ 比圆 $AB\Gamma\Delta$。但面积 Σ 比圆 $AB\Gamma\Delta$ 如同圆 $EZH\Theta$ 比某个小于圆 $AB\Gamma\Delta$ 的面积，所以也有 $Z\Theta$ 上的正方形比 $B\Delta$ 上的正方形如同圆 $EZH\Theta$ 比某个小于圆

$AB\Gamma\Delta$ 的面积[Ⅴ.11],这已证明是不可能的。所以 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\theta$ 上的正方形如同圆 $AB\Gamma\Delta$ 比某个大于圆 $EZH\theta$ 的面积是不真实的。已经证明了成那个比的也不是一个较小的面积,所以 $B\Delta$ 上的正方形比 $Z\theta$ 上的正方形如同圆 $AB\Gamma\Delta$ 比圆 $EZH\theta$。

所以圆与圆之比等于它们直径上的正方形之比。证毕。

18.5. 正立体

《几何原本》卷XIII.18.

给定五种图形的边并将它们彼此进行比较。

设 AB 是已知球的直径,将其确定,设 Γ 分 AB 使 $A\Gamma$ 等于 ΓB,Δ 分 AB 使 $A\Delta$ 为 ΔB 的 2 倍。在 AB 上作半圆 AEB,从 Γ,Δ 作 ΓE,ΔZ 与 AB 成直角,连接 AZ,ZB,EB。因为 $A\Delta=2\Delta B$,所以 $AB=3B\Delta$。代换后,$BA=\frac{3}{2}A\Delta$。但 $BA:A\Delta=BA^2:AZ^2$[Ⅴ.定义 9],因为三角形 AZB 与三角形 $AZ\Delta$ 是等角的[Ⅵ.8],所以 $BA^2=\frac{3}{2}AZ^2$。但是球直径上的正方形也是棱锥边上的正方形的 $1\frac{1}{2}$ 倍 XIII.13]。又 AB 是球的直径,所以 AZ 等于棱锥的边。

同样，因为 $A\Delta=2\Delta B$，所以 $AB=3B\Delta$。但 $AB:B\Delta=AB^2:BZ^2$ [Ⅵ.8，Ⅴ. 定义 9]，所以 $AB^2=3BZ^2$。但球直径上的正方形也是正方体边上的正方形的 3 倍[XIII. 15]。又 AB 是球的直径，所以 BZ 是立方体的边。

又因为 $A\Gamma=\Gamma B$，所以 $AB=2B\Gamma$。但 $AB:B\Gamma=AB^2:BE^2$[Ⅵ.8，Ⅴ. 定义 9]，所以 $AB^2=2BE^2$。但球直径上的正方形也是八面体边上的正方形的 2 倍[XIII,14]。又 AB 是已知球的直径，所以 BE 是八面体的边。

现在从 A 点作 AH 与线段 AB 成直角，且使 AH 等于 AB，连接 $H\Gamma$，从 θ 作 θK 垂直于 AB。因为 $HA=2A\Gamma$(因为 $HA=AB$)，且 $HA:A\Gamma=\theta K:K\Gamma$[Ⅵ.4]，所以 $\theta K=2K\Gamma$，所以 $\theta K^2=4K\Gamma^2$，因此 $\theta K^2+K\Gamma^2=5K\Gamma^2=\theta\Gamma^2$[Ⅰ.47]。但 $\theta\Gamma=\Gamma B$，所以 $B\Gamma^2=5\Gamma K^2$。又因为 $AB=2\Gamma B$，且其中 $A\Delta=2\Delta B$，所以余量 $B\Delta$ 是余量 $\Delta\Gamma$ 的 2 倍。所以 $B\Gamma=3\Gamma\Delta$，$B\Gamma^2=9\Gamma\Delta^2$。但 $B\Gamma^2=5\Gamma K^2$，所以 $\Gamma K^2>\Gamma\Delta^2$，所以 $\Gamma K>\Gamma\Delta$。设 $\Gamma\Lambda$ 等于 ΓK，从 Λ 作 ΛM 与 AB 成直角，连接 MB。因为 $B\Gamma^2=5\Gamma K^2$，且 $AB=2B\Gamma$，$K\Lambda=2\Gamma K$，所以 $AB^2=5K\Lambda^2$。但球直径上的正方形也是作出二十面体的圆半径上的正方形的 5 倍[XIII. 16，推论]。而 AB 是球的直径，所以 $K\Lambda$ 是作出二十面体的圆的半径，所以 $K\Lambda$ 是所说的圆的内接六边形的边[Ⅳ.15，推论]。又因为球的直径由同圆中内接六边形的一边与内接十边形的两边组成[XIII. 16，推论]，而 AB 是球的直径，$K\Lambda$ 是六边形的边，$AK=\Lambda B$，所以 AK，ΛB 是作出二十面体的圆内接十边形的边。由于 ΛB 属于一个十边形而 $M\Lambda$ 属于一个六边形(因为 $M\Lambda$ 等于 θK，也等于 $K\Lambda$，$M\Lambda$ 与 θK 离圆心等距，线段 θK，$K\Lambda$ 都是 $K\Gamma$ 的 2 倍)，所以 MB 属于一个五边形[XIII. 10，I. 47]。但五边形的边是二十面体的边[XIII. 16]，所以 MB 是二十面体的一边。

因为 ZB 是立方体的一边，设它被 N 分成中外比，设 NB 是较大的一段，所以 NB 是十二面体的一边[XIII. 17，推论]。

又因为已证明了球直径上的正方形是棱锥一边 AZ 上的正方

形的 $1\frac{1}{2}$ 倍，是八面体一边 BE 上的正方形的 2 倍，是立方体一边 ZB 上的正方形的 3 倍，所以球直径上的正方形包含 6 部分，棱锥边上的正方形包含 4 部分，八面体边上的正方形包含 3 部分，立方体边上的正方形包含 2 部分。所以棱锥边上的正方形是八面体边上的正方形的 $\frac{4}{3}$，是立方体边上的正方形的 2 倍，而八面体一边上的正方形是立方体一边上的正方形的 $1\frac{1}{2}$ 倍。所以这里所说的三种图形，我指棱锥，八面体和立方体的边之间的比是有理比。但其余两种图形，我指二十面体和十二面体的边互比或与上述的边互比不是有理比，因为它们是无理的，一个是次线(minor)[XIII.16]，另一个是余线[XIII.17]。

我们要证明二十面体的边 MB 大于十二面体的边 NB。

因为三角形 $Z\Delta B$ 与三角形 ZAB 是等角的[Ⅵ.8]，就有比例 $\Delta B:BZ=BZ:BA$[Ⅵ.4]。因为三条线段成比例，所以第一条比第三条如同第一条上的正方形比第二条上的正方形[Ⅴ.定义 9]，所以 $\Delta B:BA=\Delta B^2:BZ^2$。但 $AB=3B\Delta$，所以 $ZB^2=3B\Delta^2$。但 $A\Delta^2=4\Delta B^2$，因为 $A\Delta=2\Delta B$，所以 $A\Delta^2>ZB^2$，所以 $A\Delta>ZB$，所以 $A\Lambda$ 比 ZB 大得多。又，当 $A\Lambda$ 被分成中外比时，$K\Lambda$ 是较大的一段，因为 ΛK 属于一个六边形，KA 属于一个十边形[XIII,9]；当 ZB 被分成中外比时，NB 是较大的一段，所以 $K\Lambda$ 大于 NB。但 $K\Lambda=\Lambda M$，所以 $\Lambda M>NB$，从而二十边形的一边 MB 远大于十二边形的一边 NB。证毕。

现在，我说除所说的五种图形外，没有其他图形能够由等边，等角且彼此相等的图形作出。

因为一个立体的角不能由两个三角形，或一般地，由两个平面构成。用三个三角形构成棱锥的角，用四个三角形构成八面体的角，用五个三角形构成二十面体的角，但是将六个等边等角的三角形于一点放置在一起不能形成立体角，因为等边三角形的一角是 $\frac{2}{3}$ 直角，六个角等于四直角，由于任何立体角都由小于四直角的角

构成[XI.21],所以这不可能。同理,六个以上的平面角不能构成立体角。

立方体的角由三个正方形构成,但一个立体角不可能由四个正方形构成,因为其和又是四直角[XI.21]。

十二面体的角由三个等边等角的五边形构成,但一个立体角不可能由四个这样的角构成,因为等边五边形的一角是 $1\frac{4}{5}$ 直角,四个这样的角将大于四直角,这是不可能的[XI.21]。

同理,一个立体角不能由其他的多边形构成。

所以除上述的五种图形外,没有其他图形能由等边等角的图形作出。证毕。

(高 嵘译 梁宗巨校)

19. 阿基米德的数学著作

阿基米德(Archimedes, 287B. C. ～212B. C.)出生于西西里岛的叙拉古,第二次布匿战争期间被攻占叙拉古的罗马士兵杀害。阿基米德早年曾在亚历山大跟随欧几里得的门生学习,他有许多学术成果是通过与亚历山大学者的通信保存下来的。阿基米德的贡献涉及数学、力学、天文学等领域,传世的数学著作不少于10种,包含许多创造性发现。阿基米德的著作将熟练的计算技巧与严格证明融为一体,并包含了微积分思想的萌芽,向被尊为古代数学中精确性与创造性的典范。下面选译阿基米德的部分著述,包括《圆的度量》、《抛物线图形求积法》、《论球与圆柱》、《论螺线》、《处理力学问题的方法》中的部分命题,这些内容反映了阿基米德的数学兴趣,体现了他数学思想的发展脉络和研究方法。所有译文均译自 T. L. Heath(ed.), The Works of Archimedes, Cambridge University Press, 1910.

19. 1.《圆的度量》

命题 1

任一圆的面积等于以该圆的半径和周长为两直角边的直角三角形的面积。

设 $ABCD$ 是给定的圆,K 是所述三角形。

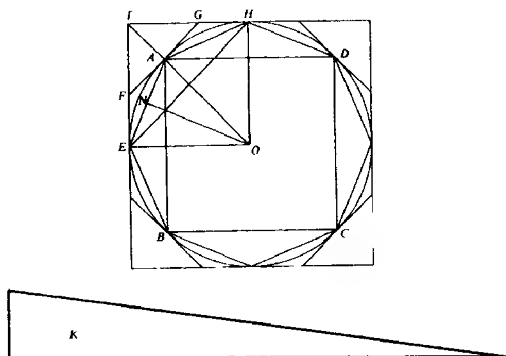
如果圆面积不等于 K,那么它一定大于或小于 K。

Ⅰ. 设圆面积大于 K。

作圆的内接正方形 $ABCD$,平分弧 AB,BC,CD,DA,然后再等分其半(如有必要),继续分下去,直到以分点为顶点的内接多边形各边所对弓形面积之和小于圆面积与 K 之差。

这样,多边形面积大于 K。

设 AE 为多边形的任一边，ON 为引自圆心 O 垂直于 AE 的垂线。



那么 ON 小于圆的半径，因而小于 K 的一直角边。又多边形的周长小于圆周长，即小于 K 的另一直角边。

所以多边形面积小于 K，这与前面假设矛盾。

故圆面积不大于 K。

Ⅱ. 设圆面积小于 K。

作圆的外切正方形，设该正方形与圆切于 E，H 的两邻边交于 T。平分相邻两切点间的弧，并在分点处作切线。设 A 为弧 EH 的中点，FAG 为 A 点的切线。

那么角 TAG 为直角。

因而有 $TG>GA>GH$。

由此可得，三角形 FTG 的面积大于 $TEAH$ 面积之半。

类似地，如果平分弧 AH，并作分点处的切线，那么，在 GAH 内，该切线将截出一个三角形，其面积大于 GAH[1] 的一半。

如此继续这种做法，最后可得到一外切多边形，使得该多边形与圆所夹图形的面积小于 K 与圆面积之差[2]。

由此知多边形面积小于 K。

---

① 此指的是由 GA，GH 和弧 AH 所围成的面积。

② 此由欧几里得《原本》Ⅹ.1 可得。

因为引自 O 垂直于多边形任一边的垂线等于圆的半径，而多边形的周长大于圆周长，由此可得，多边形的面积大于三角形面积 K；这是不可能的。

因此圆面积不小于 K。

由于圆面积既不大于 K、也不小于 K，所以二者相等。

19.2.《抛物线图形求积法》

(a)写给多西修斯[①] 的信

听到我的朋友科农去世的消息，我感到无比悲痛，因为这不仅是失去了一位好友，而且也失去了一位令人敬佩的数学家，同时我也知道您认识科农并精通几何，因此我决定将我最近发现的一个定理寄给你，就像以往寄给科农一样[②]。该定理以前未被研究，现在由我研究，我首先是用力学方法发现的，而后用几何方法表述出来。早期的一些几何学家试图证明可找到一个由直线所围成的面积等于已知圆和弓形的面积，以后他们又力图将一圆锥截线和一直线所围图形化为方形，由于假定的引理不容易被接受，因此大多数人认为这一问题没有解决。另外我不知道我的前辈有谁把由一直线和一直角圆锥截线[一条抛物线]所围成的弓形化为方形，现在我已经找到了这种方法。为在这里证明由一直线和一直角圆锥截线[一条抛物线]所围成的弓形面积是与它同底等高三角形的三分之四，假定下面引理成立：[两]不等面积之差，通过重复相加，可超过任一预先给定的面积。早期的几何学家曾应用这一引理来证明：两圆面积之比是它们直径的二次比，两球体积之比是它们直径的三次比，以及棱锥是同底等高棱柱体积的三分之一；又利用类似于上述的引理证明圆锥体积是同底等高圆柱体积的三分之一。实

① 多西修斯(Dositheus)，活动于公元前 225 年前后，是萨摩斯的科农(Conon of Samos)的学生或朋友，与阿基米德保持通信联系。以下致多西修斯的信，阿基米德用作《抛物线图形求积法》的序言。

② 在科农生前，阿基米德常将自己的工作寄给他并由他转达给亚历山大的其他学者，科农去世后，他便请多西修斯担任此任务。

际上，上述每一个定理与没有应用这一引理而被证明的定理一样得到承认。因此我公布的著作同样满足上述命题所涉及的考验，我已把证明写出来并寄给你，首先用力学方法推导，然后用几何方法严格证明。文章前面关于圆锥曲线的基本命题是为后面证明服务的。

(b)命题 24

由抛物线与弦 Qq 所围成的弓形面积等于同底等高三角形面积的$\frac{4}{3}$。

令 $K=\frac{4}{3}\Delta PQq$，其中 P 为弓形顶点，现要证明弓形面积等于 K。

如果二者不等，则弓形面积要么大于 K，要么小于 K。

Ⅰ. 假设弓形面积大于 K。

在由 PQ，Pq 截得的弓形内分别作与该弓形同底等高的内接三角形，即两三角形与两弓形有相同的顶点 R，r，在余下的弓形内按同样方式作内接三角形，如此继续下去，直到余下的弓形面积之和小于弓形 PQq 与 K 之差。

于是可知如此形成的多边形必大于面积 K，这是不可能的，因为[命题 23]$A+B+C+\cdots+Z<\frac{4}{3}A$①，其中 $A=\Delta PQq$。

故弓形面积不大于 K。

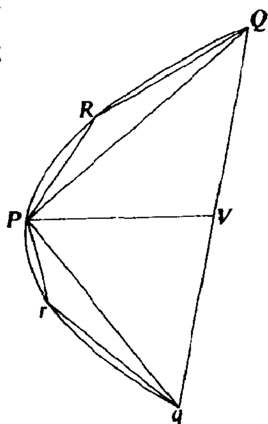
Ⅱ. 假设弓形面积小于 K。

如果令 $\Delta PQq=A$，$B=\frac{1}{4}A$，$C=\frac{1}{4}B$，如此下去，直到得到面积 X，使得 X 小于 K 与弓形面积之差，则有 $A+B+C+\cdots+X+\frac{1}{3}X=\frac{4}{3}A$[命题 23]$=K$。

由于 K 与 $A+B+C+\cdots+X$ 之差小于 X，又与弓形面积之

① 式中 $A,B,C,\cdots,Z$ 分别表示各级内接于弓形的三角形面积，$A=PQq$ 为第一级，$A+B+C+\cdots+Z$ 表示多边形面积。

差大于 X，因此应有 $A+B+C+\cdots+X>$（弓形），根据前面的命题 22，这是不可能的。



因此弓形面积不小于 K。

因为弓形面积既不大于 K 又不小于 K，所以（弓形 PQq 的面积）

$=K=\frac{4}{3}\Delta PQq$。

19.3.《论球与圆柱》

A．卷 I

命题 34

球体积等于以球的大圆为底、半径为高的圆锥体积的 4 倍。

设一球，它的一个大圆为 $ama'm'$。

如果球体积不等于上述圆锥体积的 4 倍，则它大于或小于圆锥体积的 4 倍。

I． 假设球大于圆锥体积的 4 倍。

设以球的大圆面积的 4 倍为底、球半径为高的圆锥体积为 V。

于是由假设，球体积大于 V；且可找到两条线段 β,γ（其中 β 较大），满足 $\beta:\gamma<$（球体积）$:V$。

在 β 和 γ 之间插入两条为等差中项的线段 δ、ε。

如前，作两相似正多边形，其边数为 $4n$，分别外切、内接于球的大圆，且它们的边长之比小于 $\beta:\delta$。

设想大圆直径 aa' 与两个正多边形的一条直径在同一直线上，后者与大圆以 aa' 为轴旋转，将描绘出两回旋转体面。两回旋转体的体积是其边长的三次比[命题 32]。

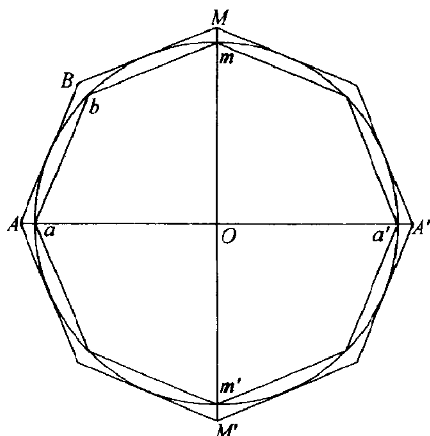
于是（外切立体的体积）:（内接立体的体积）

$<\beta^3:\delta^3$　　　　（由假设得出）

$<\beta:\gamma$　　　　（因为 $\beta:\gamma>\beta^3:\delta^3$）

$<$（球体积）$:V$　　　　（由前述结论可得）。

但是，这是不可能的，因为外切立体的体积大于球的体积[命题 28]，而内接立体的体积小于 V[命题 27]。



所以球体积不大于 V，即不大于命题中所述圆锥体积的 4 倍。

Ⅱ. 假设球体积小于 V。

在这种情形取 β,γ(其中 β 较大)，使得 $\beta:\gamma<V:$(球体积)。

接着重复上面的作图及证明，最后可以得到，(外切立体的体积)：(内接立体的体积)$<V:$(球体积)。

但这是不可能的，因为外切立体的体积大于 V[命题 31 的推论]，而内接立体的体积小于球体积。

因此，球体积不小于 V。

由于球体积既不小于 V 又不大于 V，所以它等于 V，即等于命题中所述圆锥体积的 4 倍。

推论　由上面已被证明的定理可以得出，以球的大圆为底、直径为高的圆柱体积是球体积的 3/2，包含两底的圆柱表面积是球表面积的 3/2。

因为上述圆柱体积是同底等高圆锥体积的 3 倍[欧几里得《几何原本》，Ⅻ.10]，即以球的大圆为底，半径为高的圆锥体积的 6 倍。

而球体积是后者的 4 倍[命题 34],所以上述圆柱体积是球体积的 3/2。

其次,任一圆柱的表面积[不包含两底]等于以圆柱高与底面直径的比例中项为半径的圆面积[命题 13]。

而此时圆柱的高与底面直径相等,因此这个圆的半径等于命题中所述球的直径,即此圆面积是球的大圆面积的 4 倍。

因而包含两底的圆柱表面积是大圆面积的 6 倍。

又球的表面积是大圆面积的 4 倍[命题 33],所以(包含两底的圆柱表面积)等于 3/2(球表面积)。

B. 卷 Ⅱ

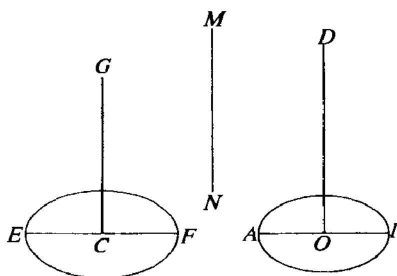
命题 1

已知一圆锥或圆柱,作一球,使它的体积等于已知圆锥或圆柱的体积。

如果设 V 是已知圆锥或圆柱的体积,那么可以作出一圆柱,使其体积等于$\frac{3}{2}V$。设此圆柱的底面直径为 AB、高为 OD。

现在,如果能再作出另一圆柱,其体积等于圆柱(OD),且满足它的高与底面直径相等,那么这一问题就被解决了,因为后一圆柱体积等于$\frac{3}{2}V$,而以它的高(或底面直径)为直径的球就是要求作的球[卷 I 命题 34 的推论]。

假定该问题已被解决,设圆柱(CG),其体积等于圆柱(OD),



其底面直径 EF 等于高 CG。

由于体积相等的两个圆柱，它们的高与底面直径成反比，于是有

$$AB^2 : EF^2 = CG : OD = EF : OD \tag{1}$$

又设 MN 为一直线段，满足

$$EF^2 = AB \cdot MN \tag{2}$$

因此 $AB : EF = EF : MN$，结合(1)和(2)，可得 $AB : MN = EF : OD$，或 $AB : EF = MN : OD$。

于是 $AB : EF = EF : MN = MN : OD$，知 EF, MN 是 AB, OD 间的两个比例中项。

综上所述，该问题的作图法如下。取 AB, OD 间的两个比例中项 EF, MN，再画一圆柱，其底是以 EF 为直径的圆，高 CG 等于 EF。

由于 $AB : EF = EF : MN = MN : OD, EF^2 = AB \cdot MN$，因而 $AB^2 : EF^2 = AB : MN = EF : OD = CG : OD$，由此知两圆柱$(OD)$、$(CG)$的底面积与高成反比。

因此，两圆柱体积相等，于是圆柱(CG)的体积$=\frac{3}{2}V$。

故以 EF 为直径的球，即是所求作的体积为 V 的球。

19.4.《论螺线》

(a)命题 1

如果一点沿一直线做匀速运动，那么，此直线上的两段长度与描述它们的时间成比例。

在一直线上取两段不等的长度，在另一直线上取表示时间的两段长度，依照欧几里得《几何原本》卷 V 的定义 5，通过取每一段长度和对应时间的等倍量，可以证明它们是成比例的。

(b)命题 2

如果两点各自沿不同的直线做匀速运动，分别在两直线上取相同时间内的长度，由此得到长度对，则这些长度对成比例。

这可立刻得证，因为同一直线上选取的长度之比等于相应时间之比，而时间之比又一定等于另一直线上选取的相应长度之比。

(c)命题 3

给定任一数目的圆，都可以找到一直线段，其长度大于所有圆周长之和。

对于每一个圆，只要作出圆外的多边形，然后再作一直线段，使其长度等于各多边形周长之和。

(d)命题 4

已知两不等的线，即一直线段与一圆的周长，可以找到一直线段，使其长度小于两线中长度较大者而大于长度较小者。

由前面引理，两不等线之差，其差本身累加次数足够多时，总可以超过线长较小者。

例如，如果 $c>l$（其中 c 为圆周长，l 为直线段的长度），则可找到数 n，使得 $n(c-l)>l$。

于是 $c-l>l/n$，即 $c>l+l/n>l$。

因此只要将 l 分成 n 等份，再将其中的一份加到 l 上，以此为长度的直线段将满足条件。

(e)定义

1. 如果平面上一条射线绕其固定端点匀速旋转，同时有一动点从端点出发沿射线匀速运动，那么当射线旋转到初始位置时，动点就描绘出一条平面螺线。

2. 射线旋转时的固定端点叫螺线的原点。

3. 射线旋转时的初始位置叫始线。

4. 动点在旋转第一圈时沿射线所描绘出的长度叫第一距离，在旋转第二圈时描绘出的长度叫第二距离，余下可依次类推。

5. 旋转第一圈时产生的螺线与第一距离所围成的面积叫第一面积，旋转第二圈时产生的螺线与第二距离所围成的面积叫第二面积，以下依次类推。

6. 从螺线原点出发的任何射线，与旋转方向一致的那一侧叫前向，另一侧叫后向。

7. 以原点为圆心，第一距离为半径的圆叫做第一圆，以同一点为圆心，第一圆半径的两倍为半径的圆叫做第二圆，余下依此类推。

(f)命题 18

如果 OA 为始线，A 为旋转第一圈时螺线的末端，OB 是引自 O 点垂直于 OA 的直线，且与螺线在 A 点的切线交于点 B，那么 OB 等于“第一圆”的周长。

设 AKC 是“第一圆”。由于 OA 和螺线在 A 点的切线间所夹的“后向”角是锐角[命题 16]，所以此切线将与第一圆交于另一点 C。又角 CAO、BOA 之和小于两直角，因此 OB 将与 AC 延长线相交，交点为 B。

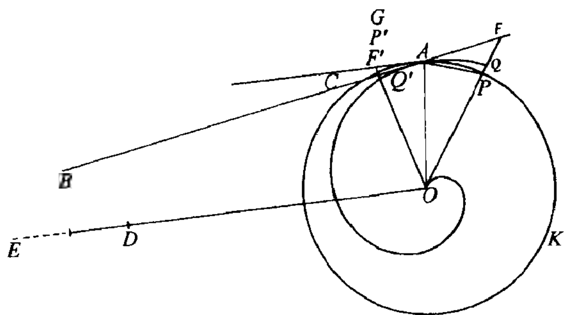
设 c 为第一圆的周长，我们证明 $OB=c$。

如果它们不等，那么 OB 必大于或小于 c。

(1) 假设 $OB>c$。

沿 OB 量取长度 OD，使其小于 OB 但大于 c。

由上述可知，AKC 是第一圆，AC 是该圆上小于直径的一条弦，$AO:OD$ 大于 $AO:OB$，或大于$\frac{1}{2}AC$ 与引自 O 点垂直于 AC 的垂线之比(由相似三角形，此比等于 $AO:OB$)。因此[命题 7]，可作一直线 OPF，交圆于 P，交 CA 延长线于 F，且满足 $FP:PA=AO:OD$。



从而由上式的更比及 $AO=PO$，(弧 PA) $>PA$，$OD>C$，可推出 $FP:PO=PA:OD<$(弧 PA)$:c$。

再由合比定理

可得 $FO:PO<(c+\text{弧}\ PA):c<OQ:OA$，

其中 Q 是 OF 与螺线的交点[命题 15]。

因此由 $OA=OP$，可知 $FO<OQ$，这是不可能的。

所以 $OB\not>c$。

(2) 假设 $OB<c$。

沿 OB 量取 OE，使 OE 大于 OB 但小于 c。

在这种情形，由于 $AO:OE$ 小于 $AO:OB$(即$\frac{1}{2}AC$ 与引自 O 点垂直于 AC 的垂线之比)，所以可作一直线 $OF'P'G$[命题 8]，交 AC 于 F'，交圆于 P'，交第一圆在 A 点的切线于 G，且满足 $F'P':AG=AO:OE$。

设 $OP'G$ 与螺线交于点 Q'。

于是由上式的更比及 $AG>$(弧 AP')，$OE<c$，可推出 $F'P':P'O=AG:OE>$(弧 AP')$:c$。

从而 $F'O:P'O<$(弧 AKP')$:c$

$<OQ':OA$ [命题 14]。

但这是不可能的，因为 $OA=OP'$，且 $OQ'<OF'$。

因此 $OB\not<c$。

由于 OB 既不大于又不小于 c，所以 $OB=c$。

(g)命题 24

旋转第一圈时所产生的螺线与始线所围的面积是"第一圆"面积的$\frac{1}{3}$[即$=\frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$，其中螺线方程是 $r=a\theta$]。

[下面的证明也表明：如果 OP 是旋转第一圈时所得螺线的任一条矢径，则由螺线的一部分和 OP 所围的面积等于一扇形的$\frac{1}{3}$，此扇形由始线、OP 和半径为 OP 的圆在从始线出发的"前向"方向上的一段圆弧围成。]

设 O 是原点，OA 是始线，A 是旋转第一圈时所得螺线的末端。

作出第一圆，即以 O 为圆心、OA 为半径的圆。

若用 C_1 表示第一圆的面积，R_1 表示旋转第一圈时所得螺线

与 OA 所围的面积，则需要证明 $R_1=\frac{1}{3}C_1$。

如果二者不等，那么，R_1 必大于或小于$\frac{1}{3}C_1$。

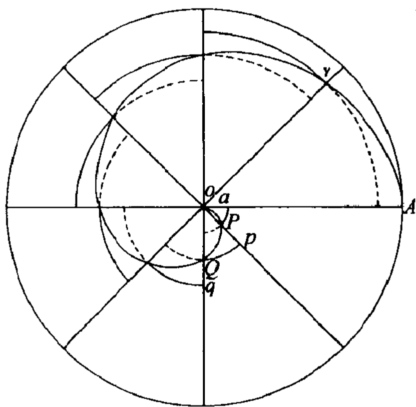
I． 假设 $R_1<\frac{1}{3}C_1$。

可作外接于 R_1 的图形，它由相似扇形组成，且其面积 F 满足 $F-R_1<\frac{1}{3}C_1-R_1$ ①，从而 $F<\frac{1}{3}C_1$。

设 OP，OQ，…是从小到大排列的各扇形的半径。显然，最大半径为 OA。

那么，这些半径构成一个递增的等差级数，公差等于最小项 OP。如果扇形个数为 n，则有[根据命题 10 的推论 1] $n\cdot OA^2<3(OP^2+OQ^2+\cdots+OA^2)$；又由于各相似扇形的面积与以各半径为边长的正方形面积成比例，从而有 $C_1<3F$，即 $F>\frac{1}{3}C_1$。但这是不可能的，因为 F 是小于$\frac{1}{3}C_1$ 的。

因此 $R_1\nless\frac{1}{3}C_1$。



① 由欧几里得《原本》X.1 可得。

Ⅱ. 假设 $R_1>\frac{1}{3}C_1$。

可作由相似扇形组成的内接于 R_1 的图形，使得该图形的面积 f 满足 $R_1-f<R_1-\frac{1}{3}C_1$ ①，从而 $f>\frac{1}{3}C_1$。

设有$(n-1)$个扇形，它们的半径 $OP,OQ,\cdots$ 也构成一个递增的等差级数，它的最小项与公差相等，最大项 OY 等于$(n-1)OP$。

于是有[命题 10 的推论 1] $n\cdot OA^2>3(OP^2+OQ^2+\cdots+OY^2)$，由此可得 $C_1>3f$，即 $f<\frac{1}{3}C_1$，这是不可能的，因为 $f>\frac{1}{3}C_1$。

因此 $R_1\not>\frac{1}{3}C_1$。

由于 R_1 既不大于也不小于$\frac{1}{3}C_1$，所以 $R_1=\frac{1}{3}C_1$。

19.5.《处理力学问题的方法》②

(a)给埃拉托塞尼的信

前些时候我寄给您一些我发现的定理，但当时我只写出了定理的内容，而没有给出证明，希望您做出证明。我寄给您的那些定理的内容如下：

1. 在一底为平行四边形③ 的直棱柱内作一内接圆柱，圆柱的两底位于两相对的平行四边形上，圆柱的边[即四条母线]在直棱柱的其余平面[侧面]上。如果经过圆柱的底圆圆心和与该底圆相对的正方形的一边作一平面，该平面从圆柱上截下的部分由两个平面和圆柱的表面围成，其中一个平面为所作的平面，另一平面为圆柱底所在的平面，圆柱的表面指位于上述两平面之间的部分，那

① 由欧几里得《原本》X.1 可得。

② 阿基米德这一短篇论著，直到 1906 年才被丹麦学者海伯格(J. L. Heiberg)在君士坦丁堡(现称伊斯坦布尔)图书馆发现。这篇通常简称为《方法》的论文，叙述了 15 条命题，全文以阿基米德给埃拉托塞尼的一封信开头。

③ 即正方形。

么，从圆柱上所截下部分的体积是整个棱柱的$\frac{1}{6}$。

2. 在一立方体内作一内接圆柱，圆柱的两底位于两相对的平行四边形[①]上，圆柱面与立方体的其余四个平面[侧面]相切。如果同时还有另一圆柱内接于同一立方体，此圆柱的两底位于另外的平行四边形上，它的表面与余下的四个平面[侧面]相切，那么，位于两圆柱内部、由两圆柱面所围成的图形[②]，其体积是整个立方体的$\frac{2}{3}$。

上面这两个定理性质上不同于以前转寄出的那些定理，这是由于，那时所谈及的图形，即劈锥曲面和回转椭圆体及它们的一部分，我们是用圆锥和圆柱来衡量其体积的，但并未发现其中任一个图形等于由平面所围成的立体图形的体积；而现在谈及的由两个平面和圆柱面围成的图形，却发现其体积等于由平面围成的某一立体图形的体积。关于前述两个定理的证明我已经写在这本书里，现在把它寄给你。另外，如我所说，您是一位极认真的学者，在哲学上有卓越成就，又热心于探索数学知识，因而，我认为在同一本书中给您写出并详细说明一种方法的独特之处是合适的，用这种方法使你可能会借助于力学方法开始来研究某些数学问题。我相信这一方法的相应过程甚至对定理本身的证明同样有用，因为按照上述方法对这些定理所做的研究虽然不能提供定理的实际证明，以后它们必须用几何学进行论证，但通过力学方法，我对一些问题首先变得清晰了。然而，当我们用这种方法预先获得有关这些问题的信息时，完成它们的证明当然要比没有任何信息的情况下去发现其证明容易得多。正是由于这一原因，对于圆锥是同底等高的圆柱体积的三分之一及棱锥是同底等高的棱柱体积的三分之一这两个定理来说，欧多克索斯(Eudoxus)首先给出它们的证明，但我们不能就此轻视德谟克利特(Democritus)的功绩，是他最先就上述

① 即正方形。

② 此图形被刘徽称为“牟合方盖”。

图形作出这种断言，虽然他没有予以证明。现在，我本人就处于[通过上面指出的方法]先发现要公布的定理的情形，这使我认为有必要阐述一下这种方法。这样做部分是因为我曾谈到过此事，我不希望被视作讲空话的人，另外也因为我相信这种方法对数学很有用。我认为，这种方法一旦被建立起来，我的同代人或后继者中的某些人将会利用它发现另外一些我尚未想到的定理。

那么，我先列出我用力学方法得到的第一个定理，即

直角圆锥的截面[即抛物线]所构成的弓形面积是同底等高三角形的三分之四。

这之后我将给出用同样的方法研究得到的所有其他定理。然后，在该书的最后部分我将给出书的开始处所述命题的几何证明。

我假定下列命题成立，它们在后面将要用到。

1. 如果两个重心不同的量相减，那么剩余量的重心可通过如下方法求得，即在整体量的重心方向上延长连接整体量和减量的重心的直线，然后从其上截去一段长度，使该长度与上述两重心间的距离之比等于减量与剩余量的重量之比[《平面图形的平衡》卷Ⅰ命题8]。

2. 如果一组量的重心均在同一条直线上，那么由这组量的全体所组成的量的重心将在相同的直线上[出处同上，卷Ⅰ命题5]。

3. 任一直线段的重心是该直线段的中点[出处同上，卷Ⅰ命题4]。

4. 三角线的重心是从角顶点到(对)边中点所作直线的交点[出处同上，卷Ⅰ命题13、14]。

5. 平行四边形的重心是对角线的交点[出处同上，卷Ⅰ命题10]。

6. 圆的重心就是[该圆的]圆心。

7. 圆柱的重心是轴的中点。

8. 圆锥的重心是划分轴的点，该点使轴上靠近顶点的那部分是靠近底的那部分的三倍。

这些命题都已经证明过了。除这些命题外，我还要用到下面的

命题，它是很容易证明的：

如果在两组量中，第一组量依次与第二组量成比例，而且第一组量的全体或其中一部分与第三组量成任一比，又第二组量与第四组中的相应量也成同一比，那么，第一组量之和与第三组所选量之和的比等于第二组量之和与第四组中[相应]所选量之和的比① [《劈锥曲面与回转椭圆体》，命题 1]。

(b) 命题 1

设 ABC 是由直线 AC 和抛物线 ABC 所围成的抛物线弓形，D 为 AC 的中点。作直线 DBE 平行于抛物线的轴，连接 AB，BC，则弓形 ABC 的面积是三角形 ABC 的 $\frac{4}{3}$。

由 A 点作 AKF 平行于 DE，设抛物线在 C 点的切线交 DBE 于 E，交 AKF 于 F。延长 CB 交 AF 于 K，再延长 CK 至 H，使 KH 等于 CK。

将 CH 作为杠杆，K 为中点。

设 MO 是平行于 ED 的任一直线，它与 CF，CK，AC 分别交于点 M，N，O，与曲线交于 P 点。

由于 CE 为抛物线的切线，D 为 AC 中点且 CD 平行于纵坐标方向，所以 $EB=BD$，这在[圆锥曲线的]理论中已经证明过了。

又因为 FA、MO 都平行于 ED，所以应有 $FK=KA$，$MN=NO$。

---

① 设 $M_{11}, M_{12}, \cdots M_{1K}$，
$M_{21}, M_{22}, \cdots M_{2K}$，
$M_{31}, M_{32}, \cdots M_{3K}$，
$M_{41}, M_{42}, \cdots M_{4K}$.
分别为第一、二、三、四组量，并且满足

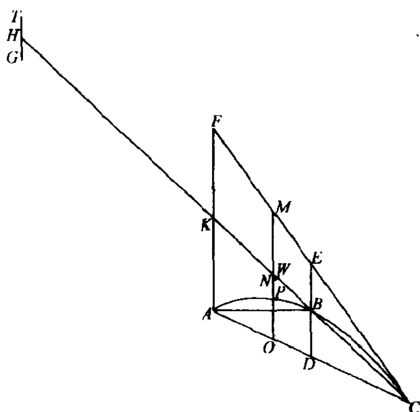
$$(1)\frac{M_{11}}{M_{21}}=\frac{M_{12}}{M_{22}}=\cdots\cdots=\frac{M_{1K}}{M_{2K}}$$

$$(2)\frac{M_{11}}{M_{31}}=\frac{M_{21}}{M_{41}};\frac{M_{12}}{M_{32}}=\frac{M_{22}}{M_{42}};\cdots\cdots;\frac{M_{1K}}{M_{3K}}=\frac{M_{2K}}{M_{4K}},$$

则有

$$\frac{M_{11}+M_{12}+\cdots+M_{1K}}{M_{31}+M_{32}+\cdots+M_{3k}}=\frac{M_{21}+M_{22}+\cdots+M_{2k}}{M_{41}+M_{42}+\cdots+M_{4k}}.$$

根据已在引理中得到证明的抛物线的性质，有 $MO:OP=CA:AO$[《抛物线图形求积法》命题 5]$=CK:KN$[欧几里得《几何原本》卷Ⅵ命题 2]$=HK:KN$。



取直线 TG 等于 OP，将其以 H 为重心放置，以使 $TH=HG$，于是由 N 为直线 MO 的重心及 $MO:TG=HK:KN$ 可推知，H 处的 TG 和 N 处的 MO 关于 K 点保持平衡[《平面图形的平衡》卷Ⅰ命题 6、7]。

类似地，对平行于 DE 且与抛物线弧相交的所有其他直线，(1)截于 FC，AC 间，中点在 KC 上的部分和(2)以曲线和 AC 间的截线为长、以 H 为重心放置的一段长度将关于 K 点保持平衡。

因此，K 是由如下两组直线段构成的整个系统的重心，即(1)截于 FC，AC 间、置于图中实际所示位置的所有象 MO 一样的直线段和(2)置于 H 处、以曲线和 AC 间的截线为长度的所有象 PO 一样的直线段。

因为三角形 CFA 由所有象 MO 一样的平行线组成、弓形 CBA 由所有象 PO 一样含于曲线内部的直线段组成，所以可推知，置于图中所示位置上的三角形与以 H 为重心放置的弓形 CBA 关于 K 点保持平衡。

于 W 点划分 KC，使 $CK=3KW$，则 W 是三角形 ACF 的重心，这已在有关平衡性的著作中得到证明[《平面图形的平衡》卷 I 命题 15]。

于是有$\triangle ACF$:(弓形 ABC)$=HK:KW=3:1$。

从而弓形 $ABC=\frac{1}{3}\triangle ACF$。

但$\triangle ACF=4\triangle ABC$，

故弓形 $ABC=\frac{4}{3}\triangle ABC$。

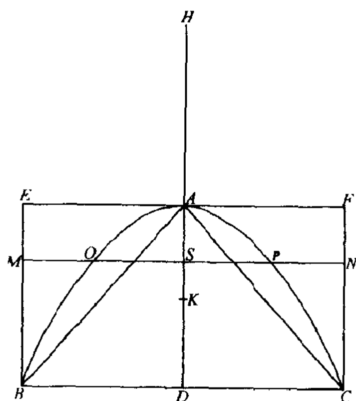
这里所陈述的事实不能以上面所用的观点作为实际证明，但这种观点暗示了结论的正确性。鉴于该定理并未得到证明，同时它的真实性又值得怀疑，因此我们将求助于几何学上的证明，我本人已经发现并公布了这一证明。

(c)命题 4

直角劈锥曲面[即回转抛物面]被垂直于轴的平面所截取的部分的体积是与该部分立体同底同轴的圆锥体积的 $1\frac{1}{2}$倍。

该命题能用我们所说的方法考察，过程如下。

设回转抛物面被经过轴的平面所截，截面为抛物线 BAC，它又被另一垂直于轴的平面所截，该平面与前一平面的交线为 BC。



延长 DA 至 H，即延长回转抛物面被垂直于轴的平面所截取部分的轴，使 HA 等于 AD。

视 HD 为杠杆，A 为中点。

回转抛物面被截取部分的底是与 AD 垂直的平面上以 BC 为直径的圆，又设有(1)以后面的圆为底、A 为顶点的圆锥，(2)以同样的圆为底、AD 为轴的圆柱。

在平行四边形 EC 内作平行于 BC 的任一直线 MN，再作经过 MN 与 AD 垂直的平面，该平面截圆柱、回转抛物面所得的截面分别是以 MN，OP 为直径的圆。

因为 BAC 为抛物线，BD，OS 为平行于纵标方向的直线，则 $DA : AS = BD^2 : OS^2$，即 $HA : AS = MS^2 : SO^2$。

从而 $HA : AS$ =（半径为 MS 的圆）:（半径为 OS 的圆）=（圆柱中的圆）:（回转抛物面中的圆）。

因此，若以 H 为重心放置回转抛物面中的圆，那么，处于原位置上的圆柱中的圆将与前者关于 A 点保持平衡。

同理，由这样的平面，即该平面垂直于 AD 并且经过平行四边形内平行于 BC 的任一其他直线，截得的两个相应的圆截面也有类似的结论。

所以，同以前一样，如果考虑组成整个圆柱和回转抛物面被截取部分的所有圆，并用同样的方法讨论它们，那么，我们发现，处于原位置上的圆柱与以 H 为重心放置的回转抛物面被截取的部分关于 A 点保持平衡。

设 AD 的中点为 K，则 K 为圆柱的重心，因而 $HA : AK$ =（圆柱）:（回转抛物面被截取的部分）。

于是圆柱 = 2（回转抛物面被截取的部分）。

又圆柱 = 3（圆锥 ABC）[欧几里得《几何原本》卷 XII 命题 10]，

故回转抛物面被截取部分的体积 $=\frac{3}{2}$（圆锥 ABC）。

（周冬梅 译　朱恩宽 校）

20. 阿波罗尼奥斯:《圆锥曲线论》

阿波罗尼奥斯(Apollonius of Perga,约 262B.C.～约 190B.C.)是小亚细亚珀尔加地方人,有关他生平的信息主要来自其唯一的传世之作《圆锥曲线论》(Conics)各卷中作为前言的信件。他年轻时曾在亚历山大跟随欧几里得的后继者学习。阿波罗尼奥斯的贡献涉及几何学诸领域及天文学。他最重要的数学成就,是在前人工作的基础上创立了完美的圆锥曲线理论,《圆锥曲线论》就是这方面的系统总结,这部巨著对圆锥曲线的研究所达高度,直至 17 世纪笛卡儿、帕斯卡出场之前,始终无人能够超越。《圆锥曲线论》八卷,前四卷是基础部分,后四卷是拓广的内容,其中第八卷已失传。此书有阿拉伯文、拉丁文、法文、英文等多种文本。以下摘录第一卷中关于圆锥曲线的定义与主要性质的论述,以及二至四卷中所包含的部分结果和方法。译自 J. Fauvel and J. Gray(eds.), The History of Mathematics: A Reader, pp. 185～196.

20.1. 基本定义

卷 I

1. 从一点向与这点不在同一平面的圆周连直线,并且将这条线向两端延长,如果这点保持固定,令直线绕圆周旋转,最后回到出发的位置,就描绘出由两个对顶的面组成的曲面,当生成曲面的直线无限伸展时,曲面的两支也无限延展,我称这曲面为圆锥曲面,固定点为顶点,固定点与圆心的连线为轴。

2. 我称圆以及顶点与圆周之间的圆锥曲面所包含的图形为圆锥,曲面的顶点也叫做圆锥的顶点,顶点与圆心的连线叫做轴,圆叫做圆锥的底。

3. 我称轴垂直于底的圆锥为直圆锥,轴不垂直于底的圆锥为

斜圆锥。

4. 对于一平面上的任一曲线，从曲线上画出一条直线，使之平分所有与这曲线相连且平行于某一直线的直线，我称这条直线为直径，落在曲线上的这条直线[即直径]的端点，我称之为曲线的顶点，而且，我认为这组平行线中的每一条都在直径的纵标方向上。

5. 同样地，对于位于一平面上的任意两条曲线，若一直线与两曲线相交且平分所有与两曲线中任一条相连而又平行于某一直线的直线，我称其为横截直径；我称落在曲线上的直径的端点为曲线的顶点；位于两曲线之间，平分所有截于曲线间且平行于某一直线的直线，我称之为竖直直径；我认为这些平行线中的每一条都在直径的纵标方向上。

6. 两条作为直径的直线中，如每一条都平分与另一条相平行的直线，我称它们为一条曲线或两条曲线的共轭直径。

7. 我称曲线的直径或与一些平行直线成直角相交的直线为一曲线或两曲线的轴。

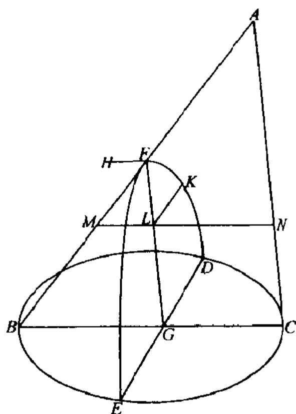
8. 我称与彼此平行的那些直线相交成直角的共轭直径为一曲线或两曲线的共轭轴。

20.2. 抛物线、双曲线和椭圆的引入

(a)卷 I；命题 11

如果一圆锥被过其轴的一个平面所截，同时被另一与圆锥的底交于一直线的平面所截，交线垂直于轴三角形的底边，进而，如果截线的直径平行于轴三角形的一边，那么任一连接圆锥截线和其直径且平行于截平面与圆锥底之交线的直线，其平方将等于两线段所包含的矩形[①]，其中一线段是从截线的顶点开始，由上述直线在直径上截取的部分，另一线段则是，它比上圆锥顶点与截线顶点之间的线段等于轴三角形底边上的正方形比上轴三角形其余两

① 这是古希腊的传统说法，指两线段的乘积，矩形 a,b 即 $a\times b$。



边所包含的矩形。这样的截线叫做抛物线。

设有一圆锥，其顶点为 A，底为圆 BC，令其被过轴的平面所截，形成的截面为三角形 ABC[卷Ⅰ，命题3]。又设它也被另一与圆锥的底交于直线 DE 的平面所截，DE 与直线 BC 垂直。设这样在圆锥表面形成的截线为 DFE，其直径 FG[卷Ⅰ命题7及定义4]平行于轴三角形的一边 AC。又设过 F 点作直线 FH 垂直于直线 FG，并且使它按正方形 BC ∶ 矩形 BA，AC∷FH ∶ FA① 作出。

在截线上任取点 K，过 K 作直线 KL 平行于直线 DE。

我认为正方形 KL = 矩形 HF，FL。

过 L 作直线 MN 平行于直线 BC，而直线 DE 也平行于直线 KL。所以过 KL 和 MN 的平面平行于过 BC 和 DE 的平面[欧几里得《原本》，卷Ⅺ，命题15]②，也就是平行于圆锥的底。因此过 KL 和 MN 的平面是一个圆，其直径为 MN(Ⅰ，4)。既然 DE 垂直于 BC，也有 KL 垂直于 MN[欧几里得，Ⅺ，10]。所以矩形 ML，LN = 正方形 KL[欧几里得，Ⅲ，31；Ⅵ，8，推论]。

又因为正方形 BC∶矩形 BA，AC∷HF ∶ FA，且正方形 BC ∶

---

① 此式相当于 BC^2 ∶ $(BA \cdot AC) = FH$ ∶ FA。

② 希腊原文并没有标出作为已知来用的性质出自《原本》何处，译文为便于参考，将出处补上。

矩形 BA, AC 复合 $BC:CA, BC:BA$[1] [欧几里得, Ⅵ.23]。所以 $HF:FA$ 复合 $BC:CA, BC:BA$

但 $BC:CA::MN:NA::ML:LF$[欧几里得, Ⅵ,4]，且 $BC:BA::MN:MA::LM:MF::NL:FA$[欧几里得, Ⅵ.2]。

所以 $HF:FA$ 复合 $ML:LF, NL:FA$

但矩形 ML, LN : 矩形 LF, FA 复合 $ML:LF, LN:FA$[欧几里得, Ⅵ.23]

所以 $HF:FA::$矩形 ML, LN : 矩形 LF, FA。

但，把直线 FL 当作公共高，
$HF:FA::$矩形 HF, FL : 矩形 LF, FA[欧几里得, Ⅵ.1]，所以矩形 ML, LN : 矩形 $LF, FA::$矩形 HF, FL : 矩形 LF, FA[欧几里得, V.11]

所以矩形 $ML, LN=$矩形 HF, FL[欧几里得, V.9]

但矩形 $ML, LN=$正方形 KL，所以也有正方形 $KL=$矩形 HF, FL。

将这样的截线称为抛物线，将 HF 称作沿直径 FG 纵标方向所作的直线都以正方形贴合到其上的直线[2]，也把它称为竖直边。

(b)卷Ⅰ：命题 12(叙述)

如果一圆锥被过其轴的平面所截，同时也被另一与圆锥底交于一直线的平面所截，交线垂直于轴三角形的底边，又如果截线的直径延长后与轴三角形的一边交于圆锥顶点之外，那么任一连接截线和其直径且平行于截平面与圆锥底之交线的直线，其平方将等于某一面积，此面积贴合到一直线上，沿截线的直径增加并对着三角形外角的直线比上这直线等于连接圆锥顶点与三角形的底且平行于截线直径的直线上的正方形比上这直线分割底成两部分所含的矩形，这面积的宽度是截线与直径的连线在直径上截取的从

---

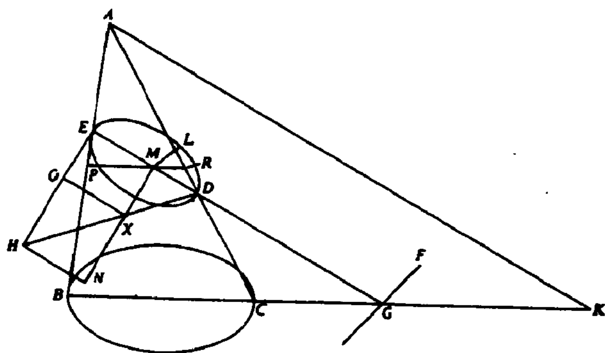
① 此式相当于 $BC^2:(BA\cdot AC)=(BC:CA)\cdot(BC:BA)$。

② 此句意为以 FL 为一边，作一矩形贴合到 HF 上，使其面积等于 KL 上的正方形。所谓“贴合”就是矩形的一条边与 HF 重合。

截线顶点开始的一段，并且超出一个图形，这图形相似于并且在位置上也相似于由三角形外角所对的线段与参量①所含的矩形。将这样的截线称作双曲线。②

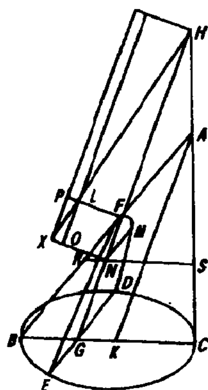
(c)卷Ⅰ：命题13(叙述)

如果一圆锥被过其轴的一个平面所截，同时也被另一平面所截，这平面一方面与轴三角形的两边相交，另一方面其延展部分既不与底平行也不相反，又如果圆锥底面所在的平面与截平面交于垂直于轴三角形底边或其延长线的直线上，那么任何连接圆锥的截线和截线的直径且平行于平面公共截线的线段，其平方等于某块面积，此面积贴合到一直线上，截线的直径比上此直线等于连接



① 参量指图中的 PF。

② 这样截得双曲线的一支，类似地，可在圆锥曲面的另一支上截取双曲线的另一支，其顶点为 H。阿波罗尼奥斯称双曲线的每一支为 hyperbola，两支合起来称为 opposite(反曲线或对曲线)。

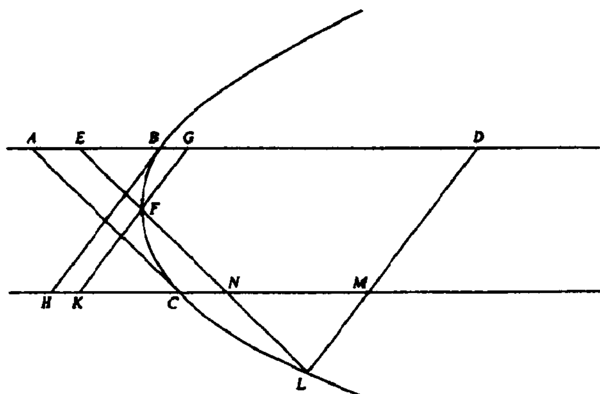


圆锥顶点和三角形底边且平行于截线直径的直线上的正方形比上[底边上]这直线所截得的从三角形两边开始的两段所含的矩形，这面积的宽度是截线与直径的连线在直径上截取的从截线顶点开始的一段，并且亏缺一个图形[1]，这图形相似于并在位置上也相似于由直径和参数[2] 所含的矩形。将这样的截线称作椭圆。

20.3. 关于切线和直径的一些结果

(a)卷Ⅰ：命题 46

如果与抛物线相切的一条直线与直径相交，则过切点在截线方向上平行于直径的直线平分切线的平行线在截线内的部分。



设有一抛物线，其直径为直线 ABD，又设直线 AC 与截线相切[卷Ⅰ.24]，过 C 作直线 HCM 平行于直线 AD[Ⅰ.26]，在截线上任取某一点 L，作直线 $LNFE$[Ⅰ.18,22]平行于 AC。

我认为 $LN=NF$。

沿纵标方向作直线 BH，KFG 及 LMD。根据定理 42[Ⅰ.42]

① 亏缺的图形指矩形 HX。

② 参数是图中的 HE。

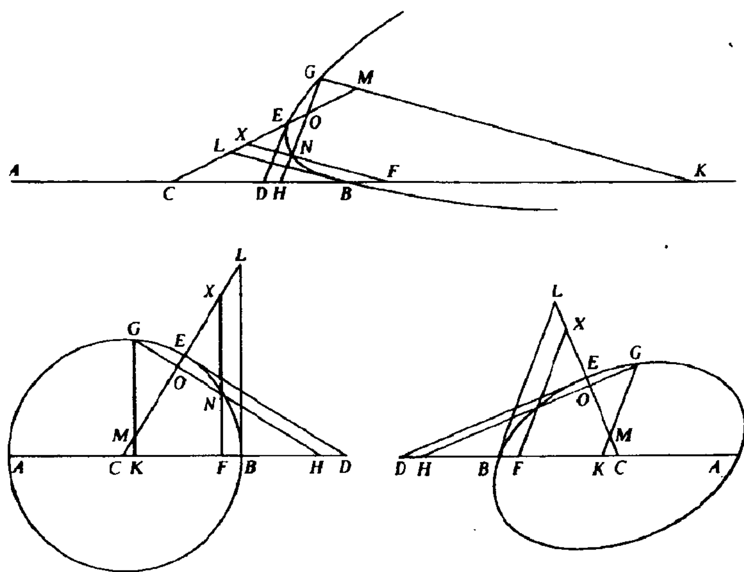
的已有结果，三角形 ELD = 平行四边形 BM[1]，且有三角形 EFG = 平行四边形 BK，因此余下的平行四边形 GM = 四边形 $LFGD$。

减去公共部分五边形 $MDGFN$；所以余下的三角形 KFN = 三角形 LMN。

又 KF 平行于 LM；所以 $FN = LN$[欧几里得《原本》，Ⅵ. 22. 引理]

(b)卷Ⅰ：命题 47

如果与双曲线，椭圆或圆相切的一直线与直径相交，在截线方向上过切点与中心作直线，则此直线平分切线的平行线在截线内的部分。



设有一双曲线，椭圆或圆，其直径为直线 AB，中心为 C，作直线 DE 与截线相切，连结直线 CE 并延长，在截线上任取一点 N，过 N 作平行线 $HNOG$。

---

① 图形相等指其面积相等。

我认为 $NO=OG$。

沿纵标方向作直线 XNF，BL 及 GMK。

根据定理 43 的结果[Ⅰ.43]，三角形 HNF=四边形 $LBFX$，且三角形 GHK=四边形 $LBKM$。

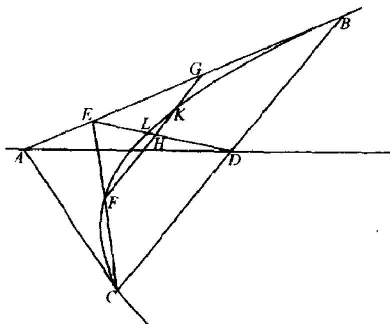
所以剩余的四边形 $NGKF$=四边形 $MKFX$。

减去公共部分五边形 $ONFKM$；所以剩余的三角形 OMG=三角形 NXO。

又直线 MG 平行于直线 NX；所以 $NO=OG$[欧几里得《原本》，Ⅵ.22，引理]

(c)卷Ⅱ：命题 29

如果圆锥截线或圆的两条切线相交，则连接交点与切点连线中点的直线是截线的直径。



设有一圆锥截线或一个圆，作切线 AB，AC 交于点 A，连接 BC，且被 D 点平分，连接 AD。我认为 AD 为截线的直径。

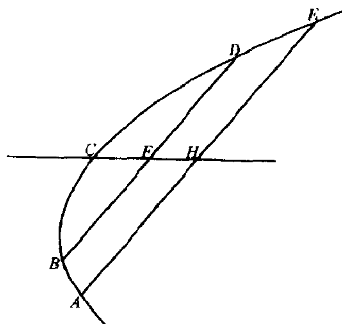
如果可能，设 DE 为直径，连接 EC，它将与截线相交[Ⅰ.35，36]。设 EC 交截线于 F，过 F 作 FKG 平行于 CDB。因为 $CD=DB$，也有 $FH=HG$。又因为过 L 的切线平行于 BC[Ⅱ.5，6]，FG 也平行于 BC，所以 FG 也平行于过 L 的切线。

所以 $FH=HK$[Ⅰ.46，47]；这是不可能的。因此 DE 不是直径。同样地，我们能够证明除 AD 外没有别的直径。

20.4. 怎样作出直径、中心和切线

(a)卷Ⅱ:命题 44

已知一圆锥曲线,作出它的一条直径。



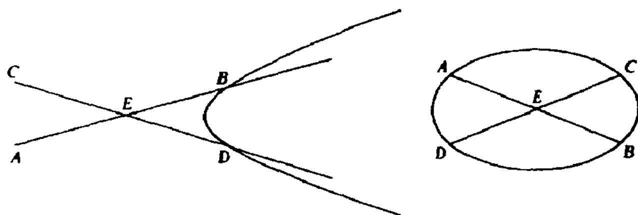
设有一已知的圆锥曲线,A,B,C,D,E 为其上的点,要求找到一条直径。

假设直径已经作出,设其为 CH。沿纵标方向作 DF 和 EH 并延长,则有 $DF=FB,EH=HA$[基本定义Ⅰ.4]。如果我们将直线 BD 和 EA 固定在彼此平行的位置,点 H 和 F 就将得出。这样 HFC 的位置就将得出。

于是直径可以这样作出:设有一已知的圆锥曲线,A,B,C,D 和 E 为其上的点,作互相平行的直线 BD 和 AE,且被点 F 和 H 平分。则连线 FH 即为曲线的直径[基本定义Ⅰ.4]。用同样的方法我们可以作出无数条直径。

(b)卷Ⅱ:命题 45

已知一个椭圆或双曲线,去求中心。



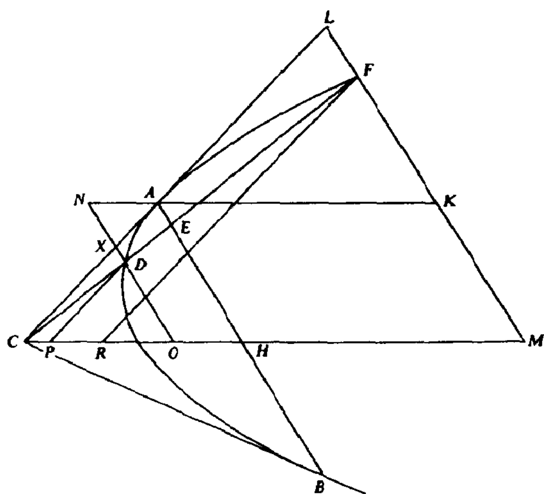
这是显然的；因为如果曲线的两直径 AB 和 CD 已作出[卷Ⅱ，44]，它们的交点就是曲线的中心。

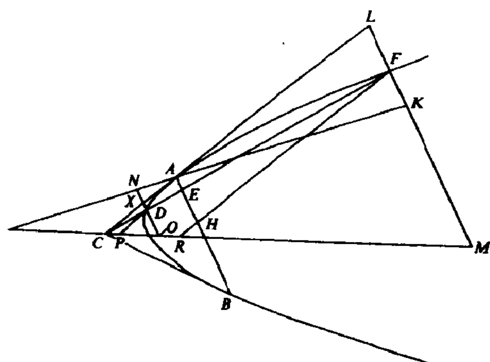
(c)卷Ⅲ：命题 37

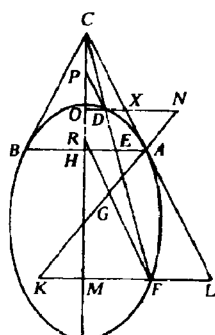
如果与圆锥曲线，圆或反曲线相切的两直线相交，作一条连接切点的直线，再过切线的交点横过地作某直线与曲线交于两点，那么整条直线比上截于曲线之外的直线如同切点的连线分割该两交点之间的直线所成的两线段之比。

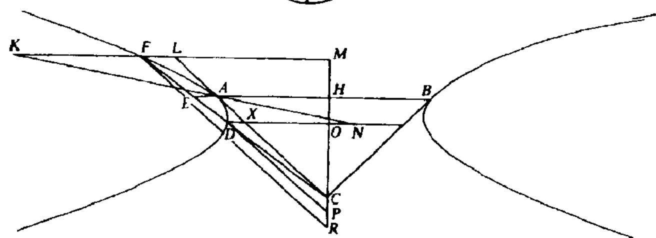
设有圆锥曲线 AB，AC 和 CB 为切线，连接 AB，且作 $CDEF$ 横过该曲线。我认为 $CF : CD :: FE : ED$。

过 C、A 作直径 CH 和 AK，过 F 和 D 作 DP，FR，LFM 和 NDO 平行于 AH 和 LC。既然 LFM 平行于 XDO，$FC : CD :: LF : XD :: FM : DO :: LM : XO$，所以正方形 LM : 正方形 XO :: 正方形 FM : 正方形 DO。




L
F
K
A
N
X
E
D
O
H
C
P
R
M
B


C
P
X
N
O
D
R
E
B
A
H
G
K
M
F
L


K
F
L
M
A
H
B
E
X
D
O
N
C
P
R

但是正方形 LM ∶ 正方形 XO∷三角形 LCM ∶ 三角形 XCO [欧几里得《原本》，Ⅵ.19]。且正方形 FM ∶ 正方形 DO∷三角形 FRM ∶ 三角形 DPO；所以也有三角形 LMC ∶ 三角形 XCO∷三角形 FRM ∶ 三角形 DPO∷余下的四边形 $LCRF$ ∶ 余下的四边形 $XCPD$。

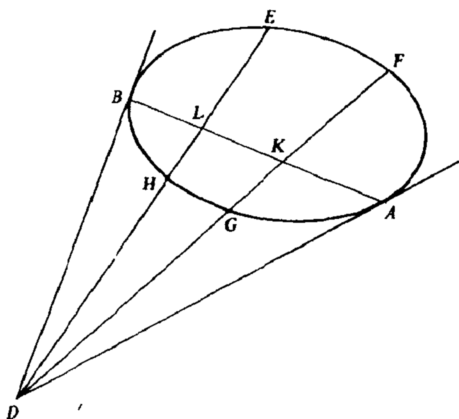
但是四边形 $LCRF$＝三角形 ALK[Ⅲ.2；Ⅲ.11]，且四边形 $XCPD$＝三角形 ANX[Ⅲ 2；Ⅲ.11]；所以正方形 LM ∶ 正方形 XO ∷三角形 ALK ∶ 三角形 ANX。

但正方形 LM∷正方形 XO∷正方形 FC ∶ 正方形 CD，且三角形 ALK ∶ 三角形 ANX∷正方形 LA ∶ 正方形 AX∷正方形 EF ∶ 正方形 ED；所以也有正方形 FC ∶ 正方形 CD∷正方形 FE ∶ 正方形 ED。

所以 FC ∶ CD∷FE ∶ ED。

(d)卷Ⅳ：命题 9

如果过同一点作两条与圆锥曲线或圆都交于两点的直线，又如果将两直线的内段按整条线段与外段之比来分割，使得这些线段成为关于该同一点的调和线段，那么通过分割点的线将与曲线交于两点，并且过交点到外部点所作的直线将为曲线的切线。



设 AB 为提到的曲线中的一种。从 D 点作直线 DE,DF 与曲线相交,一条交于 H,E 点,另一条交于 G,F 点,使得 EL 比 LH 将与 DE 比 HD 相同,而线段 FK 比 KG 则与 DF 比 DG 相同。我认为点 L 与 K 的连线将与曲线的每一侧相交,且交点与 D 的连线就是曲线的切线。

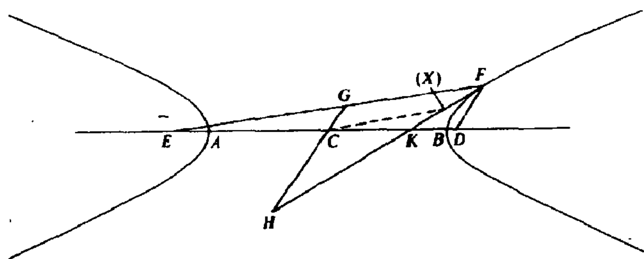
事实上,因为 ED,DF 都与曲线交于两点,故过点 D 作曲线的一直径是可能的,因而在每一侧作切线[Ⅱ,49]也是可能的。作切线 DB,DA,并令连结线 BA(如果可能的话)不经过两点 L,K,而只经过其中一点或两点都不过。

首先,假设这条直线只过点 L,且与线 FG 交于点 M,由此有 FM 比 MG 如同 FD 比 DG[Ⅲ.37]。这不可能发生,因为已假设 FK 比 KG 如同 FD 比 DG。另一方面,如果直线不过 L 和 K 点,就会出现对直线 DE,DF 都不可能发生的情况。

20.5. 双曲线和椭圆的焦点性质

(a)卷Ⅲ;命题 51

如果将一个等于图形的第四部分的矩形从两侧贴合到双曲线或反曲线的轴上,并且超出一个正方形,同时直线从贴合点被折向到曲线的任一支上,则两线段中长的比起短的来恰好长出轴的长度。



设有一双曲线或反曲线,AB 为轴,C 为中心,并且使矩形

AD,DB 及 AE,EB 的每一个等于图形的第四部分,同时从点 E 和 D 引线段 EF 和 FD,使它们折向曲线。

我认为 $EF=FD+AB$。

设 FKH 是过 F 所作的切线,过 C 作 GCH 平行于 FD;所以 $\angle KHG=\angle KFD$,因为它们是内错角。又 $\angle KFD=\angle GFH$[Ⅲ.48],所以 $GF=GH$。

但 $GF=GE$,因为也有 $AE=BD$,$AC=CB$,$EC=CD$,所以 $GH=EG$。

这样 $FE=2GH$。

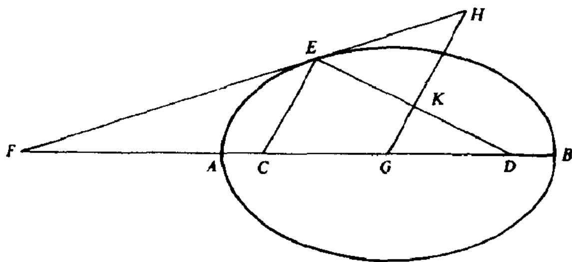
根据已证明的结果[Ⅲ.50],$CH=CB$,所以 $FE=2(GC+CB)$。

但 $FD=2GC$,且 $AB=2CB$,因此 $EF=FD+AB$。

这样,EF 比起 FD 来大出一个 AB。

(b)卷Ⅲ:命题 52

如果在一椭圆中,一个等于图形第四部分的矩形从两侧贴合到长轴上,并且亏缺一个正方形,同时从贴合点有直线被折向到曲线上,则它们等于轴长。



设有一椭圆,长轴为 AB,设矩形 AC,CB 和 AD,DB 的每一个等于图形的第四部分,并从 C 和 D 作直线 CE 和 ED 折向到曲线上。

我认为 $CE+ED=AB$

作切线 FEH,设 G 为中心,过 G 作 GKH 平行于 CE。由于

$\angle CEF=\angle HEK$[Ⅲ.48]，且$\angle CEF=\angle EHK$，所以也有$\angle EHK=\angle HEK$。

因此 $HK=KE$。

因为 $AG=GB$，$AC=DB$，所以也有 $CG=GD$；于是也有 $EK=KD$。

由此 $ED=2HK$，且 $EC=2KG$，$ED+EC=2GH$。

但又有 $AB=2GH$[Ⅲ.50]；所以 $AB=ED+EC$。

（高　嵘译　贺　霖校）

21. 丢番图:《算术》

公元1世纪至6世纪,是希腊数学史上所谓的“亚历山大后期”。这一时期最重要的发展,是突破前期以几何为中心的传统,使算术与代数成为独立的学科。这方面最有代表性的数学家无疑是丢番图(Diophantus)。关于丢番图的生平我们知之甚少,据几种史料可推断他大约公元250年前后活动于亚历山大城。丢番图的主要著作《算术》(Arithmetica),创用了一套缩写记号,被视为代数符号之滥觞。《算术》尤以不定方程问题的求解著称,以致今日数论与代数中将只求整数解的整系数不定方程称为“丢番图方程”。17世纪费马等人的数论研究,受到了丢番图《算术》的影响。

《算术》是一本问题集,解题方法巧妙多样,但缺乏一般性。该书丢番图自序称全书共有13卷,但1464年由雷格蒙塔努斯发现的希腊文本仅存6卷。1973年在伊朗境内的马什哈德(Mashhad)又发现4卷阿拉伯文抄本,据专家鉴定应属原著第4,5,6,7卷(含101个问题),而先前的希腊文本则为第1,2,3,8,9,10卷(含189个问题)。《算术》有几种拉丁文译本,其中1621年巴黎出版的译本,引出了费马的著名边注——“费马大定理”。《算术》还被译成了英、德、法、俄、现代希腊等多种文字。以下选译《算术》中的部分问题,出处随文注明。

(一) I 卷 7 题

(a)德拉布金(I. E. Drabkin)的直译[①]

从同一数中减去两已知数，使所得的两余数等于一已知比。

设从同一数中被减去的两已知数为 100 和 20，且较大余数是较小余数的 3 倍。

设所求的数是 $1x$。如果从中减去 100，所得余数为 $1x-100$，从中减去 20，余数为 $1x-20$。由于较大余数是较小余数的 3 倍，所以较小余数的 3 倍等于较大余数。较小余数的 3 倍是 $3x-300$，它应等于 $1x-20$。

在两边加上不足之数 300，则有 $3x$ 等于 $1x+280$。如果从等量中减去等量，则有 $2x$ 等于 280，因此 x 为 140。

现在回到所求的问题上去。由于已经假设所求的数是 $1x$，则 $1x$ 应为 140。如果从中减去 100，余数是 40；从中减去 20，余数是 120。较大余数是较小余数的 3 倍。

(b)希思的摘要式翻译[②]

从同一数[要求的数]中减去两已知数，使两余数等于一已知比。

令已知数为 100，20，已知比为 3∶1。

设所求的数是 x。则有 $x-20=3(x-100)$，由此得 $x=140$。

(二) I 卷 27 题[②]

求两个数，使它们的和与积均为已知数。

必要条件。两数和之半的平方与两数积的差必须为一平方数。

设和为 20，积为 96。

---

① 译自 M. R. Cohen and I. E. Drabkin(eds.)：A Source Book in Greek Science，p. 29. Harvard University Press，1948.

② 译自希思(T. L. Heath)：Diophantus of Alexander，A Study in the History of Greek Algebra，Cambridge，1885，希思的译本是最流行的英译本。

② 同①

$2x$ 为所求两数之差。

因此两数应为 $10+x$，$10-x$。

由此有 $100-x^2=96$。

所以 $x=2$，所求两数为 12 和 8。

(三) Ⅱ卷 8 题[①]

将一个已知的平方数分为两个平方数。

设将 16 分为两个平方数。

令第一个平方数 $=x^2$，则另一个平方数为 $16-x^2$；所以要求使 $16-x^2=$ 平方数。

取一正方形，形如 $(mx-4)^2$，其中 m 是任一整数，4 是 16 的平方根。不妨设其边为 $2x-4$，正方形本身为 $4x^2+16-16x$。因此应有 $4x^2+16-16x=16-x^2$。在等式两边加上负项并消去相同的项，可得 $5x^2=16x$，则 $x=\frac{16}{5}$。

所以所求两数一个为 $\frac{256}{25}$，另一个为 $\frac{144}{25}$，二者之和为 $\frac{400}{25}$，即 16，且每一个都是平方数。[②]

(四) Ⅲ卷 10 题[③]

求三个数，使其中任何两数之积加上一已知数均为平方数。

设已知数是 12。取一平方数(比如 25)，并减去 12。把差(13)作为第一，第二两数之积，并设这两数分别为 $13x$，$\frac{1}{x}$。

再从另一平方数比如 16 中减去 12，并把差(4)作为第二，第三两数之积。

---

① 译自 I. Thomas(ed.)：Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, vol. Ⅱ, pp. 551－553. Harvard University Press, 1939.

② P. de 费马(1601～1665)关于“费马大定理”的页边注解，就是针对第Ⅱ卷问题 8 而写。

③ 出处同(一)(b)。

因此第三个数$=4x$。

第三个条件要求$52x^2+12=$平方数;这里$52=4\cdot 13$,其中13不是平方数;但是,如果13是平方数,这个方程就可以很容易解了。

因此必须找两个数以取代13和4,使得它们的积为平方数,而其中任何一个数$+12$也是平方数。

如果两个数均为平方数,则二者之积也是平方数,因此必须找两个平方数,使其中任何一个数$+12=$平方数。

这是容易做到的,并且像上面说的那样,这也使方程很容易解了。

平方数$4,\frac{1}{4}$满足这一条件。

按照前面的方法,设所求的三个数为$4x,\frac{1}{x}$和$\frac{x}{4}$。现在要解方程$x^2+12=$平方数,不妨设$=(x+3)^2$。

所以$x=\frac{1}{2}$。于是$(2,2,\frac{1}{8})$是一组解。

(五)Ⅳ(A)卷3题[①]

求两个平方数,使其和是一个立方数。

设较小的平方数是x^2,较大的平方数是$4x^2$。二者之和为$5x^2$,它必须等于一立方数。令该立方数的立方根是x的任一倍数,不妨就设为x,则此立方数为x^3。因此,$5x^2$等于x^3。由于含x^2项的一边次数较低,所以用x^2除两边,可得x等于5。于是,因为假设较小的平方数是x^2,又因为x^2是x——已经求出是5——自乘,故知x^2是25。又因为令较大的平方数是$4x^2$,故知其为100,二者之和是125,它是以5为立方根的立方数。

因此,已求出两个和为立方数即125的平方数。这正是所要求

① "Ⅳ(A)"表示阿拉伯文本中的卷IV,相当于原书的第7卷,本题译自J. Sesiano: Book IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qusta ibn Luqa, Springer-Verlag, 1982.

的。

(六)Ⅳ(A)卷9题[①]

求两个立方数,它们构成了一个平方数。

设较大立方数的立方根是 $4x$,较小立方数的立方根是 x,那么,较大的立方数是 $64x^3$,较小的立方数是 x^3,它们构成的数是 $64x^6$;这必须等于一个平方数。令 x^2 的某一倍数为此平方数的平方根,其系数等于平方数 64 与 4 之积即 256 的平方根,其中 256 的平方根为 16。因而令此平方数的平方根为 $16x^2$,结果其平方为 $256x^4$,于是有 $64x^6$ 等于 $256x^4$。由于等式两边含 x^4 的项次数较低,所以用 x^4 除等式两边;用 x^4 除 $64x^6$ 得 $64x^2$,而用 x^4 除 $256x^4$ 得 256。于是有 $64x^2$ 等于 256,从而 x^2 等于 4;x^2 为平方数,4 也是一个平方数,所以二者的平方根相等;而 x^2 的平方根是 x,4 的平方根是 2,故 x 等于 2。因我们设 x 是较小立方数的立方根,可知较小的立方数是 8,又因 $4x$ 即 8 是较大立方数的立方根,可知较大的立方数是 512。用较小立方数乘它,即得二者所构成之数,即 4096,它是以 64 为平方根的平方数。

因此,已求出积为平方数的两个立方数,即 8 和 512,这就是所要求的两个数。

现在假设要求出一个立方数,使得以一立方数除它后,结果为一平方数;这应寻找一个平方数,使得用另一个立方数——也是要寻找的——乘它后,乘积是一个立方数。上述二数找到后,二者的乘积就是所求的立方数。

同样,如果欲求一个平方数,使得用一个平方数去除它,结果为一个立方数:这可用同前述相反的方法解决。

类似地,任何与除法有关的问题,与前述问题均属同一种类:这两类问题实际上可归结为一类,因为除法只不过是乘法的逆运算。

---

① 出处同(五)。

（七）Ⅵ(A)卷 11 题[1]

求一个立方数，使得与其平方相加，结果为一个平方数。

设立方数的立方根是 x，则该立方数是 x^3。将 x^3 加到它的平方即 x^6 上，则得 x^6+x^3，我们要求它必须为一平方数。设该平方数的平方根是 x^3 的某一倍数，使得从其平方中减去 x^6 时，余数是一个立方数；$3x^3$ 满足这一条件：从 $3x^3$ 的平方中减去 x^6，得余数 $8x^6$，它是一个立方数。因此，如果使 $8x^6$ 与一立方数相等，这一问题将是可以解决的。$3x^3$ 自乘，得 $9x^6$，让它等于 x^6+x^3。消去同类项 x^6，可得 $8x^6$ 等于 x^3。用 x^3 除等式两边，可得 $8x^3$ 等于 1；因此 x^3 等于 $\frac{1}{8}$，即 8 中的一份。如果将其加上它的平方，即加上 64 份中的一份，结果是 64 份中的 9 份，它是以 8 份中的 3 份为平方根的平方数。

因此，已找到一个符合要求的数，它是 8 份中的一份，这就是所求的数。

（八）V(G)卷 9 题[2]

将 1 分为两部分，使同一个已知数加到任一部分上，结果都是平方数。

必要条件。已知数不能是奇数，并且该数的两倍加 1 不能被任何增加了 1 就可被 4 除尽的质数[即形如 $4n-1$ 的一切质数]除尽。

设已知数是 6。因而 13 应被分为两个平方数，其中每一个 >6。如果能将 13 分为差 <1 的两个平方数，就解决了这个问题。

取 13 的一半即 $6\frac{1}{2}$，必须对它加上一个小的分数，从而使其

---

① 出处同（五）

② “V(G)”表示在希腊文本中的卷 V，相当于原书的第 9 卷，本题翻译所据底本同（一）(b)。

为一个平方数，或者，将其乘以 4，则必须使$\frac{1}{x^2}+26$ 为一个平方数，即 $26x^2+1=$平方数，不妨设$=(5x+1)^2$，由此 $x=10$。

这就是说，为使 26 成为一个平方数，必须加上$\frac{1}{100}$，或者说，要使$6\frac{1}{2}$成为平方数，须加上$\frac{1}{400}$，即$\frac{1}{400}+6\frac{1}{2}=(\frac{51}{20})^2$。

因此，必须将 13 分为两个平方数，使得每一个平方数的平方根尽可能接近$\frac{51}{20}$。

由于 $13=2^2+3^2$，所以，要找两个数，使 3 减第一个数$=\frac{51}{20}$，从而第一个数$=\frac{9}{20}$，而 2＋第二个数$=\frac{51}{20}$，从而得第二个数$=\frac{11}{20}$。

因此可把所求的两个平方数写成$(11x+2)^2$、$(3-9x)^2$ 的形式[用 x 代替$\frac{1}{20}$即得]。

二数和$=202x^2-10x+13=13$。

所以 $x=\frac{5}{101}$，所求两数的平方根分别为$\frac{257}{101}$，$\frac{258}{101}$。

从每一个平方数中减去 6，就可得到 1 的两部分：$\frac{4843}{10201}$，$\frac{5358}{10201}$。

(九)VI(G)卷 19 题[①]

求一个直角三角形，使它的面积加上一直角边是一个平方数，而它的周长是一个立方数。

从某一不确定的奇数如 $2x+1$ 来作一直角三角形，于是高$=2x+1$，底$=2x^2+2x$，从而斜边$=2x^2+2x+1$。

因为周长＝立方数，即 $4x^2+6x+2=(4x+2)(x+1)=$立方数；那么，若用 $x+1$ 除上述直角三角形各边，则我们应使 $4x+2$

---

① 出处同(一)(b)。

为一立方数。

另外，面积＋一条直角边＝平方数；

从而有$\frac{2x^3+3x^2+x}{(x+1)^2}+\frac{2x+1}{x+1}$＝平方数；即$\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$＝$2x+1$＝平方数。

而 $4x+2$＝立方数，因此应找一个立方数，它是一个平方数的两倍，8 就是这样的数。

因而有 $4x+2=8$，$x=1\frac{1}{2}$。

所求直角三角形是$(\frac{8}{5},\frac{15}{5},\frac{17}{5})$。

（十）Ⅵ(G)卷 21 题[①]

求一直角三角形，使其周长是一个平方数，而周长加上面积是一个立方数。

作直角三角形由 x、1 组合而成。

于是两直角边为 $2x$、x^2-1，从而斜边为 x^2+1。

因此 $2x^2+2x$ 应是一个平方数，同时 x^3+2x^2+x 应是一个立方数。

很容易使 $2x^2+2x$ 为一个平方数，令 $2x^2+2x=m^2x^2$，因此 $x=2/(m^2-2)$。

由第二个条件知，$\frac{8}{(m^2-2)^3}+\frac{8}{(m^2-2)^2}+\frac{2}{m^2-2}$必须是一立方数，即$\frac{2m^4}{(m^2-2)^3}$＝立方数。

因此 $2m^4$＝立方数，即 $2m$＝立方数，不妨设＝8。

从而 $m=4$，$x=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$，$x^2=\frac{1}{49}$。

但三角形的一条直角边为 x^2-1，并且不能从$\frac{1}{49}$中减去 1。

所以必须另外找一个大于 1 的 x 值；从而有 $2<m^2<4$。

---

① 出处同(一)(b)。

由此知，必须找一个立方数，使其平方的$\frac{1}{4}$大于2，而小于4[①]。

设Z^3为这样的一个立方数，则应有$2<\frac{1}{4}Z^6<4$，即$8<Z^6<16$。

$Z^6=\frac{729}{64}$，即$Z^3=\frac{27}{8}$满足上述条件。

因此$m=\frac{27}{16}$，$m^2=\frac{729}{256}$，于是$x=\frac{512}{217}$，其平方>1。

故所求三角形为$[\frac{1024}{217},\frac{215055}{47089},\frac{309233}{47089}]$。

（周冬梅 译　贺霖 校）

① 这里所说的立方数指$2m$而言，即由第二个条件知$2m=$立方数，不妨设$2m=Z^3$，则$m^2=\frac{1}{4}(Z^3)^2$，而$2<m^2<4$，所以$2<\frac{1}{4}(Z^3)^2<4$。

22. 帕波斯:《数学汇编》

亚历山大后期的希腊几何,已失去前期的光辉,除了在测量和三角学方面的创造(如海伦《量度》(Heron: Metrica,约62A. D.)、门纳劳斯《球面学》(Menelaus of Alexandria: Sphaerica,约100A. D.)、托勒密《天文学大成》(Ptolemy:Almagest,约150A. D.)等,这一时期的几何研究大都以对前代名家著作的评注形式出现,它们成为我们现今所掌握的希腊数学资料的重要来源。

帕波斯的《数学汇编》(Mathematical Collection)就是一部荟萃总结前人成果的典型著作。帕波斯(Pappus)生卒年月不详,据考约活动于公元300—350年间。《数学汇编》除了记述大量先贤的工作,也包含有他自己的贡献和思想,如等周问题研究,旋转体体积计算等,有些内容还刺激了近代解析几何、射影几何的生长。《数学汇编》被认为是古希腊数学的"安魂曲"。帕波斯之后,希腊数学益趋衰微。公元641年,回教徒彻底焚毁了亚历山大图书馆,希腊古代数学至此落下帷幕。

帕波斯《数学汇编》共8卷,卷Ⅰ和卷Ⅱ前一部分已失传,现有唯一较完全的现代语译本是P. V. 埃克(Eecke)的法译本:Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathematique, Paris-Bruges, 1933. 本书[17]中已摘录了帕波斯关于三大作图问题的论述,以下根据几种部分英译本摘译《汇编》卷Ⅲ中关于几何问题分类的论述、卷Ⅴ所论"等周问题"的前言部分以及卷Ⅶ中关于分析与综合的论述。

22.1. 论三类几何问题[①]

当古代的几何学家们希望将一已知的直线角分成三个相等的部分时，他们被下述的原因所困扰。我们说，它们是几何中的三类问题，所谓的“平面”，“立体”和“线性”问题。那些能用直线和圆解决的问题被恰当地称为“平面”问题，因为解决这种问题所依赖的线在平面上有其渊源。那些利用一条或多条圆锥曲线解决的问题，称为“立体”问题，因为在作图中需要应用立体图形，也就是说圆锥的表面。还剩下第三类，所谓的“线性”问题。因为在这些问题的作图中，需要不同于已经提到的那些曲线，这些曲线具有更为多样和人为的来源，由更加不规则的表面和更复杂的运动产生。具有这一性质的是在所谓的“曲面轨迹”中发现的曲线以及许多其他的由亚历山大的迪米特里厄斯发现并记录在他的《曲线论》中的曲线，还有蒂亚纳的菲洛通过将普勒克托面(Plectoids)和其他各种曲面结合而发现的更为复杂的曲线。这些曲线具有许多奇妙的性质，近期的作者确实认为其中某些曲线值得扩展开来讨论，其中的一种曲线被门纳劳斯称为“矛盾曲线”，其他的这类曲线有螺线、割圆曲线、蚌线以及蔓叶线。

几何学家用圆锥曲线或线性曲线探究平面问题的解，或一般地用一种不适当类型的曲线求解，被认为是一种严重的失误。这方面的例子可以在阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》第5卷的抛物线问题中以及阿基米德关于螺线的著作里有关圆的立体斜伸的应用中找到。在后一个例子中，不应用立体方法证明阿基米德的定理是可能的，即第一圈的圆周等于与极轴成直角且与螺线的切线相交的线段。

由于这些不同种类问题的存在，上述三等分一个角的问题依其性质是一个立体问题，过去通过平面寻求解决途径的几何学家们无法继续下去，因为他们那时还不熟悉圆锥曲线并被这个原因所阻碍。但是后来借助于圆锥曲线他们用以下斜伸的解法将一个

---

① Pappus: Mathematical Collection, Ⅳ. 译自 M. R. Cohen and I. E. Drabkin (eds.), A Source Book in Greek Science, pp. 67～68. Harvard Univerity Press, 1948.

角三等分。

22.2. 论蜂巢的几何[①]

尽管上帝已将最出色最完美的智慧和数学的理解力赋予了最优秀的人类，他同时也分赐某些非理性的生物一点灵性。对于人来说，由于被赋予了理智，上帝认定他们应该按照道理和论证来做每件事，但是对于其他的非理性生物，他仅仅给了这一点赠予，基于某种自然的长远考虑，它们每一个都应当得到所需的那么多去维持生命。可以看到这种天性存在于许多别种的生物中，但在蜜蜂中尤其明显。它们良好的秩序以及对于统治它们全体国民的蜂王的服从确实令人钦佩，但更令人钦佩的是它们的争先恐后，采集蜂蜜时的一尘不染以及它们保护蜂蜜时的深谋远虑和小心谨慎。毫无疑问，它们相信自己从上帝那里接受了任务，以这种方式让比较有修养的一部分人类来分享这种神秘的美食。它们认为将其粗心地倾泻于土地、树木或其他不适宜或不规则的材料上是不恰当的。但是，在采集生长于土地上的甜美的花朵中的精华部分时，它们准备了盛装蜂蜜的容器，称为蜂巢，所有的蜂巢相等、相同并且毗连在一起，形状是六边形的。

我们可以推断，它们依据某种几何的构想设计了这种蜂巢。它们必然想到了为使空隙中不落入异物而弄脏它们的产品，所有的图形必须一个连着一个，而且有公共边。由于不规则图形会使蜜蜂们不快，这样，只有三种直线图形满足条件，我指的是等边等角的规则图形。正三角形、正方形和正六边形能够一个连一个并且有公共边而不留下不规则的空隙。同一点周围的区域能被六个等边三角形和六个角填满，每个角都是$\frac{2}{3}$直角；或者被四个正方形和四个直角填满；或者被三个正六边形和三个正六边形的角填满，每个角

① Pappus：Mathematical Collection，V．译自 I. Thomas，Selections Illustrating the History of Greek Mathematics，vol，Ⅱ，pp. 589～593. Harvard University Press，1939.

都是$1\frac{1}{3}$直角。但是三个五边形不足以填满同一点周围的区域，而四个又超过了所需，因为正五边形的三个角小于四个直角（由于每个角是$1\frac{1}{5}$直角），而四个角大于四个直角。三个正七边形也不能放置在同一点周围，使各边彼此相连，因为正七边形的三个角大于四个直角（由于每个角是$1\frac{3}{7}$直角）。同样的讨论可以用于有更多角的正多边形。于是有三种图形自身可以铺满同一点周围的区域，正三角形，正方形和正六边形。蜜蜂凭它们的智慧为它们的产品选择了角数最多的图形，它们觉察到正六边形比其他两种能够贮存更多的蜂蜜。

那么，蜜蜂只知道这个对它们有用的事实，即花费同样的材料建造蜂巢时，正六边形比正三角形和正方形蜂巢大，从而可以贮藏更多的蜂蜜。但是自认为在智慧方面比蜜蜂更胜一筹的我们将研究稍微广泛一些的问题，即周长相等的等边等角的平面图形中，角越多的面积越大，其中面积最大的是具有相同周长的圆。

22.3. 论分析和综合[①]

我亲爱的希莫多罗斯，所谓的《分析荟萃》，简而言之，是一种特殊的学说体系，它满足了一些人的要求，他们全面研究了基本原理之后，希望获得力量去解决给他们提出的包括曲线在内的问题，这部著作只有为此目的才是有用的。《分析荟萃》包含三个人的工作，《几何原本》的作者欧几里得，珀尔加的阿波罗尼奥斯以及比较年长的阿里斯泰奥斯，从分析和综合的方法开始论述。

分析方法是将要探求的结论当作似乎已被承认的，并且通过它的推论得到一个结论，它作为综合的结果已被承认；在分析中，我们假定要探求的已经得到，我们探索它如何发生，进而再问后者

① Pappus: Mathematical Collection, Ⅶ. 译自 I. Thomas (ed.): Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, vol. Ⅱ. pp. 597～601. Harvard University Press, 1939.

先前的原因是什么，如此下去，追溯我们的步骤，直到遇到已知或基本原理；这样的方法我们称为分析，是一种反向的解法。

但在综合中，程序是相反的，我们从在分析中最后达到的结果出发，并将原先作为前项推论的逐步结果按自然顺序排列起来，使它们彼此联系最后到达我们要探求的结构，我们称其为综合。

分析有两种，一种，其目的是探求真实性，称为理论型的，另一种，目的是发现要寻找的结果，称为问题型的。在理论型中，我们假定要探求的主题存在并且真实，然后通过它的推论到达已被承认的事实，这些推论似乎也是真实的，且按我们的假设确立。另外，如果已被承认的是真实的，那么要探求的也是真实的，证明就是分析的逆过程。但是如果我们意识到已经承认的是错误的，那么要探求的也将是错误的。在问题型中，我们假定要求的已知，然后我们通过推论得到已被承认的，这些推论似乎是真实的；那么，如果被承认的是可能的，而且能够得到，也就是，如果它是数学家们所称的已知的，那么起初提出的问题也将是可能的，证明也是分析的逆过程，但是如果我们一旦意识到被承认的是不可能的，那么问题也将是不可能的。

这就是分析和综合。

这里是上述的《分析荟萃》各卷的顺序。欧几里得的《已知数》1 卷，阿波罗尼奥斯的《截取线段成定比》2 卷，《截取面积》2 卷，《确定的曲线》2 卷，《论相切》2 卷，欧几里得的《推论集》3 卷，阿波罗尼奥斯的《倾斜》2 卷，《平面轨迹》2 卷，《圆锥曲线论》8 卷，阿里斯泰奥斯的《立体轨迹》5 卷，欧几里得的《曲面的轨迹》2 卷，埃拉托塞尼的《论平均值》2 卷。一共 33 卷，其内容就我已陈述出来供诸位检查的阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》而言，不仅包含命题的个数，可能性的条件以及每卷中论及的实例，而且包含所需的预备定理。实际上，我相信我没有遗漏任何在研究这些著作时出现的应探究的问题。

（高　嵘译　梁宗巨校）

Ⅲ. 文艺复兴的欧洲[①]

① 在本篇标题下，我们也选录了欧洲文艺复兴前准备阶段重要数学家斐波那契、奥雷姆等的代表性著作。

23. 斐波那契:《算经》

欧洲数学在希腊文明衰落之后长期处于停滞状态，直到12世纪才有复苏的迹象。这种复苏开始是受了翻译、传播希腊、阿拉伯著作的刺激。对希腊与东方古典数学成就的发掘、探讨，最终导致了文艺复兴时期(15～16世纪)欧洲数学的高涨。

文艺复兴的前哨意大利，由于其特殊地理位置与贸易联系而成为东西方文化的熔炉。意大利学者早在12～13世纪就开始翻译、介绍希腊与阿拉伯的数学文献。欧洲黑暗时代以后第一位有影响的数学家斐波那契(Fibonacci，约1170～1250)，其拉丁文代表著作《算经》、《几何实践》等也是根据阿拉伯文与希腊文材料编译而成的。斐波那契，即比萨的列昂纳多(Leonardo of Pisa)，早年随父在北非从师阿拉伯人习算，后又游历地中海沿岸诸国，回意大利后即写成《算经》(Liber Abaci，1202，亦译作《算盘书》)。《算经》最大的功绩是系统介绍印度记数法，影响并改变了欧洲数学的面貌。现传《算经》是1228年的修订版，其中还引进了著名的“斐波那契数列”。

《几何实践》(Practica Geometriae，1220)则着重叙述希腊几何与三角术。斐波那契其他数学著作还有《平方数书》(Liber Quadratorum，1225)、《花朵》(Flos，1225)等，前者专论二次丢番图方程，后者内容多为菲德里克(Frederick)二世宫廷数学竞赛问题，其中包含一个三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 求解，斐波那契论证其根不能用尺规作出(即不可能是欧几里得的无理量)，他还未加说明地给出了该方程的近似解($x=1.36880810785$)。

以下节录《算经》部分内容，原载 B. Boncompagni (ed.)：Scrittirdi Leonaido Pisano，卷 I. 1857～1862，

Rome. [23.6]则摘自 Fibonacci 致 Theodorus 的一封信，原载 B. Boncompagni (ed.)：同上，卷 Ⅱ.，pp. 247～252.

23.1. 印度阿拉伯数码

这是九个印度数码

9 8 7 6 5 4 3 2 1

用这九个数码以及记号 0(阿拉伯文称为零)可以写出任何数，在下面将作阐述。

23.2. 连分数

设在横线下记 2，6，10。2 之上记 1，6 之上记 5，10 之上记 7。即$\frac{1\quad 5\quad 7}{2\quad 6\quad 10}$。横线一端：7 在 10 上，表示$\frac{7}{10}$；而 5 在 6 上，表示小数的$\frac{5}{6}$；而 1 在 2 上则表示小数的$\frac{1}{6}$的一半①。我们将要说，在横线之上的这些分数是分等级的，其中第一级是横线右端那个数，第 2 级是靠左那个分数，例如上面的$\frac{1\quad 5\quad 7}{2\quad 6\quad 10}$，$\frac{7}{10}$是第一级，而$\frac{5}{6}$是第二级，……。

23.3. 兔子问题

一年内一对兔子可以繁衍到多少对?某人有一对兔子，养殖在某地完全封闭的围墙内，我们希望知道在一年内能繁衍到多少对?如果事情是这样：每对兔子每月生一对小兔子，而小兔子出生后，第二个月就能生育，设第一对兔子在第 1 个月生了 1 对，兔数加倍，一个月内有 2 对。在这[2]对中，第一对在第 2 个月又生了 1

---

① 因此$\frac{1\quad 5\quad 7}{2\quad 6\quad 10}=\frac{7}{10}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}$

一般说，这种连分数是指

$$\frac{e\,c\,a}{f\,d\,b}=\frac{a+\frac{c+\frac{e}{f}}{d}}{b}=\frac{adf+cf+e}{bdf}=\frac{a}{b}+\frac{c\cdot 1}{db}+\frac{e\cdot 1\cdot 1}{fbd}$$

对。所以在第 2 个月有 3 对。此后一个月内有 2对兔子怀孕，所以在第 3 月内有 2 对兔子出生，此月有 5 对兔子，此后在同一月内有 3 对怀孕，所以在第 4 月内有 8 对，其中 5 对将生 5 对小兔子，加上原来 8 对，在第 5 个月内有 13 对。其中 5 对[在同一个月内出生的]在这月内不能怀孕，而其余 8 对怀孕。因此在第 6 个月内有 21 对。当我们把第 7 个月出生的 13 对加上，就得到这个月有 34 对……[如此等等，55，89，144，233，377]……最后有 377 对。这是说第 1 对在某地一年中繁衍的兔子对数。你可以看到在右边我们写的那样：首数与第 2 个数合并，因此 1 与 2，第 2 与第 3 个，第 3 与第 4 个……，最后我们合并第 10 与第 11 个，即 144 与 233，我们就得到上面所讲的兔子 377 对。对照此法、此例你可以获得直到无究多个月的[兔子对数][①]。

月序	对
	1
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55
9	89
10	144
11	233
12	377

23.4. 双假设法

阿拉伯文的 elchataieym 译成拉丁文是 duarum falsarum posicionum regula。[②] 借助于此法几乎所有问题都能求解。随意取二次假设。这意味着有时二者都小于真值，有时都大于，有时一个大于、一个小于[真值]。从二次假设差的比例以获得准确解。这就是从第四比例法则求出。这里包含有三个数，借此列出第四个[未知]数，这就是所求准确解，其中第一个数是二次假设的差。第二个

---

① 数列 1，1，2，3，5，8，…，u_n，…称为斐波那契数列，它具有许多重要性质，在现代数学中有广泛应用。

尽管斐波那契数列的通项公式及其一系列珍宝般的数学现象是后人化几个世纪的心血得到的，我们不能忘记，这些成果都起因于这个兔子问题。

② 英文是 rule of double false position。

数是借助于假设差使成为准确值的近似数。第三个数是使近似于真值的差数。吾人希望能表达他们怎样用天平秤法则解题。因此用以阐明这些差在平衡中所起的巧妙作用，使你理解用双假设法巧妙地解其他问题。①

23.5. 植树问题

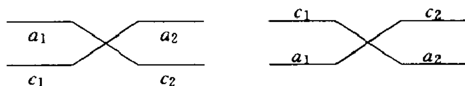
有一棵树，$\frac{1}{4}$又$\frac{1}{3}$在地下，长 21 帕米，问：这棵树全长是多少？

因为[它的]$\frac{1}{4}$又$\frac{1}{3}$是 21，我们假设这棵树被分成 12 等分，它的$\frac{1}{3}$又$\frac{1}{4}$是 7 等分，长 21 帕米。因此是 7 比 21，也将是 12 等分与树全长之比。四个数成比例，第一个数乘以第四个数等于第二个数乘以第三个数，所以如果你把第二个数 21 乘以第三个数 12，再除以第一个数 7，就得 36。第四个[未知]数就是树全长，或者说，21

---

① 李约瑟在《中国科学技术史》第 3 卷（中译本 p.265）说：这个假设法无疑是由阿拉伯数学家传到欧洲的，……，这个方法可能起源于中国，因为正如钱宝琮所指出，这个方法的确是中国的盈不足术。

尤什凯维契在《中世纪数学史》第 3 章（俄文版 p.201）说：11 世纪时欧洲有译自阿拉伯文的拉丁文本《增损术》，所谓增损术是指对于方程 $ax+b=c$ 作二次假设：$x=a_1$，如 $aa_1+b=c+c_1$，而 $x=a_2$，如 $aa_2+b=c+c_2$，作中间交叉的平行线，形如天平秤



把二次假设数 a_1,a_2 写在秤的中间。如果 c_1,c_2 是增多（正数）就记在秤下（左图），如果是减损（负数）就记在秤上（右图），把假设数和增损分别交叉相乘，如果增（损）数在同一侧，所求 x 用公式

$$x=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{c_1-c_2}$$

如在两侧，则用公式

$$x=\frac{a_1c_2+a_2c_1}{c_1+c_2}$$

这就是双假设法。

是 7 的 3 倍。取 12 的 3 倍,同样得到 36。

我们还运用另一种方法,这就是你随便假设未知数为任选的数,但必须按问题中所设数能分成整数份数。根据问题原设,从所设数你试着求出题中解答的比,例如在这问题中我们要求树全长,我们就假设全长是 12,因为这可以被 3,被 4 整除,这就是题给的除数,因为题中说树的$\frac{1}{4}$又$\frac{1}{3}$是 21,你所假设的 12 取其$\frac{1}{3}$及$\frac{1}{4}$,他们将是[合并起来]7,如果这个[和]刚巧是 21,我们已获得了所求的答案。就是说[$\frac{1}{4}$又$\frac{1}{3}$份应是]21 帕米。但是这里却是 7,不是 21,那么 7 比 21,所以我们假定的树长将从 12 比 36 得到,因此我们可以说,我设 12,得 7;那么我应该设多少,才能得到 21? 应该用这种方法表达:我们可以看出,最终我们把这些数相乘:12 乘以 21,其和[注意,应是积]应除以余下的数①。

23.6. 购鸟问题

有人买麻雀,1 钱币买 3 个,斑鸠 1 钱币 2 个,鸽子 2 钱币 1 个,30 个钱币买 30 个鸟,我们需要知道各种鸟他买了几只。我先假设 30 只麻雀需要 10 个钱币,余下 20 个钱币,这是 30 钱币与 10 之差,然后我以 1 只麻雀交换 1 只斑鸠,这样就增加[付款]$\frac{1}{6}$钱币,这是因为麻雀每只值$\frac{1}{3}$钱币,而斑鸠值$\frac{1}{2}$钱币,贵麻雀$\frac{1}{6}$钱币。然后,我以 1 只麻雀交换 1 只鸽子,使变动了 $1\frac{2}{3}$,就是$\frac{1}{3}$钱币与 2 钱币之差,我取 6 个 $1\frac{2}{3}$,变换 6 个,得到 10。据此我应该调出麻雀,改为斑鸠和鸽子,直到把余下的 20 个钱币用完。所以我取他们的 6 倍,我得到 120。把它分成二部分:其中一部分刚好使为 10 整除,其余一部分为 1 整除,其二次分的[结果的]总和不能超过 30。其第一部分是 110,其余是

① 这种解题方法称为单假设法。

10,我分第一部分 110 为 10 份,第二部分为 1 份。我就得到 11 只鸽子和 10 只斑鸠。30 只鸟数之中,余下 9 只作为麻雀,麻雀共值 3 个钱币,而 10 只斑鸠值 5 个钱币,11 只鸽子值 22 个钱币,这样三种鸟共 30 只,值 30 个钱币,这就是所求的①。

23.7. 狮、豹和熊

狮子在 4 小时内吃掉一只羊。豹 5 小时,熊 6 小时[吃尽],问:把一只羊扔给它们,几小时内吃尽?你可以这样计算:对于狮子吃尽一只羊需 4 小时,记$\frac{1}{4}$;豹吃尽一只羊需 5 小时,记$\frac{1}{5}$;熊吃尽一只羊需 6 小时,记$\frac{1}{6}$。因为$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{4}$[恰]可以找到 60,假使 60 小时内他们能够吃多少只。然后考虑:60 小时内一只狮子能吃 15 只羊;而豹能吃 12 只羊,即 60 的$\frac{1}{5}$是 12;同样熊能吃 10 只羊,即 60 的$\frac{1}{5}$是 10。因此在 60 小时内,[即三兽同时]吃,15 加 12 加 10 只羊,即 37,所以你可以说:我所设 60 小时内他们将吃掉 37 只羊,我应该怎样设想他们只吃掉一只羊要多少时间?所以 1 乘以 60,除以 37,得 $1\frac{23}{37}$。在这数[小时]内它们将吃掉一只羊。

23.8. 一次同余组

设计一个数,除以 3、除以 5、也除以 7,问每次除法各剩余多少。对于除以 3 所剩余的每个单位 1,要记住 70;对于除以 5 所剩余的每个单位 1,要记住 21;对于除以 7 所剩余的每个单位 1,要记住 15,这样的数如大于 105,则减去 105,其剩余就是所设计的数。例如:设一数除以 3 余 2,记住 70 的 2 倍或 140,其中减去 105,则剩余 35,若除以 5 余 3,记住 21 的 3 倍或 63,与上述 35 相加得

① 《张丘建算经》(5 世纪)卷下第 38 题,百鸡百钱题,印度摩诃毗罗《文集》(9 世纪)第 6 卷第 152 节:"5 只鸽子值 3 钱币,9 只鹅值 7 钱币,3 只孔雀值 9 钱币,某人为取悦王子,以 100 钱买 100 只鸟,以为礼品。问:能买鸟几只?"均为同类算题。

98。若除以 7 余 4，记位 15 的 4 倍或 60，与上述 98 相加则得 158，减去 105，其剩余是 53，这就是所设计的数[①]。

（沈康身 译）

① 与《孙子算经》卷下"物不知数"题同。

24. 奥雷姆:论形态幅度

文艺复兴准备阶段另一位值得一提的数学家是奥雷姆(N. Oresme,约 1320～1382)。奥雷姆是法国巴黎纳瓦尔(Navarre)学院神学教师,后来还担任过鲁昂大教堂教长和利雪的主教。他受法王查理五世之命翻译了亚里士多德的著作并作评注。在数学上,奥雷姆最主要的贡献是提出“形态幅度”原理。“形态幅度”(Latitudines formarum)亦译称“图线”,是奥雷姆为研究“质”的“强度”的变化与变化率而引进的概念,其思想已接触到在直角坐标系中用曲线表示函数的图象。奥雷姆借用了“经度”与“纬度”的地理术语来叙述他的图示法,相当于纵坐标与横坐标。关于“形态幅度”的论述主要载于奥雷姆《论均匀与非均匀的强度》(De Uniformitate et Difformitate Intensionum,约 1350)和《论形态幅度》(Tractatus de Latitudinibus Formarum,约 1350)两部著作中。以下摘录《论形态幅度》的有关内容,转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 135～138。

(a) 从图形可以看出,一个面的纬度是由与底垂直的线段来判定的。

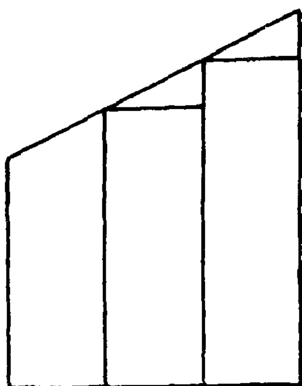
(b) 若用来判断面的纬度的线段全都相等,则这个面叫作纬度均匀或相等;若这些线段不相等且端点到达一条不与底平行的线(顶线)[①],则该面叫作纬度相异。

(c) 若每三个或更多的等距纬度线互相多出的量成算术比例[图 1],即第一条纬度线比第二条纬度线多出的量等于第二条比第三条多出的量,则称纬度为均匀地相异,这时顶线看来是一条不

① 顶线:相当于函数的曲线。

与底平行的直线。

(d) 若纬度线不像这样以算术比例互相超出，则纬度叫作非均匀地相异，这时顶线不是直线，且纬度的相异随顶线的变化而变化。


图 1

……

(a) 对于一种质，我们表示出了两种东西，即度的增强和主体的延展，所以结果是这种质被想象成二维的[①]。

正因如此，有时说一种质有纬度和经度而不说有强度和广度。

(b) 质可被想象为属于一个点或属于象精神这样一个不可分的对象，但也可想象为属于一条线，甚至属于一个面和一个体。

结论 1：一个点或一个不可分对象的质可以用一条线表示，因为它仅有一个维度，即强度。由此得出，这样的质，比如知识和品德，不能称作是均匀的或非均匀的，正像一条线不能称作是均匀的或非均匀的一样。同时也能得出，所谓"知识和品德的纬度"是不恰当的说法，因为没有与之相关联的经度，而每种纬度都必须首先假定有一个经度。

结论 2：线的质可以用面表示，其中经度为物体的直线性广度而纬度为其强度，此强度由物体经度线上作的垂线表示。

结论 3：同样，面的质可用体表示，体的长和宽为面的广度，体的深是质的强度。同理，整个物体的质可用一个体来表示，此体的长度与宽度将是整个物体的广度，其深度将是质的强度。

但有人也许会问：若线的质由面表示，面的质由三维的体表

---

① H. L. L. 巴萨德评注：这意思是说，任何一种被扩展的质的广度可被指定为描绘在主体中的一条线或一个面（叫作经度）。在主体中各点上的质的强度要表示为与该同一质的经度垂直的线（叫作纬度）。这样，纬度充当了一个坐标系中变化的纵坐标，而经度却不能看作是变化的横坐标；只存在一个带有无穷多个纬度的经度。

示，则体的质就无疑要用某种四维的东西以不同类的量来表示了。

我认为没有必要给出第四个维度。事实上，如果想象流动的点形成线，流动的线形成面，流动的面形成体，就会想到，流动的体不一定要形成第四种量，而仅是体便够了，因为这一点，亚里士多德在他的《论苍穹 I》[①] 中说，按照这种表示方法是无法从一个体到达一种不同类的量的。在我们考虑的这个例子中我们也当这么想。所以要讲的是线的质。面或体的质的情况与其类似。

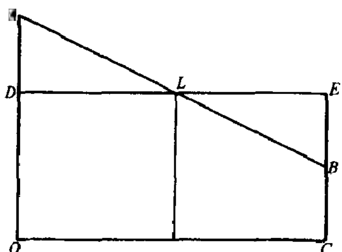


图 2

结论 4：均匀的线性的质可由高度均匀相等的矩形表示，使得底表示广度，顶线与底平行。

均匀地相异的质可由纬度均匀地相异的面来表示，使得顶线不与底平行。可以证明：质的各点的强度与过底上相应点的垂线的纬度成比例。

正如面可按两种方式均匀地相异那样，质也可按两种方式均匀地相异：

(a) 此种质的终点可为零度，于是用一个纬度均匀地相异地降至零的面，即用一个三角形来表示。

(b) 此种质的两端的终点可以是某些度数。于是用一个顶线不平行于底线的四边形，既用一个直角梯形来表示。

结论 5：通过以上论述可以证明，均匀地相异的质就等于中间的度数（图 2），即正好同度数为中间点度数的一个均匀的质一般大。面的情况可以同样证明[②]。

---

① 摒弃第四维度是基于亚里士多德《论苍穹》I 中的看法。这是文艺复兴时期颇流行的观点，甚至在卡尔达诺和韦达看来，二次方程是与平面有联系的，而三次方程与立体有关（见《选集》I．3，5）。尽管帕斯卡、沃利斯和拉格朗日偶尔有过一些四维几何的评述，但直至 19 世纪人们才认真地研究四维几何。

② 结论 5 常被称作"默顿法则"。见 E.J. 迪克斯托会斯《世界图景的机械化》（克莱兰东出版社，牛津，1961）197 页

最后的一个结论：一个非均匀地相异的质可以由一个面来表示，其中底代表对象本身，而顶线不是直线，也不平行于底，此种相异性可以想象成有无穷多种不同的方式，因为顶线可有许许多多不同情况的变化。

可有人也许认为没有必要这样来表示质。而我认为这种方法还是不错的，亚里士多德也是这么做的[①]，他把时间表示为一条直线。同样地，在《论透视》中，散射的光表示为一个三角形[②]。不但如此，按照这种表示法还可以更容易地理解所说的均匀地相异的质。所以这种表示方法是好的。

（李家宏 译　贺　霖 校）

---

①亚里士多德《物理学》Ⅳ，在第 219 b 1～2 行亚里士多德定义时间为"沿着从前到后方向的无尽运动"(numerus motus secundum prims et posterius)。这里他试图解释"现在时刻"。一方面，他把时间分作两个部分(过去——将来)，而另一方面又使时间连续。他把时间与一直线相比，其上一点既造成一种分割，同时又建立了直线上的连续性。

②virtus activa，是从光源(lumen)散射出的光。在后来的问题 17 中，奥雷姆作断言："这样的力或光均匀地相异地扩展，或者说，它是一种均匀地相异的质。这看起来似乎有道理，因为——鉴于力并不是均匀扩展的——它似乎是随着距离的增加而减弱；这种减弱是按比例发生的，即均匀地相异地发生的。(图 3)，其中提到的《论透视》是由十三世纪波兰数学家卫特鲁所写，首先在纽伦堡出版(1535)，是一本广为流传的著作。

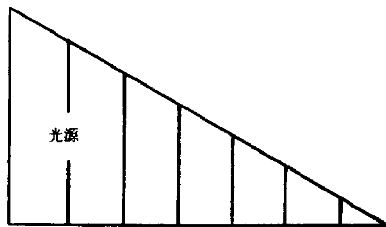


图 3

25. 雷格蒙塔努斯:《论各种三角形》

三角学作为数学的一个独立分支，最先由伊斯兰数学家纳西尔丁提出。在欧洲，第一部脱离天文学的三角学系统专著是雷格蒙塔努斯的《论各种三角形》(De triangulis omnimodis，1464)。

雷格蒙塔努斯(Regiomontanus，1436～1476)可能是15世纪文艺复兴的欧洲最有影响的数学家，原名缪勒(J. Müller)，Regiomontanus 是其德国出生地 Königsberg 的拉丁译名[①]。他早年曾师事维也纳大学的波伊尔巴赫(G. von Peuerbach)，后到意大利罗马等地游历，搜集、译注了包括托勒密《天文大成》(Almagest)在内的许多希腊著作，同时撰写自己的数学与天文论著。《论各种三角形》就是他在威尼斯访问期间完成。该书共5卷，前二卷论述平面三角学，后三卷论述球面三角学。《论各种三角形》1533年在纽伦堡正式出版，成为欧洲三角学的渊源。以下摘录该书中与平面正弦定理和球面余弦定理有关的内容，转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 138～142。

卷 I. 定理 20. 在每一直角三角形中，以一锐角顶点为圆心、以其最长边[②]为半径，作圆；则此锐角的对边就是其正弦(正弦线)[③]，也是已知角对边邻弧的正弦；而其第三边，则是其余弧的正

① "Montanus"是"山"的意思，我国明代曾译其名为"玉山若干"。

② 雷格蒙塔努斯没有使用术语"斜边"，这里是按欧几里得写的。他也没有使用术语"三角学"，这一术语最早出现于 B. Pitiscus(1561～1613)的书名(Trigonometria)(1595)。

③ 雷格蒙塔努斯之一角 α 的正弦或正弦线(sinus 或 sinus rectus)，即是现今的 $R\cdot\sin\alpha$，他所谓的正矢，就是现今的 $R\cdot\text{versin}\alpha=R\cdot(1-\cos\alpha)$，其中 R 为圆半径。

弦。

在直角三角形 ABC[①] (图 1)中,若已知 C 为直角,A 为锐角,围绕其锐角顶点、以最长边——即是最大角的对边——为半径,作一圆 BED。若适当延长 AC 边,使交圆周于 E 点,则 BAC 角的对边 BC 就是 BE 弧的正弦,而 BE 弧是已知角的对弧;此外,其第三边 AC 等于 BE 弧之余弧的正弦。…[②]。

卷 I . 定理 28 当直角三角形两边之比为已知,则其角也为可知。

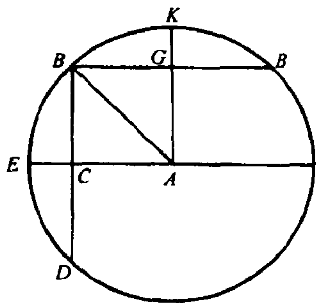


图 1

两边之一是直角的对边,或者都不是直角的对边。首先,若边 AB 为直角 ACB 的对边,它与 AC 边之比为已知,则此三角形的角变为已知[③]。

卷 II . 定理 1 在每一直线三角形中,一边与另一边之比等于一边对角的正弦与另一边对角的正弦之比[④]。

因为在别处我们可以说,一角的正弦就是该角对弧的正弦。可是,这些正弦必需是同半径或等半径圆的正弦。因此,若三角形 ABG(图 2)是一直线型三角形,则 AB 边与 AG 边之比就等于 AGB 角的正弦与 ABG 角的正弦之比;类似地,AB 边与 BG 边之比等于 AGB 角的正弦与 BAG 角的正弦之比。

若 ABG 是一直角三角形,依据上述卷 I 定理 28,可以直接提出证明,可是,若此三角形非直角三角形,其两边 AB 与 AG 相等,则其两边之两对角也必然相等,因而它们的正弦也相等。据此,由

---

① 我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 代替雷格蒙塔努斯所用的小写字母 $a,b,c,\cdots$。

② 然后,延长 BC 至 CD,直线 BD 按定义为 BD 弧的弦,取其半,就是直线 BC,亦即 BAE 角或 BAC 角所对半弧 BE 的正弦线。

③ 例如,在三角形 ABC(图 1)中,若 $AB:BC=9:7$,则取 $R=60000$(全正弦),乘以 7,除以 9,商为 46667,即是对应于角 ABC 的值 $51°3'$ 之正弦。

④ 这就是正弦定理,卷 I 以此开始。

两边所建立的命题得到了证实。但是,若两边中一边较另一边为长——例如 AG 较长——于是将 BA 延长到 D,使线段 BD 等于 AG 边。然后分别以 B 及 G 为圆心,各以 BD 及 GA 为半径,画两等圆。两圆周交此三角形底边于 L 点及 E 点,因而弧 DL 的对角为 DBL 或 ABG,以及弧 AE 的对角为 AGE 或 AGB。最后,由两点 A 及 D 向底边引两垂线 AK 及 DH。显然,DH 是 ABG 角的正弦,而 AK 是 AGB 的正弦。此外,依据欧几里得的卷Ⅵ定理 4[①],AB 与 BD 之比,以及 AB 与 AG 之比都等于 AK 与 DH 之比。因此,可以断言,这命题是正确的[②]。

图 2

卷Ⅴ. 定理 2 在由大圆之弧所组成的每一球面三角形中,任一角的正矢与两正矢差之比,其中之一是此边对角的正矢,另一是围绕此角两弧之差的正矢;此比等于全正弦的平方与围绕前述角两弧的正弦乘积之比[③]。

(白尚恕 译　李文林 校)

---

① 该定理是说:在相似三角形中对应边成比例。

② 接下去是许多应用。

③ 由这一定理,我们可以认识到以几何的并是齐次形式子出现的球面三角形的余弦定理,它的证明十分繁难,这里从略,用现今符号可表示为:

$(R\cdot \text{versin}\alpha):[(R\cdot \text{versin}a-R\cdot \text{versin}(b-c)]=R^2:(R\sin b\cdot R\sin c)$,其中 a, b,c 是半径为 R 的球面三角形之边,而 α 是 a 边的对角,此式也可简化为

$\cos a=\cos b\cdot \cos c+\sin b\cdot \sin c\cdot \cos\alpha$。

26. 卡尔达诺:《大术》

文艺复兴时期意大利数学的最高成就,是三、四次代数方程的求解。直到15世纪末,人们还认为三次方程与化圆为方一样难以解决(如L. Pacioli,1494)。第一个突破是在1515年左右,波伦亚大学的费罗(S. Ferro)发现了形如$x^3+px=q(p,q>0)$的方程的解法。稍晚塔尔塔利亚(N. Tartaglia)又独立解出了$x^3+px^2=q$和$x^3+px=q(p,q>0)$两类方程(1535)。这些结果均未正式发表,而是首先公布于卡尔达诺的著作《大术》(Ars Magna)之中。

卡尔达诺(Girolamo Cardano,1501~1576,旧译"卡当")出生于意大利帕维亚(Pavia),1526年获医学学位,以行医闻名遐迩,同时精通数学、天文,1562年受聘为波伦亚(Bologna)大学数学教授。《大术》1545年出版于纽伦堡,全名《大术,或论代数法则》(Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus)。卡尔达诺在书中公布塔尔塔利亚的三次方程解法违背了他对后者所立的守密誓约,但《大术》也包含有卡尔达诺本人的独创。他将塔尔塔利亚等人的方法推广到其他类型的三次方程而给出了一般求解公式(后称"卡尔达诺公式"),并补充了几何证明。书中还记载了卡尔达诺的学生费拉里(L. Ferrari)解四次方程的方法,同样加了几何证明。《大术》是整个17,18世纪数学家们对更高次代数方程展开的一系列漫长而影响深远的探讨的起跑点,因而被视为16世纪最重要的数学著作。以下摘录该书有关内容,其中[26.1]、[26.2]、[26.3]分别译自T. R. Witmer(ed. and trans, into English): The Great Art, on the Rules of Algebra, 第XI, XXXVII, XXXIX章, MIT。Press, Cambridge, Mass.,

1968。

26.1. 三次方程解法的几何证明

关于一个立方与未知量等于一个数[①]

大约30年之前,波伦亚的费罗创造了本章提出的方法,并将它传授给威尼斯的费罗里多。在一次和布雷西亚的尼古拉·塔尔塔利亚的竞赛中,菲奥尔声明尼古拉也创造了这一方法。在我的恳求下,尼古拉将它传授给我,但保留了证明。有了他的传授,我们开始寻找其证明,尽管困难很大,但还是以下述方式找到了证明。

证明。例如,设 GH 的立方与6乘边 GH 等于20。取差为20的两个立方体 AE 和 CL(如图1),使得边 AC 和 CK 之积为2,即未知量数的三分之一。我并截取 CB 等于 CK,于是我可以说这样做了之后的剩余线段 AB 等于 GH。因此等于未知量的值(因为假设 GH 等于未知量的值)。所以,我利用本书第6章定理1[②]的办法得到了立体 DA,DE,DC,DF。以便我们把 DC 理解为 BC 的立方,DF 为 AB 的立方,DA 为3乘 CB 乘 AB 平方,DE 为3乘 AB 乘 BC 平方。由于 AC 乘 CK 的结果为2,所以3乘 AC 再乘 CK 的结果将为6。即等于未知量数。由 AB 乘 $3AC$ 乘 CK 的结果为6倍的未知量 AB,或者说6乘 AB,所以3乘 AB,BC 和 AC 之积等于6乘 AB,但 AC 立方与 CK 立方之差等于20,由假设,BC 等于 CK,AC 立方与 BC 立方之差也等于20;由第6章定理1,该差为立体 DA,DE 和 DF 之和,所以这三个立体之和为20,但是若取 BC 为负,则 AB 的立方等于 AC 的立方与3乘 AC 乘 CB 平方与负的 BC 立方与负的3乘 BC 乘 AC 平方。由证明,3乘 BC 乘 AC

---

① 即方程 $x^3+px=q$。

② 卡尔达诺在第Ⅵ章给出了三个定理,以符号表示即为:

(a) 若 $a=u+v$,则 $a^3=u^3+v^3+3(u^2v+uv^2)$

(b) $u^3+3uv^2>v^3+3u^2v$,其差为 $(u-v)^3$,$(u>v)$

(c) 由欧几里得的比例定理,$\dfrac{v^3+u^3}{3uv^2+3vu^2}=\dfrac{u^3-u^2v+uv^2}{3vu^2}$。

平方与 3 乘 AC 乘 BC 平方之差为 3 乘 AB,BC 和 AC 的积。于是,因为(由前面的证明知)它等于 6 乘 AB,当把 6 乘 AB 加到 AC 乘 3 倍的 BC 平方上,这样便得到 3 乘 BC 乘 AC 的平方,因为 BC 是负的。现已证明:CB 乘 3 乘 AC 的平方之积是负的;而等于该积的余数是正的,因此,3 乘 BC 乘 AC 的平方与 3 乘 AC 乘 BC 的平

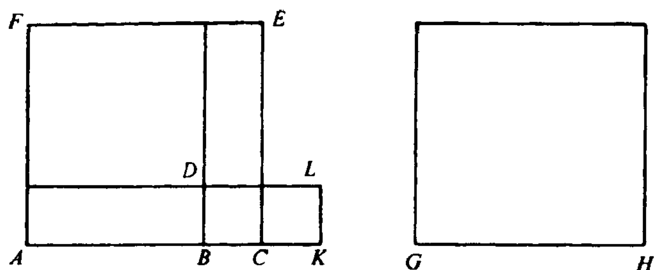


图 1

方以及 6 乘 AB 之和为零。据常识可知,立方 AC 和 BC 之差等于 AC 的立方,3 乘 AC 乘 CB 的平方、3 乘 CB 乘 AC 的平方(负的)、BC 的立方(负的)以及 6 乘 AB 的总和。因为立方 AC 和 BC 的差为 20,所以上述和为 20。再者,由第 Ⅵ 章的定理 2,取 BC 为负,则 AB 的立方将等于 AC 的立方,3 乘 AC 乘 BC 的平方、负的 BC 的立方以及负的 3 乘 BC 乘 AC 的平方这几项相加。因此,AB 的立方与 6 乘 AB 一起也等于 20,因为由常识可知,它们等于 AC 的立方、3 乘 AC 乘 BC 的平方、负的 3 乘 BC 乘 AC 的平方、负的 CB 的立方以及 6 乘 AB 这些项的和,且该和已被证明等于 20。同样,因为 AB 的立方与 6 乘 AB 等于 20,且 GH 立方和 6 乘 GH 等于 20,由常识和《几何原本》第 11 卷的命题 35 和 31 可知,GH 将等于 AB,因此 GH 为 AC 和 BC 之差。但 AC 和 CB 或者说 AC 和 CK 是构成一个面积的数或线段,这个面积等于三分之一的未知量数,且二者的立方之差为方程中的常数,因此,我们有如下规则:

取未知量数的三分之一的立方加上方程中的常数的一半的平方,并取和的根,这就是你将要用到的那个平方根,一种情形是加上你刚刚以其自乘的数,另一种情形是减去该数,你将分别得到一

个二项式及一个差的二项式；然后，二项式的立方根减去差的二项式的立方根，余数就是未知量的值。在这个例子中立方加 6 倍未知量等于 20 中，取 2 的立方，即 6 的三分之一的立方，得 8；数的二分之一，即 10，自乘得 100，100 加 8 得 108，取其根为$\sqrt{108}$。利用此数，在第一种场合加上常数的二分之一，即 10，在第二种场合减去这同一个数，你将得到二项式$\sqrt{108}+10$ 以及差的二项式$\sqrt{108}-10$；取它们的立方根，从二项式的立方根中减去差的二项式的立方根，将得到未知量的值$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$.

……

26.2. 关于二次方程的虚数根

我将给出一个例子：如果有人对你说，把 10 分为两部分，其中一部分乘以另一部分结果为 30 或 40，很明显，这种情形或问题是不可能的。不过，我仍将针对这种提法来解它。让我们把 10 分成相等的部分，5 将是它的一半，5 自乘得 25。若 25 减去所要求的乘积，也就是减去 40，那么象我在书的第 6 卷中关于运算的一章所教的那样，其余数为-15。将它的根加上 5，然后再从 5 中减去它的根，这样得到的两项其乘积为 40。因此，10 分成的两部分应是 $5+\sqrt{-15}$和 $5-\sqrt{-15}$。

证明：这个规则的真正意义可以说得很清楚，设线段 AB，其长度为 10，是要被分为两部分的那个线段，两部分构成的矩形是 40。因为 40 是 10 的 4 倍，所以我们希望用 4 乘整个的 AB. 在 AB 的一半 AC 上做正方形 AD。AD 减去 4 乘 AB。如果有余数，余数的根应该加到 AC 上或是从 AC 中减去，这就给出了(AB 被分成的)两个部分。甚至当这个余数为负时，你仍然想象$\sqrt{-15}$是 AD 和 4 倍的 AB 的差，为了找出要求的数，你应该把$\sqrt{-15}$加到 AC 上或是从 AC 中减去。也就是 $5+\sqrt{25-40}$和 $5-\sqrt{25-40}$或 $5+\sqrt{-15}$和 $5-\sqrt{-15}$。让我们解除思想的束缚，用 $5+\sqrt{-15}$乘 5

$-\sqrt{-15}$，我们便得到 $25-(-15)$，也就是 $25+15$。因此乘积为40。然而，因为一个平面远不同于一个数或一条线，所以 AD 的性质和 40 或 AB 的性质是不同的。但它最接近于这个量，这确实令人费解因为也许不能用它来进行运算，就像不能对纯粹的负数或其他数做运算一样。数的一半的平方加上那个乘积数，和的根去掉或者加上被除数的一半，通过这种方式我们不能得到结果。例如，在将 10 分为两部分，它们的乘积为 40 的情形中，10 的二分之一的平方 25 加上 40 得 65。利用类似的推理，65 的根减去 5 或加上 5，将得到 $\sqrt{65}+5$ 和 $\sqrt{65}-5$。但这些数的差是 10，而不是和为 10。算术就是这样的精巧奇妙，它最根本的特点，正如我说过的，是既精妙又无用。

26.3. 论四次方程

有另外一个规则比前面的规则更精彩。这个规则是费拉里的，他应我的请求把它传授给我。对于包含四次幂、平方、一次幂和数的方程或者包含四次幂、立方、平方和数的方程，利用这种方法我们得到了所有的解。我将这些方程顺序列置如下①：

1. $x^4=bx^2+ax+N$
2. $x^4=bx^2+cx^3+N$
3. $x^4=cx^3+N$
4. $x^4=ax+N$
5. $x^4+cx^3=bx^2+N$
6. $x^4+ax=bx^2+N$
11. $x^4+bx^2+ax=N$
12. $x^4+bx^2+cx^3=N$
13. $x^4+bx^2+N=cx^3$
14. $x^4+bx^2+N=ax$
15. $x^4+N=cx^3+bx^2$
16. $x^4+N=cx^3$

① 卡尔达诺尚无方程的符号表示，正如我们在上文所见，他是用语言来表述各种方程与公式的。在本节中，为了阅读方便起见，译者将原文的语言形式改为现代符号形式，特此说明。

7. $x^4+cx^3=N$ 17. $x^4+N=ax+bx^2$

8. $x^4+ax=N$ 18. $x^4+N=ax$

9. $x^4+bx^2=cx^3+N$ 19. $x^4+cx^3+N=bx^2$

10. $x^4+bx^2=ax+N$ 20. $x^4+ax+N=bx^2$

由于还有 67 种其他类型的 4 次方程，因此，这些方程事实上[仅]是最一般的，在所有的上述这些方程中，将含有立方项的那些方程化为含 x 项的方程是方便的，如将第 7 种化为第 4 种或将第 2 种化为第 1 种。现在我们将寻找这种转化方式的证明。

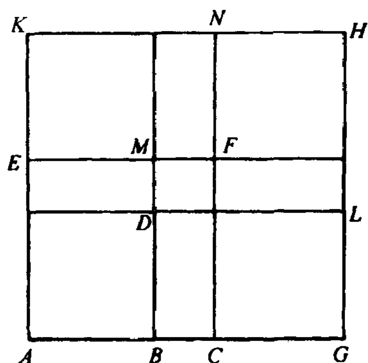


图 2

设正方形 AF 被分成两个正方形 AD 和 DF，以及两个增补部分 DC 和 DE(图 2)，为了得到整个正方形 AH，需在 AF 的周围加上磬折形 KFG。这个磬折形将由 GC^2 加上两倍加长的线段 $GC\times CA$ 组成，因为由《几何原本》第 2 卷开始部分给出的定义，FG 等于 $GC\times CF$ 且由正方形的定义知 CF 等于 CA。根据《几何原本》的 I，43，KF 等于 FG，两个面 GF 和 FK 由 $GC\times 2CA$ 构成，且由《几何原本》II，4 的推论，知 GC^2 等于 FH。因此命题是明确的。如果 AD 等于 x^4，CD 和 DE[每个]等于 $3x^2$，且 DF 等于 9，则 BA 将等于 x^2，且 BC 将必然地等于 3，我们希望在 DC 和 DE 上增加更多的平方，它们将是 CL 和 KM。为了得到整个正方形，面 LMN 是必须的。正如前面已证明的，这个面由 GC 的平方[加 $2GC\times BC$]组成，其中 BC 是原来平方数的一半，因为正如已证明了的 CL 是由 $GC\times AB$ 生成的面，又因为我们假设 AD 是 x^4，所以 AB 是 x^2，由《几何原本》I，42 可知，FL 和 MN 由 $GC\times BC$ 构成。所以面

LMN（这是将被加上的数）是 $GC \times 2CB$（也就是乘 x^2 的系数 6）加上 GC 乘自身（也就是乘以被加上的平方数）。这个证明是我们自己的。

实行这种运算，总是把[方程中带有] x^4 的一边化为它的平方根——也就是，通过在两边加上相同的东西使得 x^4+bx^2+N 有一个平方根。这是容易做到的，因为你可以假设 x^2 的系数的一半是常数项的根。进行这一运算的方式须使得两边的分解的最高次项是正的①。否则，三项式或者扩展为三项式的二项式将必定缺少一个根。

做完所有这一切之后，根据第三条规则，在式子一边加上的那些平方和一个数，应和必须被加到式子另一边——带有一次幂的一边——的一样，以便使得一个三项式成为含有 x 的平方根。这样，你将得到应加到两边的确定数目的平方和一个数。

做完这步后，两边开平方。一种情形是 x^2 加上或减去一个数，另一种情形是一个或多个 x 加上或减去一个数，或者是一个数减去这些 x。然后由本书的第 V 章可以导出解。

问题 V

例如，把 10 分为三个成比例的部分，其中第一和第二部分的乘积是 6。这个问题由 z. de 科伊提出，他认为该问题不可解。尽管我一直不知道（解决这个问题的）方法，但我认为它能够解决。费拉里发现了这一方法。

设中项为 x，那么第一项是 $\frac{6}{x}$，第三项是 $\frac{1}{6}x^3$。它们之和等于 10。用 $6x$ 乘所有的项，我们将得

$$60x = x^4 + 6x^2 + 36$$

利用第 5 条规则，两边加 $6x^2$，你将得

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x$$

因为等量加等量其和相等。此外 x^4+12x^2+36 有一个平方根 x^2+

① 也许，以这种方式进行的运算，方程的两[边]最高次项是正的。——原注

6. 现在如果 $6x^2+60x$(同样)也有一个平方根，我们将得到解。但它没有。因此，必须在两边加上相同的足够多的平方与一个数以使得一边是一个有根的三项式且另一边同样有根。设 b 是平方的数目，正如你在为第三条规则画的图中已经看到的那样，

$$CL+MK=2GC\times AB$$

且 GC 为 b，所以，我总是设 $2b$——也就是 $2GC$ ——是增加的平方数。因为加到 36 上的数是 LMN，或 $GC^2+2GC\times CB$(或 $GC\times 2CB$)。[$2CB$]是 x^2 的原来系数 12，所以，增加的平方数的一半 b 乘以 x^2 的原来系数且自乘，得 b^2+12b 为被加到另一边上的数，[同样取]$2b$ 作为增加的平方数。因此，毫无疑议，我们知道这些量相互相等：

$$x^4+(2b+12)x^2+(b^2+12b)+36=(2b+6)x^2+60x+(b^2+12b).$$

于是，首先根据第三条规则，再根据假设，它们每边都存在一平方根。因此，三项式的第一部分乘以第三部分等于第二部分一半的平方。由于第二部分一半的平方是 $900x^2$，第一和第三部分的乘积是 $(2b^3+30b^2+72b)x^2$，两边除以 x^2——等量除等量商相等——便得

$$2b^3+30b^2+72b=900$$

即

$$b^3+15b^2+36b=450$$

由此归纳出一个规则：总是用 b^3 加上一又四分之一乘 x^2 的系数(作为 b^2 的系数)加上和原来方程的常数项同样数目的 b。这样，如果我们有

$$x^4+12x^2+36=6x^2+60x$$

我们将有

$$b^3+15b^2+36b=450$$

[常数项是]x 系数一半的平方的一半。另外，如果我们有

$$x^4+16x^2+64=80x$$

我们便得出

$$b^3+20b^2+64b=800$$

如果我们有

$$x^4+20x^2+100=80x$$

我们便得到

$$b^3+25b^2+100b=800$$

因此，对于我们前面的例子，我们有

$$b^3+15b^2+36b=450$$

根据XVII章，b 等于$\sqrt[3]{190+\sqrt{33903}}+\sqrt[3]{190-\sqrt{33903}}-5$。这个量的两倍就是我们必须加到两边的平方数，因为我们认为 $2b$ 是被加的平方数。由证明，加到两边的数为这个量的平方加上它与 x^2 的系数 12 之积。再者，明显地，第一个和方程左边的平方根，没有附加的量，总是 x^2 加上 x^2 的系数的一半或[x^2]加上 b 加上 x^2(带有附加量)原来系数的一半于是我们有

$$x^4+6x^2+9=144$$

和

$$x^4+(2b+6)x^2+(b^2+6b)+9=225$$

且(后者的)平方根是 x^2+b+3。此外，$b+3$ 为 x^2 的(新的)系数 $2b+6$ 的一半，且由于 b 和 x^2 的性质不同，它的值必须先找到。这是必须被加的那个简单的数。在目前的例子中，平方根中的数为$\sqrt[3]{190+\sqrt{33903}}+\sqrt[3]{190-\sqrt{33903}}+1$。(这[就是+1 这件事]是因为 x^2 的原来的系数的一半是 6，在被加的三项式中[整数]是 -5。所以如我说过的那样，整个的和是一个真实的[数]。)剩下的部分(方程右边)是 x^2(的系数)6 加上两倍的这个数①。所以 x^2 的系数是$\sqrt[3]{1520+\sqrt{2169792}}+\sqrt[3]{1520-\sqrt{2169792}}-4$；由假设，$x$ 的系数是 60；常数项(已经证明)是上述量的平方加上 12 乘那个量。由假设，因为 x^2 的系数乘方程的常数项等于 x 系数一半的平方，所以 x 系数一半的平方 900 除以 x^2 的系数将得到常数项。这

① 这里指的是数 b。

些量是：

x^2(的系数)：$\sqrt[3]{1520+\sqrt{2169792}}+\sqrt[3]{1520+\sqrt{2169792}}-4$

x(的系数)：60

常数项：$\dfrac{900}{\sqrt[3]{1520+\sqrt{2169792}}+\sqrt[3]{1520+\sqrt{2169792}}-4}$

由于边 AG 由两个正方形 AD 和 DH 的边组成，不考虑附加部分，则那些量中第一个和第三个的平方根的和将是所有量的和的平方根。(方程左边)第一个和第三个量的平方根的和等于 $x^2+\sqrt[3]{190+\sqrt{33903}}+\sqrt[3]{190+\sqrt{33903}}+1$。但(方程右边)第一个量的平方根是若干 x，因为它就是这些平方的平方根，第 3 个量的平方根是一个数，因为第三个量就是一个数。因此，我们将得到 x^2 与一个等于 x 的数和另一个数。取右边第三个量的平方根——也就是取分子和分母的平方根——较大的数减去较小的数后，我们将得到 x^2 加上左边第三个量的平方根减去下面的数——即

$$\frac{30}{\sqrt{\sqrt[3]{1520+\sqrt{2169729}}+\sqrt[3]{1520-\sqrt{2169792}}-4}}$$

——等于下面数目的 x，也就是说，$\sqrt[3]{1520+\sqrt{2169792}}+\sqrt[3]{1520-\sqrt{2169792}}-4$ 个 x。这个数是由正的和负的组成并不碍事，因为说

$$x^2+8=6x$$

和说

$$x^2+10-2=6x$$

是一样的。然后，利用第 V 章关于平方与数等于一次幂(的规则)，x 系数的一半自乘，减去常数项，取余数的平方根并加到 x 系数的一半上去。这样你将得到 x，这就是你要寻找的比例量的中项。

(包芳勋 译　袁向东 校)

27. 邦贝利:《代数学》

意大利文艺复兴时期最后一位代数学家邦贝利(Rafael Bombelli,1526～1572),是一名水利设计工程师,业余研究数学。他留下的唯一数学著作《代数学》,给他带来声誉。该书完成于1556～1560年间,凡五卷,初版问世只有前3卷,题为《代数学的主要部分——三卷本算术》(L'Algebra parte maggiore dell' arithmetica divisa in tre libri, Bologna,1572)。1579年再版时改名《代数学》(L'Algebra opera)。后二卷手稿则直到20世纪才被发现(1929年在波伦亚出版)。虚数的论述与连分数的引进,是邦贝利两项最突出的贡献,以下摘录《代数学》中的有关内容。

27.1. 论虚数

卡尔达诺在解二次方程时已遇到虚数根(《大术》第37章,见本书[26.2]),但却未能解决三次方程的所谓"不可约"(即判别式为负)的情形。邦贝利认真看待了虚数,并用以解出了不可约三次方程。他还建立了虚数运算法则。这是人们对数的认识的一大进步,尽管邦贝利仍认为虚数是"人为"的而非真实的数。以下的论述转译自J. Fouvel and J. Gray: The History of Mathematics——A Reader, pp. 264－265。

我发现了另一种三次方根的复合表达式,它与其他的类型截

然不同，它是从“立方等于一定量的（东西）和数”[①] 这种情形得来的，当这种类型的式子中那个量的三分之一的立方大于那个数的一半的平方时就出现了这种情况。这种平方根的算术运算与名称都与其他的情况不同，因为当那个量的三分之一的立方大于那个数的一半的平方时，超出量[②]既不能叫做正的也不能叫做负的。但是若需要把它加上时，我叫它做“负之正”[③]，若要减去它时，我叫它做“负之负”，与三次根的复合表达式的其他情况相比，这种运算是最为必需的，因为幂的幂（四次幂）的情形会伴随着出现立方，或一定量的东西，或者两个都有，对于这种情形的方程，此类根会更多地出现。对许多人来说，这种根看起来像是人造的而不是真实的，我自己也持这种观点，除非我找到其几何的证据（即在平面上对上述情形给予证明）。且不谈加法和减法的法则，我要首先讨论其乘法。

正乘以负之正得负之正，　　$[(+1)(i)=+i]$

负乘以负之正得负之负，　　$[(-1)(i)=-i]$

正乘以负之负得负之负，　　$[(+1)(-i)=-i]$

负乘以负之负得负之正，　　$[(-1)(-i)=+i]$

负之正乘以负之正得负，　　$[(+i)(+i)=-1]$

---

① 即 $x^3=px+q$，此前卡尔达诺曾给出过 $x^3+p_cx=q$ 型的三次方程的解的公式：

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p_c)^3+(\frac{1}{2}q)^2}+\frac{1}{2}q}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p_c)^3+(\frac{1}{2}q)^2}-\frac{1}{2}q}$$

这里 $p=-p_c$.

当 $(\frac{1}{3}p)^3>(\frac{1}{2}q)^2$ 时，判别式 $(-\frac{1}{3}p)^3+(\frac{1}{2}q)^2<0$，于是 $(\frac{1}{3}p_c)^3+(\frac{1}{2}q)^2<0$，$\sqrt{(\frac{1}{3}p_c)^3+(\frac{1}{2}q)^2}$ 是虚数。当时既没有虚数的四则算法也没有虚数的明确概念，邦贝利试图表示它，并给出了其乘法的法则。

② 可能指 $\sqrt{(\frac{1}{3}p_c)^3+(\frac{1}{2}q)^2}$。

③ “负之正”和以下的“负之负”分别相当于+i和−i，邦贝利尚无“虚数”的名称。“虚数”名称是笛卡儿在《几何》中首先创用的，虚数记号i则由欧拉最先引进。

负之正乘以负之负得正，　　$[(+i)(-i)=+1]$
负之负乘以负之负得负。　　$[(-i)(-i)=-1]$[1]

27.2. 论连分数

对连分数的研究似乎是起源于求非完全平方数平方根的近似值的问题。在很早就有许多不同的求根方法，但这些方法往往既困难又笨拙。在欧洲，第一个用连分数概念求平方根的人是邦贝利。以下是他的有关论述，转译自 D.E. Smith：*A Source Book of Mathematics*. *pp.* 80～82.

当今一些著作家发表了许多构造分数的方法；在我看来，他们没有理由相互攻击和指责，因为大家的目标是共同的。的确，某种方法可能比另一种更简洁，但是让所有的方法在手边供选择，最容易的无疑会被人们接受并使用，无需去抵毁其他的方法，这就足够了！这里我要传授一种可能比以前的更易接受的方法，当然以后还会发现其他方法，有的模糊，有的更简单，那么更简单的会被立即接受，而我的就会被舍弃。正像俗话说的：经验是我们的老师，成果是对劳动者的奖赏。简而言之，我愿把目前最令我满意的方法发表出来，其价值要靠大家来评判。现在我就将话题转入方法本身。

为了求得 13 的根[2]的近似值，我们首先假定这个根是 3，则余 4. 该余数除以 6(将上面的 3 加倍)得⅔. 这是要加到 3 上的第一个分数，结果得到 13 的近似值 $3\frac{2}{3}$。此数的平方是 $13\frac{4}{9}$，多了$\frac{4}{9}$. 为求得更精确的近似值，把 6(3 的 2 倍)再加到分数$\frac{2}{3}$上，得到 $6\frac{2}{3}$，再把此数除 4(13 与 9 的差)。结果为$\frac{3}{5}$，把它加到 3 上得

① 乘法表右列(带方括号的)内容是英译者所加。

② 邦贝利用了一个通俗的词“边”(意大利文 latus)，因为一平方根常被当作给定面积的正方形的边。这里译作“根”(英文 root)，它的含义更为丰富。

$3\frac{3}{5}$。这是更接近13的根的一个近似值，因它的平方是$12\frac{24}{25}$，比$3\frac{2}{3}$更精确些①。如再求进一步的近似值，则把分数$\frac{3}{5}$加到6上得$6\frac{3}{5}$，用它除4，得$\frac{20}{33}$。它应加到3上，就像上面做的那样，得$3\frac{20}{33}$。因其平方为$13\frac{4}{1089}$，只多了$\frac{4}{1089}$，所以它是更精确的近似。如还要更精确，则用$6\frac{20}{33}$除4，得$\frac{66}{109}$，再把它加到3上，得$3\frac{66}{109}$，因为它的平方为$13\frac{96}{11881}$，只多$\frac{96}{11881}$，即比先前更精确了。还想在继续下去，则用$6\frac{96}{109}$除4得$\frac{109}{180}$(斯蒂文现在继续这一过程然后评论道:)这一过程可继续到使差变得微乎其微。但在许多情况下，正在求其根的数恰好只比完全平方数小一点，比如8。这时构造分数就要多加小心。此例中因4是最大的平方数，4也是余数，则分数变为$\frac{4}{4}$，它等于1。加到2上得3，其平方为9。从中减去要求其根的8，得余数1。它应再被6除(6是3的2倍)得到$\frac{1}{6}$。从3中减去它得到$2\frac{5}{6}$，为8的近似根。此数的平方为$8\frac{1}{36}$，多了$\frac{1}{36}$。若想求更接近的值，则把$2\frac{5}{6}$加到3上得$5\frac{5}{6}$，然后像上面那样用它去除1，得$\frac{6}{35}$，此时应从3中减去它得到$2\frac{22}{35}$。这是更精确的根，如果还要求更好的近似，用$5\frac{29}{35}$除1。像上面那样继续这个过程，直到所期望的程度。

(李家宏 译　袁向东 校)

---

① 按现代的符号当然应写作：$3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}$。邦贝利没有给出这种方法有效性的理由，也没说他是怎么发现该方法的。

28. 斯蒂文:《十进算术》

在欧洲,系统地探讨十进数和它的算术运算理论的第一位数学家是斯蒂文(Simon Stevin,1548~1620)。他生于布鲁日(Bruges,今比利时境内,文艺复兴时期属荷兰),早年做过薄记员等,同时长于技术发明而成为闻名遐尔的工程师,1593年后在荷兰军队中任职并为一些公共工程作监督。斯蒂文关于十进分数的著作《十进算术》出版于1585年,当时出版了佛拉芒文本(De Thiende)和法文本(La Disme)。斯蒂文写作的目的是简化计算,所以他把此书题献给天文学家、测量人员和商人,斯蒂文的符号也许今天看来有些笨拙,但其方法不久便获普遍接受。在小册子最后,他还建议在度量衡及币制中也应用十进制。这些都在西方产生了深远的影响。以下摘录《十进算术》的部分内容,转译自 D. E. Smith: A Source Book of Math. pp. 20~34.

西蒙·斯蒂文向占星家、统计师、量毯者、测量员、一般立体几何学家、造币局长及所有商人致意。

如果有谁把本书这么少的内容与你们(本书所献给的最尊敬的先生们)的伟大相比;特别是若他假想到一个比例式:本书的篇幅与人类的无知相比就如同它的用处与你们那样有杰出能力的人相比,就会觉得我的想法是多么可笑。但与此同时,他也许比较了那个假想的比例式中的首末项。而我则宁愿让他多考虑一下第三项比第四项。

本书要说的是什么?奇妙的发明吗?还说不上是,像这么简单的东西实在不配冠之发明的美名,就是一些愚蠢的乡下人也说不定会碰巧不用任何方法就发现它。如果哪位觉得我讲述十进数的功用是在吹嘘自己聪明,那么他就确切无疑地显示出他既缺乏判

断力又没有足够的智力，他简直不知道什么容易，什么困难，要不就是他仇视对公众有好处的事情。然而，即使有人这样没有根据地污蔑，我也要讲这些数的用处。就像一个航海家偶然发现一个从前不为人知的岛屿会宣布岛上的一切财富，如美丽的水果、可爱的平原、珍稀的矿藏都属于国王，而我们不能称他为自负一样。所以这里我要谈谈这种发明的巨大用途，这种用途超出你们任何人的想象，而我却不是在褒扬自己的成就。

先生们，日常生活足以使你意识到数的作用，这也是《十进算术》的主题，在此勿须赘述，占星学家[①]知道，用磁偏角数表进行计算，领航员会算出某地的真实纬度和经度，用那种方法，地球表面上的每一点的位置都可确定。但就像有甜就有苦，其计算量大的缺点是不能掩盖的，它涉及到六十进分数[②]度、分、秒、毫等的乘法和除法的单调运算；统计师知道，他的学问可以避免许多不知道土地面积而引发的争吵，从而使人们获益匪浅。当土地面积很大时，他不能忽略一个又一个杆、英尺、英寸[③]的繁复的乘法运算，因为经常产生的错误会给当事的某一方造成损害，同时也会损害这个统计师的声誉。同样，造币局长、经商者在其职业生涯中也有类似问题。这些计算越是重要，其工作量越大，本书发现的十进数的意义也就越重大，因为十进数可以克服所有这些计算的困难。简而言之，《十进算术》就是教给人们怎样像摆算筹[④]一样容易地对所有的数进行加、减、乘、除四则运算。

如果这些可以节省人们本来会失去的时间，避免劳累、争端、错误、诉讼及由此引起的一切不幸的话，我非常愿意把《十进算术》

---

① 这里“占星学家”亦指“天文学家”

② 分母为60的幂的分数，不仅用作时间和角度的度量，而且用来进行各种计算，可方便地表示方程根的近似值——如把根看作六十进分数的十分之一——虽然用它比较两数大小、做加减法很简便，但做乘法、除法和求方根却很困难，通常要查表求得。

③ 这里斯蒂文用的单位是杆、尺、趾(verge，pied，doigt)；verge，pied，doigt 是法国单位，英译本改成英国单位杆、英尺、英寸(rods，feet，inches)．一杆＝5.03米＝$5\frac{1}{2}$码。

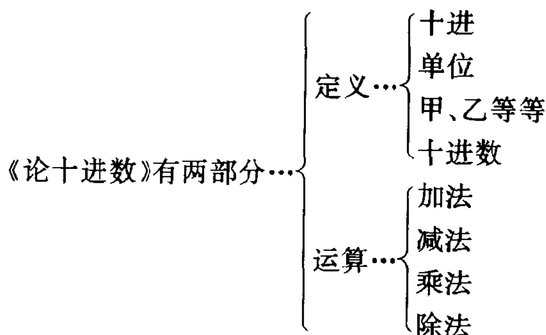
④ 用算筹计算是斯蒂文的时代还在流行的计算方法。

呈献给你们，以供评考。也许有人会说，许多看来还不错的发明在真的应用时就失灵了，一些在特例中效果良好的新方法也常常在更重要的场合毫无用处。这种疑虑在这里是绝对没有必要的，我们曾把这种方法介绍给荷兰的职业测量师，他们现已舍弃了原先为减轻计算量而发明的工具，而且在非常满意地使用着我的方法，最尊敬的先生们，如果你们每个人也像他们那样做的话，一定也会感到同样的满意。

概要

《十进算术》包括两个部分：定义和运算。在第一部分中，第一个定义解释了什么是十进数，第二、三、四个定义则解释了单位[①]、甲、乙[②] 等十进数词的意思。

在运算部分中，四个定理演示了十进数的加、减、乘、除的运算法则，书中的主要内容可以概括地写成下表：



讨论结束后，附录给出了十进数在实际问题中的应用。

《十进算术》之第一部分　定义

① 斯蒂文用的佛拉芒语词为 Beghin，法语词为 Commencement。

② 英文为 prime, second, third, …（第一，第二，第三，…）。这里按中国的天干顺序命名。

定义一

十进数[①]是一种利用十进位的概念以及一般的阿拉伯数字的算术。任何数都可以由它写出，由此商务中遇到的所有计算只用整数就能完成，而无须借助分数。

解释

把一千一百一十一写作阿拉伯数字 1111，在这种形式中每个1 都好像是下一高位数的十分之一。同样，2378 中 8 的位上的每个单位都是 7 的位上每个单位的十分之一，其他数也是这样。把研究对象命名将带来方便，我们将在后面的讨论中看到，此种计算主要基于以十[②]进位的思想，因此我们就可把本书恰当地叫做《论十进数》，我们将明白，不用分数，它就会解决我们在商业活动中遇到的一切计算问题。

定义二

任一给定的数叫做"单位"，并有符号⓪。

解释

比如，把三百六十四这个数叫作三百六十四单位，并写成 364⓪。其它情形同此。

定义三

单位的十分之一叫作甲，符号为①；甲的十分之一叫作乙，符号为②；下面每个数位的十分之一以此类推。

解释

这样，3①7②5③9④即 3 甲 7 乙 5 丙[③]9 丁。显然由定义知，各位上的数为 3/10，7/100，5/1000，9/10000，此数为 3759/10000。同样 8⓪9①3②7③对应的数是 8 9/10，3/100，7/1000 或8937/1000。

---

① Disme est une espece d'arithmetique，这是英文版译者引述的原文，意即：十进数是一种算术。

② Disme："十取其一"，后来这个词变为dime。在早期英语中作 dyme 和 dessime. 斯蒂文的书于 1608 年出版后 Disme 进入语言中，用作名词，意为十分之一或为十进算术的同意语，也可用作动词，即"分成十份"。

③ 英译本这里是 3 丙，显然错误。

其他数也是这样。我们必须认识到，在这些数中我们不用分数，而每个符号下的数从不超过 9。比如，我们不写 7①12②而写成同值的 8①2②。

定义四

定义二及定义三规定的数叫做十进数。

定义部分完[①]。

《十进算术》之第二部分　运算

⓪	①	②	③	④	
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

定理一——十进数相加

给定三个十进数 27⓪8①4②7③，37⓪6①7②5③，875⓪7①8②2③，求它们的和。

解法——把这些数像图中那样排好，就像做整数加法一样把它们加在一起。这样(见《算术》[②]第一个问题)得到和 941304，由上端的符号所示[③]，此数为 941⓪3①0②4③。即为所求之和。

证明——由本书定义三，已知的 27⓪8①4②7③是 27 8/10，

---

① 斯蒂文的其他著作给出了同样定义和符号的更一般的应用。下面的论文源于他在《算术》中的工作，其中几何级数占很重要的位置。他说："当古人认识到这种级数，即前项自乘得后项的级数的价值时，他们明白给这些数以有意义的名称是必要的，这样他们就能更好地认清这些数。他们称我们用①表示的第一项作甲，我们写作②的第二项叫作乙，等等。比如，①2②4③8④16 / ①3②9③27④81 "我们想，一个量的"单位"应当意味着与第一个量，即甲，明显不同的东西，在代数运算中用到的任一算术数及带根号的数，如 6 或 $2+\sqrt{3}$ …，我们都可叫作单位，写作符号⓪，但这种符号只有这个算术数或带根号的数未被命名时才能使用。

斯蒂文写出的已命名的数为 1N一时 3①5②，5 度 4①18②2790 杆 5①9②。他后来注释说(《算术》第 8 页)邦帆利除⓪外也用了这套符号。在邦贝利的《代数学》(1572)中，他用①，②，③……来表示未知量的次数，就如同斯蒂文用①，②，③一样，即一种特殊的几何级数的形式。

容易看出，这些量的名称除单位外都来源于 Pars minuta prima 中有关六十进数的论述。

② 《布鲁日的西蒙·斯蒂文著算术的应用》(莱顿，1585)

③ 斯蒂文将这些数写作三种形式，这视情况而定：27⓪8①4②7③，

⓪①②③ / 27 847，　27 847 / ⓪①②③。

4/100,7/1000,或 27 847/1000,同理 37⓪6①7②5③为 37 675/1000,875⓪7①8②2③为 875 782/1000。这样三数相加,由《算术》第 10 题,得 941 304/1000,而 941⓪3①0②4③与它相等。故知求得的确为其和。

	⓪	①	②
	8	5	6
	5	0	7
1	3	6	3

结论——我们已得到十进数相加的方法。

注释——如果问题中的数字有些位上缺数,则填 0 占位。比如,8⓪5①6②与 5⓪7②相加,后一数缺少甲位项,则把 0①填入,把 5⓪0①7②作为给定的数相加,这一注释同样适用于下面的三个定理。

定理二——十进数相减

给出一数 237⓪5①7②8③,从中减去 59⓪7①4②9③。求所得差。

解法——把数按旁边图上的顺序排好。按整数的方式作减法(见《算术》第 2 题),余 177829,按上面符号即为 117⓪8①2②9③,此即所求之差。

			⓪	①	②	③
	2	3	7	5	7	8
		5	9	7	4	9
	1	7	7	8	2	9

证明——由《论十进数》定义三,237⓪5①7②8③即 237 5/10,7/100,8/1000 或 237 578/1000。同样 59⓪7①4②9③即 59 749/1000;从 237 578/1000 中减去它,由《算术》第 10 问题,得 177 829/1000。而前面提到的 177⓪8①2②9③与它值相同。故确为所求的差,即所求证。

结论——我们已有了从一十进数中减去另一十进数的方法。

定理三——十进数相乘

给出 32⓪5①7②和乘数 89⓪4①6②,求其积。

解法——把两数排好,并按整数乘法的方式(见《算术》第 3 问题)将其相乘,得积 29137122。将给定两数末位的次数符号相加,其中一个是②,另一个也是②,于是得④。那么积的末位数次数符号就是④。它一旦确定,也就由顺序知道了前面的次数符号。所以 2913⓪7①1②2③2④即所求的积。

证明——如《论十进数》定义三所示，所给的数32⓪5①7③为32 5/10,7/100或32 57/100，同样，乘数89⓪4①6②是89 46/100。它乘以32 57/100得积2913 7122/10000(见《算术》第12题)。而前面所述的积2913⓪7①1②2③2④与它等值，所以确为我们要求的积。下面解释为什么乙位乘以乙位的数得到的积是丁位数，即两个符号的和，为什么丁位乘以戊位数得积为壬位数，为什么单位乘以丙位得积为丙位的，等等。

```
        ⓪①②
        3 2 5 7
        8 9 4 6
      ---------
      1 9 5 4 2
    1 3 0 2 8
  2 9 3 1 3
2 6 0 5 6
---------------
2 9 1 3 7 1 2 2
      ⓪①②③④
```

试以2／10和3/100为例，依本书定义，它们是2①和3②的值。它们的积是6/1000，由上面的定义三知它为6③。这样，甲位乘以乙位所得积为丙位数，即此数次数为给定次数之和。

```
    ④⑤⑥
    3 7 8
      5 4②
  -------
  1 5 1 2
1 8 9 0
---------
2 0 4 1 2
④⑤⑥⑦⑧
```

结论——已知十进数的乘数和被乘数，我们会求积。

注——若被乘数和乘数的末位次数不等，如：3④7⑤8⑥和5①4②，计算过程同上，数字排列如下：

定理四——十进分数除法

3⓪4①4②3③5④2⑤被9①6②除，试求它们的商。

```
1
18
3164
1687      ⓪①②③
344352 (3 5 8 7
96666
999
```

解法——先不管次数符号，像《算术》第4题对整数做除法那样把两数相除，这样得到商3587。为确定次数，从被除数的末位次数⑤减去除数的末位次数②，得到③即商的末位次数。接着由顺序推知其他位的次数。故3⓪5①8②7③为所求的商。

证明——由本书定义三，被除数3⓪4①4②3③5④2⑤是3 4/10,4/100,3/1000,5/10000,2/100000或344352/100000，除数9

①6②为 9/10,6/100 或 96/1000。由《算术》第 13 题,其商为 3 587/1000。故前面所说的 3⓪5①8②7③即为其商。

结论——给出十进数的被除数和除数,我们可以求商。

注一——如果除数的次数高于被除数的次数,则在被除数后面添上可能需要的若干个零。例如,7②被 4⑤除,在 7 后添零,像上面那样做除法,得商 1750。

32 ⓪
7000 (1750
4444

有时,商不能表为整数,如 4②除以 3④。好像商的后面有无穷的 3 还余⅓。这种情况下,我们将按问题的要求尽量接近真值而省略余数。

实际上,13⓪3①3②或 13⓪3①3② 3⅓③为精确的结果,但本书中我们只用整数,我们还注意到,在商业上人们并不计较一麦[①] 或一谷[②] 的千分之一是多少。像这种省略甚至出现在几何和数论大师的结果意义重大的计算中。比如,托勒密和杰安·德·蒙特罗制数表时并不是取尽能用混合数表示的精确值,从这些表的功用看,近似比完美有用得多。

111 ⓪①②
400000 0 (13 3 3
3333

注二——十进数可用来求根。比如,要求 5②2③9④的平方根,用一般的求平方根的方法得根为 2①3②。根的最后一位的符号总是所给数末位符号的一半。如果所给数末位符号是奇数,则要在末尾添上一位(添上一个零),然后按上面的办法求根。用同样的方法可求立方根,已知数末位符号的⅓即根的最后一位符号——对其他次根也是这样。

1
5 2 9
2 , 3
4 2 9

《十进算术》完

附录

讲过了十进数,现在我们要考察其应用。在以下六个附录中,

---

① (maille)等于¼盎司。

② 英美重量的最低单位,1 谷=64.8 毫克或1/7,000磅。

我们要介绍在商业中碰到的计算问题是怎样用十进数解决的。我们将从测量的计算开始，因为在导言中我们首先提到这个话题。

附录一　测量的计算

将十进数用于测量时，把测量用的杆① 当做一个单位，分它为相等的十部分或叫做甲，若要更小的单位，再把每个甲分做十乙，把每乙分为十丙，这视需要而定。在测量中，乙的刻度已足够了，但要更精确，比如测量铅屋顶、厚度等，人们就要用到丙位了。但是许多测量员并不用杆测量，而是用一种约三、四杆，或五杆长的绳索和一把横交尺②。这种横交尺带有精确到英寸的长为 5 或 6 英尺的刻度。这些人可用五或六甲来代替十甲，然后再把单位进一步分为十份，每一部分为乙。他们可以使用带有这种刻度的横交尺而不必管在当地一杆有多少英尺和英寸，进而像前面的例子那样对测量数据进行加、减、乘、除运算。比如，把四个面积③ 相加：345⓪7①2②，872⓪5①3②，615⓪4①8②和 956⓪8①6②。用《十进算术》的定理一把它们相加，得到和 2790 杆 5 甲 9 乙，此数除以一帕④ 合杆的数，就得到所合的帕数。把测量尺翻过另一面可知 5 甲 9 乙合多少英尺和英寸；这是测量员最后要做的事，即在他给土地所有者的报告的最后要写的，而这一步工作经常省略，因为大多数人觉得提及小的单位没有什么用。

			⓪	①	②
	3	4	5	7	2
	8	7	2	5	3
	6	1	5	4	8
	9	5	6	8	6
2	7	9	0	5	9

例 2. 从 57⓪3①2②中减去 32⓪5①7②，依《论十进数》定理二，得差 24 杆 7 甲 5 乙。

	⓪	①	②
5	7	3	2
3	2	5	7
2	4	7	5

① 这里指 1 杆长的尺。

② 横交尺在其中点上安有一垂直的柄，尺身可沿着此柄自由滑动，因此尺身滑动前后的位置是平行的。用此工具时，测量者调整横交尺以使从尺端到中间横木端点的视线与要测量的线的端点重合，这样，要测量的距离可由一次测量的值及相似三角形计算得到。当不能到达要求的线的两端时，则由两次测量的结果和测量点的距离求得。

③ 斯蒂文的面积单位显然也从他的十进体系中得来，这样面积单位的甲是这个单位本身的十分之一，而不是线性单位十分之一的平方。

④ 公用的面积单位，在不同地区合 3000 到 5100 平方米不等。

例 3. 8⓪7①3②乘以 7⓪5①4②(它们可能是一长方形或四边形的两个边),根据《论十进数》定理三进行运算,得积,或者说面积,65 杆 8 甲等等。

```
   ⓪①②
   8 7 3
   7 5 4
 ─────────
   3 4 9 2
 4 3 6 5
6 1 1 1
 ─────────
6 5 8 2 4 2
 ⓪①②③④
```

例 4. 设长方形 $ABCD$ 的边 AD 长 26⓪3①。从 AB 上找一点作 AD 的平行线,割出一面积为 367⓪6①的矩形。367⓪6①除以 26⓪3①,根据《论十进数》定理四得商 13⓪9①7②,即要求的 AE 的距离。如要更精确的结果,除法还可以继续进行下去,但这种精确性似乎没有必要。这些问题的证明在我们前面提到的定理中给出。

附录二　论挂毯的度量单位的计算(略)

附录三　用于桶的标准测量和度量的计算(略)

附录四　一般体积度量的计算(略)

```
      1
    2 2
    7 6
  2 5 0 8
  4 6 3 1
1 0 4 7 3 9  ⓪  ①  ②
3 6 7 6 0 0 (13  9  7
2 6 3 3 3 3
  2 6 6 6
    2 2
```

附录五　天文计算[①] (略)

附录六　各级造币局长、商人、及一般人士的计算问题

简而言之,本篇要说所有的度量单位——不管是丈量的、液量的、干量的及货币的都可以按十进制来划分,而大的单位才被叫做单位。渣是金银重量的单位,磅是其他重量的单位。毛镑在佛兰德

① 斯蒂文在这里希望天文计算中也一律采用十进制,这一想法并未得到很好实现。

斯、细镑在英格兰、杜卡在西班牙都是钱的单位。在钱的各种度量单位中，渣的最高符号(最低的单位)是丁位的，因为甲相当于安特卫普的埃斯的一半，而毛镑的最高符号是丙位的，因丙比一便士的四分之一小。

重量单位的分划应包括每个符号的5，3，2，1倍，即磅之后是5甲(半磅)，接着是3甲、2甲、1甲，而不是半镑、盎司、半盎司、细镑、谷等。其他重量单位也应该有类似单位的5倍以及接下来的倍数。

我们想，不管何种度量单位，每种分划都起码应命名为甲、乙、丙等等。因为我们凭次数可明显看出乙位乘以丙位得到戊位的积，丙位除以乙位得到甲位的商。这一事实再清楚不过了。当人们为了区别度量的单位而把它们命名时，像我们所说的半古尺，半镑等，我们可称它们作甲渣、乙渣、乙镑、乙古尺等。

比如，设想1渣的金子值36镑5①3②，那么8渣3①5②4③的金子值多少呢？把3653乘以8354得积305镑1①7②1③即所求的解[①]。至于零头6④2⑤，我们忽略不计。

再如2古尺3①的布值3镑2①5②，那么7古尺5①3②的布值多少呢？为求得答案，依习惯把已知的最后一数乘以第二个数，再把所得之积除以第三个数[②]即753乘以325得244725，它除以23得商10镑6①4②。

我们本来可以给出各种与商业有关的算术的一般算律的例子，及合伙、利率、交易的例子，并说明怎样仅用整数处理，怎样用算筹就简单地完成。但这些都可以通过上面的论述推导出，就不加详述了。我们也可以再用繁琐的，利用分数计算的例子来表明，用一般数计算和用十进数计算效果的迥然不同。但为简洁，还是将它省去。

---

① 斯蒂文在取结果的近似值时并不前后一致，在计算利率表时，他说因100/101多于一半，故将其看作一个超单位。——原注。

② 指那个没用到的数。

最后必须指出：任何人都能使用前五篇所说的十进分划，而第六篇的结果一定要被每个善良守法的人所接受。从十进分划的巨大利用价值来看，应鼓励人们去积极呼吁，使国家实行除现行的度量、重量、金衡的普通单位外的大单位的十进制分划法。进一步可以让所有新的钱币都用这种十进制。如果这一设想的实施并不像我们希望的那么快，那么至少它会有利于我们的子孙后代。我确信，我们的后代如能像他们的先祖一样，则一定不会永远忽视这种有重大价值的东西。

在任何时候，人们愿将自己从繁重的劳动中解放出来都是令人高兴的。虽然附录六的内容在一段时间里还不能发挥其效用，至少人们还可以利用前五篇中的内容。实际上，它们已经明显地付诸于人们的实践了。

附　录　完

（李家宏 译　欧阳绛 校）

29. 韦达:《分析引论》

韦达(François Viète,拉丁文拼法 Franciscus Vieta,1540～1603)出生于法国普瓦图(Poitou)地区,1560年获法学学位,后来成为与宫廷有重要联系的律师。韦达主要利用业余时间从事数学研究。由于他的著作内容深奥,言辞艰涩,他在世时没有产生很大影响。1646年,荷兰数学家斯霍滕(F. van Schooten)出版了韦达的著作集,人们才开始认识其工作的价值。韦达在三角学、代数及几何学方面均有贡献,最为重要的是关于符号代数和方程理论的工作,这方面的代表作就是《分析引论》(In Artem Analyticem Isagoge,1591)。在这本书中,韦达通过研究古希腊数学家的著述,将分析和综合重新作了区分,并试图重建分析。为此,他引入了所谓"类"的运算(logistica speciosa),用字母表示量,并给出这种运算的法则,进而扩展到解方程的应用中。在韦达之前,方程中的系数是具体的数值,他首次系统地引入一般的符号代数(更接近于现代的表示方法则来自笛卡儿),这是代数学中的重大进步。我们注意到,韦达承袭了希腊人的"齐性原则",要求方程中各项都是"齐性"的。《分析引论》共八章,以下选译前五章中的部分内容,原载 F. van Schooten 编辑的 F. Vieta,Opera Mathematica, Liden,1646。

第Ⅰ章　分析的定义和分类以及对分析法有用的因素[①]

这样通过分析术(zetetic)可得到要求的量和已知量间的方程或比例[②],通过验析术(poristic)可以运用方程或比例检验所求定理的真实性,通过解析术(exegetic)可从构造的方程或比例中得到要求的量本身。于是可以将这三种相互结合的分析法称为发现数学真理的科学。但是真正属于分析术的方法是根据逻辑方法,通过三段论和省略三段论[③] 建立起来的,它的基础正是得到方程和比例的那些符号[④] ……然而分析术有其自身的运作形式,因为它不再将其推理局限于数——这是古代分析的一个令人厌烦的特性——而是用一种符号推理,这是以一种新的方式来研究"类"[⑤] 的。一旦建立起齐性定律并为此构成了一种惯常的根据量自身的性质从类到类递升或递减的量的系列或等级,并且通过这等级可以标明和区别方程中量的次数和类别,那么对于方程中量与量之间的比较,这种符号推理就比数字推理更为成功而有效了。

第Ⅱ章　方程和比例的符号[⑥]

1. 整体等于其部分之和。
2. 等于相同量的量彼此相等。
3. 等量加等量,和相等。

---

① 在这一章中,韦达提到帕波斯对于分析与综合的区分(参考本书帕波斯《数学汇编》节选中关于分析与综合的部分)以及 zetetic 分析与 poristic 分析的区别,也提到了欧几里得与赛翁。他认为还应有第三种分析:rhetic 或 exegetic。为区别起见,我们将 zetetic 译作"分析术";poristic 译作"验析术";exegetic 译作"解析术"。而 zetetic 方法在韦达的解释中就相当于现代分析法。

② 韦达写的是 aequalitas,等式,但现在所用的"方程"这个词似乎更符合文中的意思。

③ 省略三段论指不完整陈述的三段论,省略大前提或小前提。

④ 符号,Symbola 在这里更多地含有基本法则或约定的意思。

⑤ 韦达所用的"类"(species)这个词可能译自丢番图的 eidos,他提出"类"的运算以区别通常的数的运算,而在特殊的表达式中,这个词主要指它所包含的未知量的特殊的幂。

⑥ 在这一章中,韦达从欧几里得的《原本》中选取了许多公设和命题。

8. 若相似的比例项加上相似的比例项，则和成比例[①]。

……

15. 如果有三个或四个量，且首末项之积等于中间项自乘或等于两中间项之积，那么这些量成比例[②]。

第Ⅲ章　齐性量的定律以及所比较的量的次数和类[③] 别

方程或比例的第一个也是最重要的定律，由于涉及齐性量，故称为齐性定律，内容如下：

1. 齐性量必须与齐性量相比较。

确实，如艾德拉斯特斯(Adrastus)所言，无法知道非齐性量之间如何相互影响[④]。因此：

如果一个量加到另一个量上，这个量就与另一个量齐性。

如果从一个量中减去一个量，则后一个量与前一个量齐性。

如果一个量被一个量乘，其结果对于这两个量都是非齐性的。

由于这些古代的分析学家没有注意到这一点，故结果[⑤] 往往含糊而盲目。

2. 依照自身的性质按比例地从类到类递升或递降的量称为梯量(scalars)[⑥]。

第一级梯量是边或根[⑦]。

第二级是平方。

第三级是立方。

---

① 若 $a:b=c:d$，则 $(a+c):(b+d)=a:b=c:d$。

② 若对于 a,b,c,d 有 $ac=b^2$ 或 $ad=bc$，则 $a:b=b:c$ 或 $a:b=c:d$。

③ 韦达在这里使用了另一个拉丁词 genera 来表示狭义的类，我们仍译作“类”。

④ 参考了赛翁的一个注释：“因为 Adrastus 说不可能知道非齐性量怎样互相成比例。”

⑤ 这里的“结果”指乘积。

⑥ scalars 意思是“阶梯式的”，按字面意思是梯子的级或其横木。韦达命名幂时遵循丢番图的主张。由于向量分析而闻名的术语标量(scalar)则为哈密顿(W. R. Hamilton，1853)所首创。

⑦ 用我们的记号是 x，接下来的梯量是 x^2,x^3,x^4 等等。在韦达的著述中，这些量有维数。

第四级是平方的平方。

第五级是平方的立方……

……

第九级是立方的立方的立方。

由此用这种系列和方法可以命名更多的梯量……

我们所要比较的、以使其可以按照梯量的次序命名的量所属的类是：

(1) 长和宽，

(2) 平面，

(3) 立体，

(4) 平面-平面，

(5) 平面-立体，……

(9) 立体-立体-立体。

由此可用这种系列和方法命名更多的类。

……

5. 在一系列梯量中，当与边作比较时量所在的次数称为幂。其他的低阶梯量称为这个幂的相近(parodic)① 级。

6. 当幂摆脱影响时则称其为纯粹的。影响是指一个齐性量与一个带有系数的低次幂的量合在一起②。

7. 附加量乘以关于某个幂为低阶的梯量从而得出齐性量，这些附加量称为次渐近量(subgradual)③。

第Ⅳ章　类的运算法则

数的运算通过数来进行，类的运算则通过量的类或形式进行，例如，像字母表中的字母。

---

① parodic 来自希腊语 para，hodas，意指：走近来。

② x^5 是纯粹的，x^5+ax^4 是受影响的。

③ 次渐近量指长，宽，平面，立体，平面－平面等等。例如，若有一个平方的平方与一个平面－平面混合，后者由边乘以一个立体组成(即 $x^4+x\cdot x^3$)，则立体就是一个次渐近量，对于平方的平方而言，边是一个低阶梯量。

类的运算有四条典型的法则。

法则Ⅰ. 将一个量加到一个量上。

取两个量 A 和 B,我们要将一个加到另一个上。但是,由于齐性量不能被非齐性量影响,所以我们要加的那些量必须是齐性量。一个量大于另一个并不构成类的差异。因此可以通过结合或附加将它们适当地相加。如果 A 和 B 是简单的长或宽,那么总和就是 A 加 B,但是如果它们位于较高的等级,或者如果与位于较高等级的量在同一类中,就要用一种适当的方式来表示,如 A 平方加 B 平面,或 A 立方加 B 立体,以此类推。

不过分析家们习惯于用+号表示求和影响。

法则Ⅱ. 从一个量中减去一个量。[1]

法则Ⅲ. 用一个量去乘一个量。

取两个量 A 和 B,我们想用一个量乘以另一个。

由于一个量被另一个量乘时,由它们的乘法会得到一个对于这两个量都是非齐性的量,它们的乘积恰当地用"在……内"(in)或"在……下"(under)表示,例如,A 在 B 内,这意味着一个已被另一个乘了,或者,如其他人所说的,在 A 和 B 下,但只有当 A 和 B 是简单的长或宽时才能这样说[2]。

但是如果一些量位于较高等级,或者它们与高阶的量属同类,则加上名称本身就比较方便,例如,A 的平方在 B 内,或 A 的平方在 B 平面立体内,在其他情况下类似。

然而,在要相乘的量中,如果有两个或更多个量名称不同,则运算不会发生什么问题。因为整体等于其各部分,故某个量的诸部分下的乘积等于全量下的乘积。当一个量的正名称被一个也是正名称的量乘时,积是正的;当被一个负名称的量乘时,积是负的。

由这个规则可得,两个负名称相乘,积是正的,如当 $A-B$ 被

---

① 用类似的方法得到 $A-B$,A 平方$-B$ 平方,A 大于 B 以及 $A-(B+D)=A-B-D$ 等。韦达用"="代替我们的"-"号。

② 在算术中,习惯用"in";在几何中,习惯用"under":一个长方形是"在其边之下"。

$D-G$ 乘时，由于正 A 与负 G 的积是负的，这意味着取走了太多[负 B 乘以正量类似]。因此，作为补偿，当负 B 乘以负 D 时，积是正的①。

因此，对于从类到类在量上按比例递升的诸因素的命名按下列方式进行：

边乘以边得平方，

边乘以平方得立方。

反之，平方乘以边得立方……

立体乘以立体－立体得立体－立体－立体，反过来，也是按这个顺序。

法则Ⅳ. 用一个量除一个量。

以类似的方式可得诸如$\frac{B\text{ 平面}}{A}$，$\frac{B\text{ 立方}}{A\text{ 平面}}$等等表达式。此外，将$\frac{Z\text{ 平面}}{G}$加到$\frac{A\text{ 平面}}{B}$上，其和将是

$$\frac{G\text{ 在 }A\text{ 平面内}+B\text{ 在 }Z\text{ 平面内}}{B\text{ 在 }G\text{ 内}}$$

以 Z 乘$\frac{A\text{ 平面}}{B}$，结果是$\frac{A\text{ 平面在 }Z\text{ 内}}{B}$。

第Ⅴ章 关于分析(ZETETICS)的定律②

一般地，按照下列定律运用分析方法：

1. 如果我们要求一个长度，但在问题所给定的资料数据的掩盖下不易发现方程或比例，则设要求的未知量是一个边。

2. 如果我们要求一个平面，……则设要求的未知量是一个平方。

---

① $(A-B)(D-G)=AD-AG-BD+BG$。

② 韦达在这一章中介绍的定律相当于引入了 x、x^2，x^3，$x=ab$ 等，他用元音字母表示未知量，用辅音字母表示已知量，给出 $x^2=ab+cd$，$ax\pm bx$，$x^3+ax^2-bx^2=c^2d+e^3$ 等形式。韦达还以命题的形式表明对方程进行移项，或两边同时被一个未知量或已知量所除，方程不改变。他还讨论了比例方程的关系。

……

9. 如果在给定度量下是齐性的元素，恰好与并合地齐性的元素结合，则将是对照(antithesis)①。

第Ⅵ章　关于用验析术检查定理②

……

第Ⅶ章　关于解析术的作用③

……

第Ⅷ章　方程的记法及这一方法的后记④

……

29. 最后，现经塑造成为分析、验析和解析三重形式的分析术，就理所当然地担当起解决那值得夸耀的"问题之最"的重任，这"问题之最"就是"没有不能解决的问题"。

(高　嵘译　贺　霖校)

---

① 即由 $x^3+ax^2+bx^2-c^2d+e^2f=g^3$ 变成 $x^3+ax^2+bx^2=c^2d-e^2f+g^3$。并合的齐性元素指 $ax\pm bx$ 的形式。

② 这一章论述了通过综合回顾分析的过程。

③ 这一章中解法之后，讨论了分析术对于特别的算术与几何问题的特殊应用。这里韦达称为 exegetic 术。

④ 这一章中讨论了各种可能的表达式和方程，其中特别强调了齐性。包括 29 条法则。

30. 纳皮尔:论对数表

约翰·纳皮尔(John Napier,1550～1617),是苏格兰贵族,由于他首先出版了对数表,所以在对数的发明上拥有无可争议的优先权。起初他的对数与今天的对数形式上不太一样,后来经过他自己和布里格斯(H. Briggs,1561 1630)等人的改进很快接近现代的系统。对数的发明大大减少了计算的工作量,因而很快风靡欧洲,拉普拉斯评价说对数的发现"延长了天文学家的寿命。"纳皮尔有关对数的著作有:《奇妙的对数定理说明书》(Mirifici logarithmorum canonis descriptio,1614)和《奇妙对数定律的构造》(Mirifici logarithmorum canonis Constructio,1619)。后者是在纳皮尔去世后由他儿子R. 纳皮尔整理出版的,但其撰写年代却早于《奇妙的对数定理说明书》。该书对对数的定义、对数表的构造方法等有充分解释,以下摘译其主要部分,底本为 W.R.MacDonald: The Construction of the Wounderfal Canon of Logarithms, Blackwood, Edinburgh,London,1889.

1.[①] 对数表是一种小的数表,我们可以用它经过非常简单的计算获得所有几何维度及空间运动的知识……表中的数是从成连续比例的级数中选取的。

2. 在成连续比例的级数中,算术级数是指中间间隔相等的级数;几何级数是指间隔虽不相等,但却成比例地增加或减小的级数。

16. 从末尾带七个0的半径中减去它的10 000 000分之一,再从这个差中减去它的10 000 000分之一,以此继续,就会很容易

① 分段号码为原文所有。

地得到一百个成几何比例的数值，其中间的比例总是保持为半径与比它小 1 的线段的比，即 10 000 000 比 9 999 999；这一列的数值我们称做第一表[①]。

这样从这一半径（为增加准确性再加七个零，即 10000000.0000000）中减去 1.0000000，得到 9999999.0000000；从中再减去 .9999999，得到 9999998.0000001，照此进行，直到得到一百个数值，如果计算正确，最后一个数值为 9999900.0004950.

17. 第二表[②]接着从末尾带六个零的半径开始，计算出五十个成比例减少的数，该比例最方便地、尽可能准确地保持在第一表的首末两数之间。

第一表的首末两数是 10000000.0000000 和 9999900.0004950，以这个比例计算五十个数比较困难。一个近似而简单的比例是 100000 比 99999. 这样，在半径后面添六个零，然后不断地从每个数中减去它自身的 100000 分之一得到下一个数，就能保证

---

① 第一个数表：
通项公式为：

$10^7(1-\frac{1}{10^7})^r$，　　$r=0$ 到 100

	10000000.0000000
	1.0000000
	9999999.0000000
	.9999999
	9999998.0000001
	.9999998
	9999997.0000003
	.9999997
	9999996.0000006
一直到	9999900.0004950

② 第二个数表
通项公式为：

$10^7(1-\frac{1}{10^5})^r$，　　$r=0$ 到 50

	10000000.000000
	100.000000
	9999900.0000000
	99.999000
	9999800.001000
一直到	9995001.222927

足够的精确度；这个表包含了作为第一个数的半径及五十个其它成比例减少的数。最后一个数，如果没搞错的话，应是9995001.222927[①]。

18. 第三表[②]有六十九列，每列有二十一个数。其递减的比例最方便地、尽量准确地保持在第二表的首末数之间。

在半径后添五个零，然后减去它的2000分之一，并不断地从新得出的数中减去它的2000分之一。这样，很容易地得到第一列。

在形成该级数的过程中，第二表的第一数——10000000.0000000，与最后一数——9995001.222927之间的比有点复杂；于是用10000比9995的比率(既简单又足够准确的)计算出二十一个数值。最后一数，如果没错的话，是9900473.57808。

在计算时，只要误差觉察不到，便可以从这些数的后面舍掉几位数字，以便更简单地计算后面的数。

19. 每列的第一个数必须从加了四个零的半径得来，其比率最简单、最准确地保持在第一行的首末两数之间。

第一列的第一个数为10000000.0000，最后一数为9900473.5780，与它们的比接近的，最简单的比是100比99. 因此依100比99的比率从半径开始，不断地从每个数中减去它的百分之一，可连续地得到68个数。

20. 用同样的比例，从第一行的第二个数开始，计算出每列的第二个数，然后从第一列第三数开始计算每列的第三个数，从第一

---

① 应为9995001.224804。

② 第三个数表

通项公式为：第q列的第p个数为：

$$10^7\left(1-\frac{1}{2000}\right)^{p-1}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{q-1}$$

第一列	第二列	…	第六十九列
10000000.0000	9900000.0000	…	5048858.8900
9995000.0000	9895050.0000	…	5046334.4605
9990002.5000	9890102.4750	…	5043811.2932
9985007.4987	9885157.4237	…	5041289.3879
一直到	一直到		一直到
9900473.5780	9801468.8423	…	4998609.4034

列第四数计算每列的第四个数，并依此类推。

从一列的任意一数开始，减去它的百分之一，得到下一列的同级的数，这些数须依次序排列。

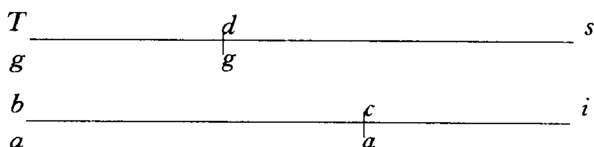
注意：第六十九列的最后一个数是 4998609.4034，它几乎已是开始数的一半。

21. 在第三表中，在半径和半径的一半之间，我们添加了六十八个数，比例为 100 比 99，而在上述的每两个数间，我们已添加过二十个数，比例是 10000 比 9995. 另外，在第二表中这些数的首尾，即 10000000 和 9995000 之间，已添加过五十个数，比例为 100000 比 99999；最后，在第一表中，添加了一百个数，比例为半径(10000000)比 9999999；因为它们的差总不大于单位 1，故无须再细地内插平均数。此三表完成以后，则足以计算对数表。

至此，我们已解释了在正弦表或自然数表中怎样最简单地内插成几何比例的级数。

22. 下面的工作是：在第三表中在以几何比例减少的正弦或自然数旁设置以算术级数的比例增加的对数或人造数。

26. 一给定正弦的对数是指当半径以几何级数减小到给定正弦[①]大时，这段时间里以半径开始减小的速度为自始至终的速度，以算术比例增加的数。



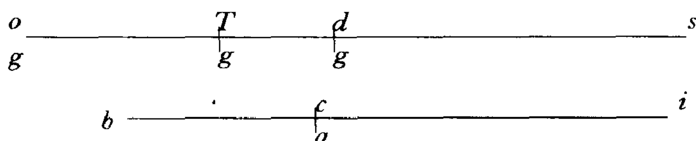
设线段 TS 为半径，dS 为同一线段上给定的正弦；设 g 从 T 在某一特定时间内以几何级数移动到 d. 又设 bi 为另一条线，i 的一端为无穷远，设 a 沿直线以 g 在 T 点时的速度以算术级数移动；从固定点 b 向 i 的方向，a 在同一时间内到达的点为 c. bc 的长叫作给定正弦 dS 的对数。

---

① 对纳皮尔来说正弦即一线段或线段长，正如今天用线段表示三角函数一样。

27. 零是半径的对数。

28. 这里自然得出任何给定正弦的对数都比半径与给定正弦的差大，而比半径和一个量的差小，这个量与半径的比等于半径与给定正弦的比，这两个差叫做对数的限。



重画上面的图形，将 ST 从 T 端延长出去到 o 点，使 oS 比 TS 等于 TS 比 dS。我说 bc 是正弦 dS 的对数，它比 Td 大而比 oT 小。因 g 从 o 到 T 运动的时间与 g 从 T 运动到 d 的时间相同，(据 24)oT 占 oS 的部分相当于 Td 占 TS 的部分，在同一时间里(据对数定义)a 从 b 运动到 c；所以 oT，Td 和 bc 是在相等时间里经过的距离。但因 g 在 T 与 o 之间比在 T 点运动得快，而在 T 与 d 之间要比在 T 点时慢，但在 T 时的速度与 a 的速度相同(据 26)；得到在相同时间里，g 通过 oT 这段距离时因速度快所以长于 bc，在 Td 这段速度慢所以短于 bc，其中 bc 是 a 用中速通过的距离。结果 bc 自然是前两者的某种平均数。

于是 oT 叫做 bc 表示的对数的上限，Td 叫做下限。

29. 求给定正弦对数的上、下限。

由上面已证，半径减去给定的正弦得到下限；半径乘以下限再除以给定的正弦得上限。

30. 这样第一表的第一个比例数 9999999 的对数在上、下限 1.0000001 和 1.0000000 之间。

31. 上、下限本身的差极其微小，所以它们或它们间的任何数都可被视做对数值。

32. 若有任意多的正弦以几何比例从半径开始递减，已知它们中一个的对数或其上、下限，求其他的对数。

这必然要从算术递增，几何递减及对数等概念得出。故如果半径后的第一个正弦的对数已知，则相应的第二个对数应是它的二

倍，第三个对数是它的三倍，以下类似，直至求出所有正弦的对数。

36. 同比例正弦的对数差相同。

这是对数及两个运动定义的必然结果。同样这些对数各自的上、下限的差也相同。也就是说，对那些正弦是等比例地分布的对数来说，下限的差相同，上限的差也相同。

38. 在四个成几何比例的数中，因为中间两个的积等于两边两个的积；所以他们的对数中中间两个的和等于最大和最小的两个的和。于是只要这些对数中的任意三个已知，则可知第四个①。

39. 两个正弦对数的差存在于两个限间，其上限与半径的比等于正弦差与小一点的正弦的比，下限与半径的比等于正弦差与大一点的正弦的比②。

在第三表中自然数旁写下它们的对数。第三表这样处理之后我们就称它作根表。制根表的工作到此完成并近于完善。

48. 完成根表后，我们仅从其中取数做对数表。就像前两表是第二表的准备，根表是为构造主对数表作准备，构造它非常容易，其误差又觉察不到。

51. 所有比例为二比一的正弦其对数之差为 6931469.22③。

52. 所有比例为十比一的正弦的对数之差为 23025842.34。

55. 半径的一半与给定弧度一半的正弦的比率等于半弧的补

---

① 现代的积的对数定理这里不成立，因为单位 1 的对数不是零。

② 这由比例定律及 36 条证明。这一规则在 40～41 条中用来说明如何从 9999975.5 在第一表中最近的一个正弦 9999975.0000300 求其对数，注意到第 2 数对数的上、下限是 25.0000025 和 25.0000000，两个数对数的差由刚给出的规则是 4999712. 于是 9999975.5 的对数的上、下限为 24.5000313 和 24.5000288，他就把 24.5000300 列为其对数。

在 41～45 条中他说明了现在可以在第一、第二和第三表中计算出所有“比例数”的对数，这些表中的正弦及虽不是比例数但却与比例数接近或在其间的自然数的对数，也可以这样算出。

③ 纳皮尔通过计算 7071068 的对数得到这一结果，它是 50×10^{12}的平方根，而 50×10^{12}比“半径”是 45°的正弦。据 39 条，它的对数是 3465734.5，即得到了 51 条的结果。

弧正弦与全弧正弦的比率[①]。

56. 把 45 度弧的对数加倍即是半径的一半的对数。

57. 半径的一半及任给弧的对数和等于半弧的对数与那半弧的补弧的对数的和。这样，半弧的对数可在其他三数已知的情况下求出。

59. 构造一个对数表[②]。

（李家宏 译　欧阳绛 校）

---

① 纳皮尔在这里才开始引入角度来构造他的表。他用几何法则及前面有关对数的定理证明了 55～57 条。

② 纳皮尔表的构造与今天所用的表大致相同，只是在第二(六)列给出正弦，这些正弦对应于在顶(底)端的度数及在第一(七)列的分。第三(五)列给出对应的对数。第四列是第三、五列对数值的差。于是第三、五列的数就是基本的正切对数和余切对数。其中一页的复制本可在麦克唐纳的译本 138 页中看到。

Ⅳ. 微积分的制定与分析的形成

31. 开普勒:《测量酒桶的新立体几何》

微积分的创立与解析几何的发明一起,标志着文艺复兴后欧洲近代数学的兴起。

微积分的思想根源部分(尤其是积分学)可以追溯到古代希腊、中国和印度人的著作。在牛顿和莱布尼茨最终制定微积分以前,又经过了近一个世纪的酝酿。在这个酝酿时期对微积分有直接贡献的先驱者包括开普勒、卡瓦列里、费马、笛卡儿、沃利斯和巴罗(I. Barrow,1630~1677)等一大批数学家。

开普勒(Johannes Kepler,1571~1630),出生于德国魏尔(Weil),16 岁进入蒂宾根大学,1593~1599 年在奥地利格拉茨任数学教师,是著名天文学家弟谷(Tycho Brahe)的助手。1601 年到布拉格任奥地利帝国皇家数学家。他在 1609 年出版的《新天文学》(Astronomia Nova, Heidelberg)一书中宣布了著名的行星运动三大定律,这使他在天文学中享有永久的地位。在数学方面,开普勒的工作导致他研究了许多现在用微积分解决的问题。他 1615 年发表的《测量酒桶的新立体几何》(Nova stereometria doliorum vinariorum, Linz)一书,阐述了求圆锥曲线绕其所在平面上某条直线旋转而成的立体体积的积分法。以下从中选录一部分简单的内容来说明开普勒这种不够严密但很有启发性的方法。原文载于 J. Kepler: Opera Omnia, Ⅳ. pp 557~558,582~584,Ch. Frisch (ed.),Heyder & Zimmer,Frankfurt,1858.

第一部分 规则图形的体积

定理 1 我们首先要知道圆周长与直径的比。阿基米德指出:

圆周长与直径之比约为 22∶7。

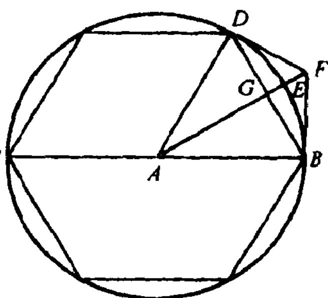


图 1

为证明这一定理，我们利用圆的内接和外切多边形。这种多边形有无穷多个。为了方便，采用六边形（图1）。令正六边形 CDB 内接于圆，$\angle C$，$\angle D$ 和 $\angle B$ 是六边形的内角，DB 是它的边，F 是过 D 与 B 的两条切线的交点。直线 AF 连接圆心 A 与点 F，并与直线 DB 交于 G，与弧 DB 交于 E。显然，由于 DGB 是一条直线，所以它是 D 与 B 间的最短距离。

另一方面，DEB 是一条曲线，不是 D 与 B 间的最短距离，所以 DEB 比 DGB 长。而 BF 是圆的切线，曲线 EB 上的所有点都位于 FB 和 GB 之间。因此，若 EB 是直线，它也会短于 FB。在 ΔFEB 中，$\angle FEB$ 等于直角①，而 $\angle EFB$ 为锐角，所以 $\angle EFB$ 的对边 EB 小于 $\angle FEB$ 的对边 FB（在同一个三角形中，大角对大边）。我们可以设想 $\overset{\frown}{EB}$ 为线段，因为在证明过程中，圆被分割成非常小的弧，一直小到每段弧可以被看作一条线段。

如图所示，曲线 DEB 在 ΔDBF 内，它必小于 DF，FB 之和，因为它弯向 $\angle DFB$，且全部在 $\angle DFB$ 内。根据常识，若甲包含乙，则甲大于乙。如果曲线 DEB 是卷绕而不规则的，那就不同了。

DB 是内接六边形的一边而 DF，FB 是外切六边形的两个“半边”，弧 DEB 是圆的六分之一且大于 DB，小于 $DF+FB$，所以 6 倍的 DB 小于圆周而 12 倍的 DF（或 FB）大于圆周。

但是，正六边形的边 DB 等于半径 AB，而六倍的半径 AB 即三倍的直径 CB，或 $\frac{21}{7}CB$，所以 $\frac{21}{7}CB$ 小于圆周。

由于 DG 与 GB 相等，故 GB 为 AB 之半，但 AB 平方等于 AG

① 实际上，$\angle FEB$ 略大于直角。

平方与 GB 平方之和，又是 GB 平方的四倍，因此 AG 平方是 GB 平方的三倍，于是 AB 平方与 AG 平方之比是 4 比 3，因此 AB：AG 是$\sqrt{\frac{4}{3}}$，即 100 000：86 603，但因 $AG:AB=GB:BF$，于是 $BF:GB$ 也是$\sqrt{\frac{4}{3}}$；又因 GB 为 AB 之半，故可取为 50 000，于是 BF 约为 57 737。此数的 12 倍大于圆周。计算得出，对直径为 200 000的圆，此数为 692 844，对直径为 7 的圆，BF 的 12 倍之值为 24 减$\frac{1}{10}$①。这一数值大于圆周长，而 21 小于圆周长。很明显，曲线 BE 与 BG 之差小于 BE 与 BF 之差，所以圆周与 21 之差小于圆周与 $24-\frac{1}{10}$之差。假设它与 21 之差为 1，与 $24-\frac{1}{10}$之差为 $2-\frac{1}{10}$，则这个数无疑是 22。阿基米德曾通过倍增边数，对正十二、二十四和四十八边形进行了计算，说明圆周长与 22 非常接近。罗曼努斯(Adrianus Romanus)用同一方法证明了，当直径为 20 000 000 000 000 000 时，圆周长为 62 831 853 071 795 862。

注记。在抛物线、双曲线、椭圆这三种圆锥曲线中，椭圆是近似于圆的。我曾在《关于火星运动的解说》(Commentary on the motions of Mars)中给出：椭圆周长与它的长轴和短轴的算术平均值之比为 22：7。

定理 2 圆面积和以其直径为边的正方形面积之比为 11：14。

阿基米德用间接证明得到了这一结论，见图 2。

圆 BG 的周长可以分成无穷多个部分，每部分可看作一个等腰三角形的底，该三角形有等腰 AB，所以，在圆面上有无穷多个以 A 为公共顶点的小三角形。现将圆周拉直为直线 BC 且使 BC

---

① 实际上应是 $12BF=12\cdot\frac{7}{2}\tan30°=14\sqrt{3}\approx24.25=24+\frac{1}{4}$，按开普勒的推理方法，这不影响他的结论。

等于圆周长。这无穷多个三角形或扇形的底则一个挨一个地落在直线BC上。假设BF是这些底中的一个，CE是等于它的另外一个。连结

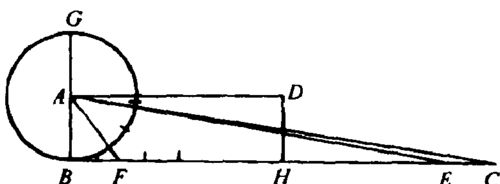


图 2

FA,EA,CA,则生成三角形BAF和EAC。显然,BC上的这种三角形的数目同圆上的扇形数目一样多。由于底BF与EC相等,而所有三角形的高都是BA(BA也是扇形的高),所以三角形BAF与三角形EAC面积相等,且等于每一个扇形。因为各三角形的底都在BC上,所以三角形BAC即所有三角形的和,它与圆内所有扇形的和相等,所以等于圆面积(该圆是由这些扇形组成的)。这等价于阿基米德通过归谬法得到的结论。

现作BC的二等分点H,则ABHD构成一个矩形,设DH与AC交于I。此矩形面积与圆面积是相等的。实际上,CB∶CH=AB(即DH)∶IH=2,所以IH=ID,HC=DA=BH,而∠DIA=∠HIC,∠D=∠IHC=直角,所以矩形外的三角形ICH等于矩形内而在梯形AIHB外的三角形IAD。

假设直径GB为7,则$GB^2=49$。因为圆周长或BC为22,它的一半BH则为11,其误差可以忽略不计。直径的一半AB等于$3\frac{1}{2}$,用它乘以11,便得到矩形AH的面积$38\frac{1}{2}$。所以,若直径的平方为49,则以直径为边长的正方形面积与圆面积之比为$49:38\frac{1}{2}$,即98∶77,以7约之,得14∶11。证毕。

推论1 圆上的扇形面积(任意两条半径与所夹之弧围成的图形)等于半径与弧长的乘积之半。……①

---

① 推论2是有关圆上弓形面积的。

下一个定理与圆推、圆柱和球有关。在一份补充材料里,开普勒介绍了圆锥曲线及由这些曲线生成的立体,并在有关立体中讨论了环。

定理 18 任一截面为圆或椭圆的环的体积等于下述柱体体积:它的高为圆或椭圆的中心在旋转时形成的圆周长,底为环上的任一截面,即该圆或椭圆。

所谓截面,是指通过环的中心且垂直于环面的平面与环相交所得之截面。这一定理的证明部分地依赖于定理 16[①],也可以通过阿基米德作为立体几何原理给出的同样方法得到。

实际上,如果我们用过 A 的平面把环 GCD(图 3)分成无数个非常薄的圆盘,则它们中的每一个在指向 A 的方向上越来越薄,而在相反的方向上越来越厚。如图 3,在截面 ED 上,离 D 越近则圆盘越厚。在两个端点 D 和 E 处的厚度之和应为圆盘中心的厚度的 2 倍。

推论 上述度量方法适用于圆环及任何形状的椭圆环,不管其截面的高度、宽度或离心率如何,也不管环是开的还是闭的;并适用于截面为其他形状

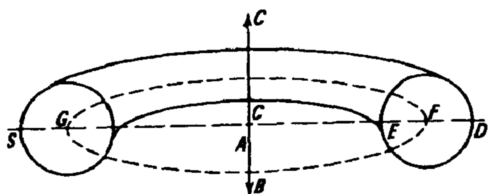


图 3

的环,只要在与环面垂直的过 AD 的平面上,F 点两侧的部分对称。对此我们讨论方形截面的情况。令环是方形的,并假定它的截面在 ED 上。此环也可用另外一种方法度量。它是一个圆柱的外部,该圆柱的底是以 AD 为半径的圆,高是 DE。根据定理 16,它可以看作是该圆柱的中间部分即以 AE 为半径、ED 为高的圆柱被除去后得到的图形。所以,ED 和圆 AD 面积的乘积减去 ED 和圆 AE 面积的乘积等于这个以方形为截面的环的体积。以 AD^2-AE^2 为底、以 ED 为高的立体与方环的 $\frac{1}{4}$ 的比等于方、圆面积之比(指

① 定理 16 讨论同高而不同底的圆锥体积之比。

圆的外切正方形与圆面积之比)，即 14∶11。令 $AE=2$，$AD=4$，则 $AD^2=16$。而 $AE^2=4$，所以此两平方之差为 12；此面积乘以高 2，得体积 24。以 4 乘之，得 96。因为 $14∶11=96∶75\frac{3}{7}$，所以环的体积为 $75\frac{3}{7}$，这是由定理 16 得到的结果。按前面的方法，假定 $AF=3$，$FG=6$。因为 $7∶22=6∶(19-\frac{1}{7})$，所以直径为 FG 的圆周长为 $19-\frac{1}{7}$，这便是柱体的高；因为 $ED=2$，其平方为 4，这便得到柱体的底，以 4 乘 $19-\frac{1}{7}$ 为柱体即方环的体积。这种方法同样可以表明定理的正确。

定理 19 及类比　一个封闭的环等于以截面圆为底、以环的中心描画的圆周长为高的圆柱体积。

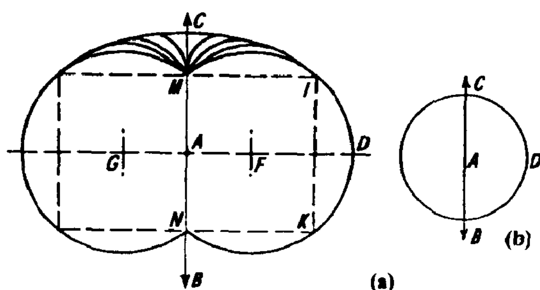


图　4

这一方法适用于任何环，不管 AE 与 AF 之比为多少，所以也适用于封闭环。在这种环中，圆 ED 的中心 F 描画的圆 FG 等于圆 AD 自身。圆盘的 A 处没有厚度而 D 处的厚度为 F 处的 2 倍，所以过 D 的圆周 2 倍于过 F 的圆周。

推论　如图 4a，由图形 $MIKN$（MI 及 NK 是圆弧，MN 及 IK 是直线段）绕 MN 旋转而成的物体体积，等于以该图形为底、以圆 FG①的周长为高的柱体体积。但图形 IDK 在绕 MN 旋转的过程中，形成一个包围着柱体的图形，就像围在桶上的木箍，它的体积计算不能用此定理而须用其他方法。

① 如图 4a，G，F 分别为左右二图形的对称中心。

类比 这一方法适用于一切苹果形柱体[①],不管图形 $MIKN$ 多么窄,只要 I,K 不与 M,N 重合即可。重合的情况形成球面(图 4b),这时,MN 和 IK 两条直线变为一条,即 BC,对这种物体,就不能用该定理了,其证明方法亦不再有效。

推论 球体积与球上大圆生成的闭环体积之比为 7∶33,因为半径的三分之一乘大圆面积的四倍,或直径的三分之二乘大圆面积,得出等于此球的圆柱体。体积等于此闭环的圆柱体具有相同的底,而其高为底的圆心旋转所成的圆周。因而闭环体积与球体积之比即为该圆周与其直径的三分之二之比,即为 33∶7。

(孔国平 译　沈永欢 校)

---

① 类似于图 4a 的闭环,因形状像苹果,故开普勒称之为苹果形。

32. 卡瓦列里:不可分量原理

卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri,1598～1647)在其《用新方法促进的连续不可分量的几何学》(Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, Bologna,1635)一书中提出的不可分量原理,是从古希腊"穷竭法"向近代积分论的过渡。卡瓦列里模糊的不可分量概念对牛顿的"流数"和莱布尼茨的"微分"也不无启发。事实上,《不可分量的几何学》在出版后多年中,除阿基米德著作外,是数学家们研究几何中无限小问题引用最多的一本书,对微积分的建立有重要影响。

卡瓦列里出生于意大利米兰,卒于波伦亚,是一个耶稣会教士,也是伽利略(G. Galilei 1564～1642)的学生,1629 年起任波伦亚大学数学教授。《用新方法促进的连续不可分量的几何学》就是他为应聘该教职而提交的著作。以下关于不可分量原理的论述,摘自该书第 7 卷,转译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. ,pp. 605～609.

如果两个平面图形夹在同一对平行线之间,并且被任何与这两条平行线保持等距的直线截得的线段都相等,则这两个图形的面积相等。类似地,如果两个立体图形夹在同一对平行平面之间,并且被任何与这两个平行平面保持等距的平面截得的截面都相等,则这两个立体图形的体积相等。

假定有两个供比较的图形——平面的或立体的,可称之为模拟图(analogue)[①],并假定它们夹在一对平行线或平行平面之间,我们将以此为前提来证明上述原理。

---

① 从全文来看,"模拟图"概念的引入并不是很必要的,且作者未给出其准确定义。

设 ABC 和 XYZ(如图 1)是夹在两平行线 PQ,RS 之间的任意两个平面图形,DN 和 OU 是平行于 PQ,RS 的直线。两图形被 DN 截得的线段 JK 与 LM 相等,被 OU 截得的线段 EF,GH 之和(图形内可以有空洞,例如 ABC 中的 FgG)与 TV 相等。类似地,任何与

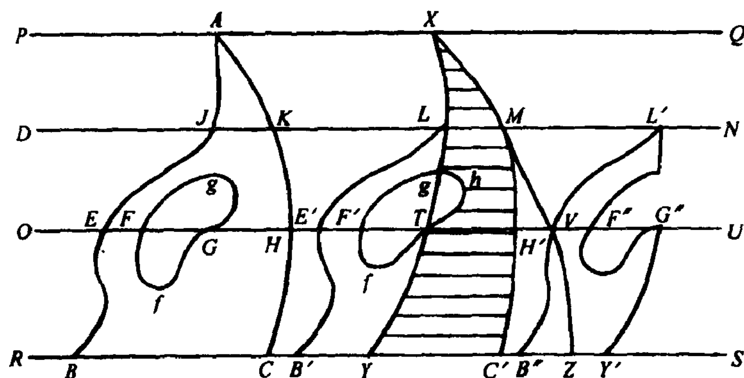


图 1

PQ 等距的直线在 ABC 及 XYZ 中截得的线段都相等。我断言图形 ABC 与 XYZ 的面积相等。

任取两图形之一,不妨取 ABC,顺平行线 PQ,RS 平移叠置到另一个图形 XYZ 上,PA,RB 将落在 AQ,CS 上。其结果,或者整个 ABC 与整个 XYZ 重合,因而面积相等;或者它们只有部分重合,如图中的 $XMC'YThL$。

显然,在平行线 PQ,RS 间的图形 ABC 或 XYZ 中的任何两条线段(须平行于 PQ),若在叠置之前共线,则叠置之后仍然共线。例如,EF 和 GH 在同一条直线 TV 上,叠置之后,相应的 $E'F'$ 和 TH' 仍在 TV 上,因为 EF 和 GH 与 PQ 的距离等于 TV 与 PQ 的距离。不管怎样平移,EF,GH 总在直线 TV 上。显然对于两个图形中任何平行于 PQ 的线段,情形都是这样的。

现在考察平移后两图形不完全重合的情况。如前所述,原图形上与 AQ 平行的线段,在图形平移叠置后仍落在该线段所在的直线上。不仅如此,与 AQ 平行的线段在叠置后的长度仍保持不变。例

如，$E'F'$与TH'合在一起等于TV，由此可见，若$E'F'$与TH'合在一起不完全重合于TV，则它们的一部分重合，且不重合的部分相等。如图，TH'与自身重合(即GH平移后与TV的一部分重合)，而$E'F'$等于$H'V$。实际上，$E'F'$是叠置图形ABC中未盖住XYZ的部分，$H'V$则是叠置后XYZ中未被ABC盖住的部分。同理可证，叠置后包含ABC中未与XYZ重合的平行于PQ的任何线段，如$LB'YTF'$中的线段，都对应着图形XYZ中的相等的未重合线段。因此，叠置总遵循这样的规则：只要一个图形中有未重合的部分，另一个图形中必有相应的未重合部分。

平行于PQ的叠置图形ABC或XYZ中相应的不重合线段是位于同一对平行线之间的。既然图形$LB'YTF'$夹在平行线DN，RS之间，则对应的XYZ中不与ABC重合的部分Thg与$MC'Z$也夹在DN和RS之间，因为若设XYZ中不与ABC重合的部分不是夹在DN与RS而是夹在DN与OU之间，则图形XYZ中没有与图形$E'B'YfF'$中平行于PQ的线段相对应的线段，这与已知矛盾。所以，图形ABC与XYZ中的未重合部分位于同一对平行线之间，并且如前所述，其中与PQ和RS平行的线段或线段之和相等。因此图形ABC中的$LB'YTF'$与图形XYZ中的Thg，$MC'Z$也是模拟图。

现在作第二次叠置，即平移ABC中未重合的部分，让平行线KL，CY分别落在LN，YS上，则图形$LB'YTF'$中的$VB''Z$部分与图形$MC'Z$中的$VB''Z$部分重合。同前次平移一样，只要一个图形有未重合的部分，另一个图形必有未重合部分，且这些未重合部分位于同一对平行线之间。如图，$L'VZY'G''F''$是图形ABC中的未重合部分，$MC'B''V$及Thg是图形XYZ的未重合部分，它们显然位于同一对平行线DN，RS之间。我们将图形继续(沿DN，RS)平移，则又有新的重合部分及未重合部分。这一过程可以不断地进行下去，直到图形ABC完全与XYZ重合。因为只要XYZ中有未重合部分，ABC中便会有相应的未重合部分，可以再作平移。既然整个图形ABC可叠置到图形XYZ上，它们的面积当然相等。

现在假设ABC和XYZ是位于平行平面PQ与RS间的两个

立体。DN 和 OU 是位于 PQ，RS 之间的与其等距的任意两个平面，且它们在两个立体上的截面面积分别相等，即平面 JK 等于[①] LM，平面 EF 与 GH 之和等于平面 TV（同平面图形类似，立体中也可以有任意形状的空洞，如 FfGg 便是立体 ABC 中的空洞）。我断言图形 ABC 与 XYZ 的体积相等。

如果我们把立体 ABC 连同平面 PQ，RS 的一部分 PA 和 RC 一起平移，使其叠置于立体 XYZ 上，平面 PA 仍落在 PQ 上，平面 RC 仍落在 RS 上。我们将会看到，与前述平行线之间平面图形的情况类似，立体 ABC 或 XYZ 中的位于同一平面的图形，在叠置后仍位于同一平面，且叠置后两立体中与 PQ 等距的平面面积相等。

若叠置后两立体完全重合，则体积相等。若不完全重合，则每个立体中必有重合部分及未重合部分，且同一平面上的未重合部分相等。如图，截面 $E'F'$ 和 TH' 与截面 TV 相等，TH' 是公共截面，立体 ABC 中未重合的截面 $E'F'$ 等于立体 XYZ 中未重合的截面 $H'V$。同样情况会在任何平行于平面 PQ 的与立体 ABC，XYZ 相交的截面上发生。只要一个立体中有未重合部分，另一个立体中必有未重合部分。通过在这一命题的平面情形中讨论过的方法，可知两个立体图形中相应的未重合部分必在同一对平行平面之间，如立体 $LB'YTF'$，$MC'Z$ 及 Thg 都位于平行平面 DN，RS 之间。这些未重合的立体也是模拟图。

我们可以对未重合部分进行叠置，使平面 DL 落在平面 LN 上，平面 RY 落在平面 YS 上，并不断进行，直到图形 ABC 中的所有部分都与图形 XYZ 重合。如果 ABC 与 XYZ 不完全重合，其中的一个图形就会有未重合部分，不妨设此图形为 XYZ，于是在 $XB'C'$ 或 ABC 中也会有未重合的部分，这与前面证明的相矛盾。既然图形 ABC 与 XYZ 重合，所以二者体积相等。命题证毕。

（孔国平 译　沈永欢 校）

① 指面积相等，下同。

33. 费马:《求极大值与极小值的方法》

迄今所介绍的微积分准备阶段的工作,都与几何相关并集中于积分问题。解析几何的诞生改变了这一状况。解析几何的两位创始人笛卡儿与费马,同时也都是将坐标方法引进无限小问题尤其是微分学问题研究的前锋。笛卡儿《几何学》中提出了求切线的所谓“圆法”。这里要介绍的则是费马求极大值与极小值的方法。费马的方法记载在1637年的一份手稿中,这手稿实际上是费马致梅森(M. Mersenne)的一封信,并由后者转给笛卡儿而引起了关于切线问题的热烈讨论,因为费马在手稿中作为极大、极小值方法的应用收入了他1629年发现的切线求法。费马的方法几乎相当于现今微分学中所用的方法,只是以符号E代替了增量Δx。以下摘录费马1637年手稿的主要部分,原载C. Henry & P. Tanney(eds.): Oeuvres de Fermat, Ⅲ. pp. 121—123, Paris, 1896,转译自D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 223—225.

求极大值与极小值的全部理论以两个未知的量和下述法则为基础:

设a是问题中的任一未知量(它是一维、二维或三维的量,视问题提法而定)。让我们用包含a的任意次幂的诸项来表示极大量或极小量。现在用$a+e$代替原来的未知量a,并用包含a和e的任意次幂的诸项来表示极大量或极小量。然后使这两个极大量或极小量表达式相逼近(沿用丢番图的术语[①])并消去公共项。这时可以看出两边都有含e或其幂的项。用e或e的高次幂除各项,使e

① 丢番图所用希腊术语 parisótēs,拉丁译名为 adequatio,意指尽可能地逼近一个数,费马则借用这一术语来表示我们所指的极限过程。

从这些项的至少一项中消失，然后舍弃所有那些仍然出现 e 的项，使两边的剩余项相等，或者若两式之一已化为零，则使另一式中的正项等于负项也一样。最后这个方程的解所产生的 a 值，代入原来的表达式就可得出极大值或极小值。

这里举一个例子：

将线段 AC 在 E 点分为两部分(图 1)，使 $AE \times EC$ 取最大值。

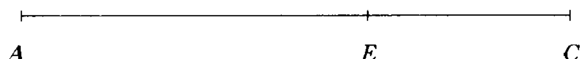


图 1

记 $AC=b$，设 a 是两线段之一，另一线段将为 $b-a$，它们的积将是 $ba-a^2$，我们要求的就是这个积的最大值。现在设 b 的第一条线段为 $a+e$，第二条线段将为 $b-a-e$，它们的积将为 $ba-a^2+be-2ae-e^2$；这个表达式必须逼近前一个表达式 $ba-a^2$，消去公共项得 $be \sim 2ae+e$，再消去 e 得 $b=2a$①。为了解决所提问题，最后必须取 a 为 b 的一半。

我们很难指望有更一般的方法了。

论曲线的切线

我们将应用上述方法来求一条曲线在一给定点的切线。

例如我们考虑顶点为 D，直径为 DC 的抛物线 BDN(图 2)；设 B 为其上一点，在该点求作抛物线的切线，使与直径相交于 E。

我们在线段 BE 上选一点 O，过该点作纵坐标线 OI，同时作 B 点的纵坐标线 BC，那么因 O 点在抛物线之外，我们有：$CD/DI > BC^2/OI^2$，但根据三角形相似性质，$BC^2/OI^2=CE^2/IE^2$，因此 $CD/DI > CE^2/IE^2$。

因为 B 点已知，所以纵坐标 BC，从而点 C 并且线段 CD 均已

① 这里我们采用了法译本《费马全集》中的记号，费马的拉丁文原稿则记 e 为 E，e^2 为 E_q，法译本中的记号“～”相当于拉丁文原稿中的“adequatio”即“逼近”。

知。设 $CD=d$ 是这个已知量，又设 $CE=a$，$CI=e$；我们得到

$$\frac{d}{d-e}>\frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$$

化去分式得

$$da^2+de^2-2dae>da^2-a^2e$$

然后按前述方法取逼近，消去公共项后得：

$$de^2-2dae\sim-a^2e$$

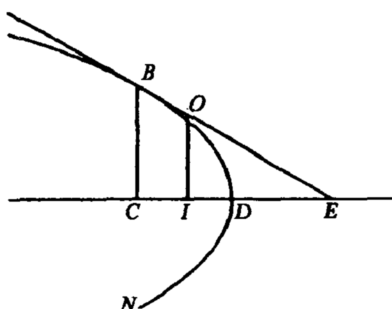


图 2

或同样地

$$de^2+a^2e\sim 2dae$$

用 e 除各项得：

$$de+a^2\sim 2da.$$

舍弃 de，剩下 $a^2=2da$，结果得到 $a=2d$.

这样我们证明了 CE 是 CD 的两倍——这就是所求结果。

这一方法决不会失效并且可以推广应用于一些优美的问题。借助这一方法，我们已求出了由直线或曲线围成的图形的重心以及一些立体图形的重心，同时还获得了一些其他的结果，关于这些结果，如果时间允许。我将在另外的场合来论述。

(孔国平 译　沈永欢 校)

34. 沃利斯:《无穷算术》

在牛顿、莱布尼茨以前,将分析方法引入微积分贡献最突出的数学家是沃利斯。

沃利斯(John Wallis, 1616~1703),生于英格兰肯特郡阿什福德,早年在剑桥大学学习神学,20岁左右才开始专攻数学,1649年成为牛津大学萨维尔(Savilian)几何教授。他是英国皇家学会的奠基人之一。他的工作影响了牛顿、格雷戈里(J. Gregory)和其他数学家。在1655年出版的《无穷算术》(Arithmetica Infinitorum, Oxford)中,沃利斯大胆运用分析方法探索无限王国,通过内插法与外插法得到新的结果。该书的标题便表现了沃利斯的方法与卡瓦列里几何方法的区别。沃利斯称他的方法为"算术",牛顿则称其为"分析"。以下摘录《无穷算术》有关部分。在这里,沃利斯用本质上是算术的途径发展了卡瓦列里的积分法。接着,他凭借良好的数学直觉进入插值领域,得到著名的π的无穷乘积。所摘内容原载 J. Wallis: Opera Mathematica, 3 vols. Oxford, 1693~1699,转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 244~253.

命题 39. 给定一个连续地以算术比例递增的从 0 开始的数列的立方序列(即 0,1,8,27,64,…),另一个序列与它项数相同且每项都等于它的末项.求给定序列同另一个序列的比。

和以前一样,这一问题可用归纳法考察。我们有

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320}=1\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+\cdots+125=225}{125+\cdots+125=750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{0+\cdots+125+216=441}{216+\cdots+216=1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$$

等等。

所得比值总是大于$\frac{1}{4}$。但随着项数的增加，超出$\frac{1}{4}$的部分逐渐减小，即$\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{1}{20},\frac{1}{24},\cdots$。毫无疑问，分数的分母部分每次增加 4 的一倍。这就是说，所得比中超出$\frac{1}{4}$的部分是$\frac{1}{4}$乘 0 后面的项数。

命题 40. 定理 给定一个连续地以算术比例递增的由 0 开始的数列的立方序列，则它与另一个项数相同且每项等于它的末项的序列之比大于$\frac{1}{4}$，超过$\frac{1}{4}$的部分是一个分子为 1、分母等于 0 后项数 4 倍的分数，也可以看成一个分子为 0 后第一项的立方根、分母为末项立方根 4 倍的分数。

序列 $0^3+1^3+\cdots+l^3$ 的和是$\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3$，若 m 为项数，则为$\frac{m}{4}l^3+\frac{m}{4l}l^3=\frac{1}{4}ml^3+\frac{1}{4}ml^2$。

这是由上述推理得出的显然结果。

随着项数的增加，超过$\frac{1}{4}$的部分将连续减小，直到小于任何给定的数。当项数趋于无限时，它便最终消失，所以有：

命题 41. 定理 一个连续地以算术系列递增的由 0 开始的数列的立方无穷序列与另一个项数相同且每项等于它的末项的数列之和之比为$\frac{1}{4}$。这由前述推理得到。

命题 42. 推论 立方抛物弓形之半的补图 AOT(图 1)与同底、同高的平行四边形 TD 之比为 1∶4。

如图 1,AOD 为抛物线之半 AO 的区域(其直径 AD 及对应的纵坐标 DO, DO 等构成的图形),AOT 是它的补图。线段 $DO, DO, \cdots$ 或与之相等 $AT, AT, \cdots$,皆为 $AD, AD, \cdots$ 或与之相等的 $TO, TO, \cdots$ 的立方根,所以这些 $TO, TO, \cdots$ 必为 $AT, AT, \cdots$ 的立方。根据上述定理,整个图形 AOT(由无穷多的线段 $TO, TO, \cdots$ 组成,这些线段是以算术方式增长的 $AT, AT, \cdots$ 的立方)与平行四边形 ATD(由无穷多条等于最大的 TO 的线段组成)之比为 1∶4,从而抛物弓形之半 AOD(平行四边形 ATD 的剩余部分)与此平行四边形之比为 3∶4.

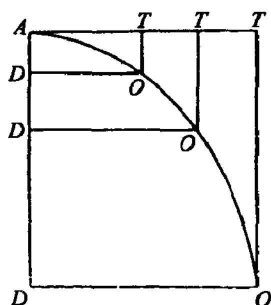


图 1

命题 54. 定理 给定一个无穷的、连续递增并由 0 开始的算术数列的平方根、立方根、四次方根,等等的序列(我称之为阶 $K=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ 的序列),该序列和项数相同且各项等于它的末项的序列之比由下表给出:

阶数	结果
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$或 $1:1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$或 $1:1\frac{1}{3}$
⋮	⋮
$\frac{1}{10}$	$\frac{10}{11}$或 $1:1\frac{1}{10}$

命题 59 给出 $K=\frac{p}{q}$ 的完整的表(表 1)

表1

$q \backslash p$	0	1	2	3	⋮	10
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	⋮	$\frac{1}{11}$
2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	⋮	$\frac{2}{12}$
3	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	⋮	$\frac{3}{13}$
…	…	…	…	…	⁘	…
10	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{13}$	⋮	$\frac{10}{20}$

命题 64 如果取由 0 开始的以任一幂次(此幂可以为整数或分数)连续递增的无穷数列,则这个数列与项数相同且各项等于它的末项的数列之比为 1 除以此幂指数加 1。

……①

命题 108 给定一个常数列和一个一阶数列②,如果以常数列的第一项减去后列的第一项,以常数列的第二项减去后列的第二项,…,则两序列之差为第一个序列的$\frac{1}{2}$;若把减改为加,则其和为第一个序列的$\frac{3}{2}$③。

例如,令 R 是常数列的任意项及一阶序列的最高项,它的无穷小部分记为 $a=\frac{R}{\infty}$,令 A 为项数或图形的高,A 将趋于无穷。两序列对应项之差的和及对应项之和的和可表示为:

$$R-0a \qquad\qquad R+0a$$

---

① 在解释的末尾,沃利斯加了这样一句话:"如果我们假设指数为无理数,如 $\sqrt{3}$,则此比值为 $1:1+\sqrt{3}$。"

命题 87 给出负指数的类似结果。沃利斯在命题中使用了术语"负数"(negative)。

② 这个 1 阶数列应该是由 0 开始的。

③ 采用今天的记法,则为 $\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$,$\int_0^1(1+x)dx=\frac{3}{2}$。

$$\begin{array}{cc}
R-1a & R+1a \\
R-2a & R+2a \\
R-3a & R+3a \\
\cdots & \cdots \\
R-R & R+R \\
\hline
AR-\frac{1}{2}AR & AR+\frac{1}{2}AR
\end{array}$$

常数列的各项和显然为 AR，一阶序列的和是它的一半即$\frac{1}{2}AR$，而 $AR-\frac{1}{2}AR=\frac{1}{2}AR$，$AR+\frac{1}{2}AR=\frac{3}{2}AR$. 所以，前者与常数列之比为$\frac{1}{2}:1$，后者与常数列之比为$\frac{3}{2}:1$。

命题 111. 定理 如果从一个常数列逐项减去一个二阶，三阶，四阶，…数列，则两个数列之差依次为常数列的$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，…。若把减改为加，则两个数列之和为常数列的$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{6}{5}$，…① . 实际上，做出下列各项：

$$\begin{array}{ccc}
R^2\mp 0a^2 & R^3\mp 0a^3 & R^4\mp 0a^4 \\
R^2\mp 1a^2 & R^3\mp 1a^3 & R^4\mp 1a^4 \\
R^2\mp 4a^2 & R^3\mp 8a^3 & R^4\mp 16a^4 \\
R^2\mp 9a^2 & R^3\mp 27a^3 & R^4\mp 81a^4 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
R^2\mp R^2 & R^3\mp R^3 & R^4\mp R^4
\end{array}$$

于是和为(命题 44)

$$AR^2\mp\frac{1}{3}AR^2, AR^3\mp\frac{1}{4}AR^3, AR^4\mp\frac{1}{5}AR^4.$$

所以各对应项之差的和给出：

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}, 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}, 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}, \text{等等。}$$

各对应项之和的和给出：

① 采用今天的记法，则为 $\int_0^1(1\pm x^n)dx=1\pm\frac{1}{n+1}$，$n\geqslant 0$。

$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}, 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}, 1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$，等等。

命题 117 以 a,b,c 等代替上述命题中的 $1a,2a,3a$ 等，可由下表给出一个新的计算程序①：

表 2

序 列	平 方	立 方
$R-0$	$R^2-0R+00$	$R^3-0R^2+00R-000$
$R-a$	$R^2-2aR+a^2$	$R^3-3aR^2+3a^2R-a^3$
$R-b$	$R^2-2bR+b^2$	……
$R-c$	$R^2-2cR+c^2$	
…	…	
$R-R$	$R^2-2RR+R^2$	$R^3-3RR^2+3R^2R-R^3$
$AR-\frac{1}{2}AR$	$AR^2-\frac{2}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2$	$AR^3-\frac{3}{2}AR^3+\frac{3}{3}AR^3-\frac{1}{4}AR^3$

所以

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3};1-\frac{3}{2}+\frac{3}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

或

$$\frac{1}{2};\frac{1\times 2}{2\times 3};\frac{1\times 2\times 3}{2\times 3\times 4};$$

可依此类推。各分数的分子和分母都是算术数列的连乘积，分别由 1 和 2 开始，后面的因子逐次增加 1。

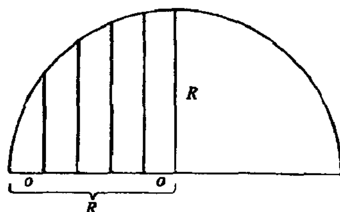


图 2

命题 121. 推论 圆面积与其直径平方之比(或椭圆与它的内接平行四边形之比)等于常数列和二

① 采用今天的记法，则为 $\int_0^1(1-x)^k dx=\frac{1}{k+1}=\frac{k!}{(k+1)!}, k\geqslant 0$。

阶数列相应项之差的平方根组成的序列与常数列本身之比[①]。

实际上，如果我们把 R 看作圆的半径，（如图 2，其中 $a=\frac{R}{\infty}$ 是 R 的无穷小部分），并构造无穷多的垂线（或正弦线）以充满四分之一圆，则这些垂线依次为 $R+0$ 与 $R-0$ 的比例中项，$R+1a$ 与 $R-1a$ 的比例中项，$R+2a$ 与 $R-2a$ 的比例中项，$R+3a$ 与 $R-3a$ 的比例中项，等等。每一对数的乘积分别为

$R^2-00, R^2-1a^2, R^2-4a^2, R^2-9a^2, \cdots$，所以比例中项为

$\sqrt{R^2-00}, \sqrt{R^2-1a^2}, \sqrt{R^2-4a^2}, \sqrt{R^2-9a^2}, \cdots$。

表 3

p \ k	0	1	2	3	4	⋮	10
0	1	1	1	1	1	⋮	1
1	1	2	3	4	5	⋮	11
2	1	3	6	10	15	⋮	66
3	1	4	10	20	35	⋮	
…	…	…	…	…	…	⋰	…
10	1	11	66	206	1001	⋮	184754

不管这些方根的和与它们的最高项（半径）之和的比为多少，均表示 $\frac{1}{4}$ 个圆（由这些根组成）和以半径为边的正方形（由最高项即半径组成）之比，也是整个圆和直径的平方之比[②]。

………

① 采用今天的记法，则为 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$。（假设圆半径为 1）。

② 沃利斯把这个比写作 1 : □，相当于今天的记法 $\frac{\pi}{4}$。

命题 132 如果从一个常数无穷序列逐项减去一个$\frac{1}{p}$阶序列($\frac{1}{p}=\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$),则对应项之差的 k 次方序列($k=1,2,3,\cdots$)与常数列之比是一个分子为 1 的分数,分母由下表给出①。这一结果是由前述命题得到的。表的中间②任何一数都是相邻二数之和,一数在上,一数在左。

命题 189 可通过插值得到表 4 所示的新序列。

表 4

p \ k	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	∞	1	$\frac{1}{2}$□	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$□	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$□	$A(l=k+1)$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$□	1	□	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$□	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}$□	$A\times\frac{2l-1}{1}$
1	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{2l+0}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$□	1	$\frac{4}{3}$□	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$□	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}$□	$A\times\frac{2l-1}{1}\cdot\frac{2l+1}{3}$
2	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	$\frac{2l+0}{2}\cdot\frac{2l+1}{2}$

---

① 采用今天的记法,则为 $\int_0^1(1-x^{\frac{1}{p}})dx=\frac{1\cdot 2\cdots p}{(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}$,$k\geqslant 0$,$p\geqslant 0$。

② 所谓中间,是指 0 列之右,0 行之下。此表的构造与帕斯卡三角形或贾宪三角形一致。

命题 191. 问题 尽可能准确地确定表 3 中项□的数值。

……①。

（孔国平 译 沈永欢 校）

① 沃利斯通过进一步插值，发现□小于

$$\frac{3\times3\times5\times5\cdots13\times13}{2\times4\times4\times6\cdots12\times14}\sqrt{1\frac{1}{13}}$$

大于

$$\frac{3\times3\times5\times5\cdots13\times13}{2\times4\times4\times6\cdots12\times14}\sqrt{1\frac{1}{14}}$$

依此类推，可求得任意精确的近似值。采用今天的记法，则为

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times2\times4\times4\times\cdots(2n)(2n)}{3\times3\times5\times5\times\cdots(2n-1)(2n+1)}.$$

35. 牛顿:论微积分

依萨克·牛顿(Isaac Newton,1642～1727)出生于英格兰林肯郡伍尔索普村一个农民家庭。1661年入剑桥大学三一学院,受教于巴罗,同时钻研伽利略、开普勒、笛卡儿和沃里斯等人的科学著作,其中笛卡儿《几何学》与沃里斯《无穷算术》对他数学思想的形成影响尤深。1665年牛顿大学毕业,随后两年回家乡躲避瘟疫。这两年里,他制定了一生大多数科学发现的蓝图。1669年他继巴罗任剑桥卢卡斯教授。1687年发表代表性著作《自然哲学的数学原理》。1696年移居伦敦,先后出任造币厂监督、皇家学会会长等职,生前曾被女王安娜封爵。牛顿的科学贡献涉及数学、天文、力学、物理学、化学等众多的领域。他在数学上划时代的成就是微积分的创建。根据现在掌握的牛顿数学手稿,牛顿制定微积分的过程先后经历了四个主要的阶段,即:(1) 流数论的初建(1664年秋～1667年初);(2)向不可分量观点的摇摆(1669年前后);(3)成熟的"流数法"(1671年前后);(4)"首末比法"的提出与改进(八十年代中～九十年代初)。本节摘选上述四个阶段的代表性文献。

35.1. 通过运动与o方法求切线

1666年10月,牛顿撰写了一份手稿,对自己在家乡躲避瘟疫的两年间关于微积分的研究作了概括、总结。这份手稿后以《流数简论》(Tract on Fluxions)著称,成为牛顿发明微积分的重要见证。手稿在牛顿生前曾以几个不同的文本在他的朋友中传阅,其中之一现藏剑桥大学图书馆,1967年才首次印刷出版,这里摘录其关键部分,译自 D. Whiteside (ed.): The Mathematical Papers of

Isaac Newton(简称 MPIN),vol. Ⅰ,pp. 402～415,剑桥大学出版社(1967)。

命题 7 设有二个或更多个运动物体 $A,B,C,\cdots$ 在同一时刻内描画线段 $x,y,z,\cdots$(图 1)。已知表示这些线段关系的方程,则可求出它们的速度 $p,q,r,\cdots$ 的关系。即将所有各项移至方程一边,并使

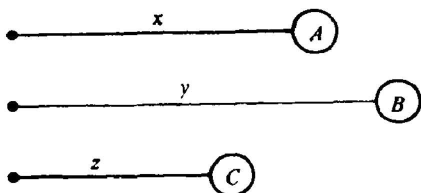


图 1

它们等于零。第一步把各项乘以 $\frac{p}{x}$ 的与该项中 x 的幂次相等的倍数;第二步把各项乘以 $\frac{q}{y}$ 的与该项中 y 的幂次相等的倍数;第三步(如果有三个未知量)把各项乘以 $\frac{r}{z}$ 的与该项中 z 的幂次相等的倍数。(如果还有更多的未知量则依此类推)。所有的乘积之和将等于零。这方程就给出了速度 $p,q,r,\cdots$ 的关系式。……

命题 8 设有二物体 A 和 B 以速度 p 和 q 移动,它们所描画的线段为 x 和 y,若已知表示线段 x 和运动 p、q 之比 q/p 的关系的方程,试求另一线段 y。……

命题 7 证明

引理 若二物体 A,B 在相同时刻内分别匀速地从 $\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ 移动至 $\begin{matrix}c,d,e,f,\\g,h,k,l,\end{matrix}$ 等等(图 2),则线段 $ac,cd,de,ef,\cdots$ 与 $bg,gh,hk,kl,\cdots$ 之比等于速度 p 与 q 之比。若 A 和 B 作非匀速运动,则它们在每一瞬所描画的无限小线段之比,仍然等于它们在描画这些线段时所具有的速度之比。正如速度为 p 的物体

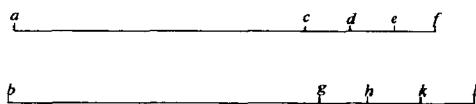


图 2

A 在某一瞬描画出无限小线段$(cd=)p\times o$,速度为 q 的物体 B 在同一瞬内将描画线段$(gh=)q\times o$,因为 $p:q::po:qo$。这样,若在某一瞬描画出的线段是$(ac=)x$ 和$(bg=)y$,则至下一瞬它们将变成$(ad=)x+po$ 和$(bh=)y+qo$。

证明 现设表示线段 x 和 y 之间关系的方程为 $x^3-abx+a^3-dyy=0$. 我们可用 $x+po$ 和 $y+qo$ 代替 x 和 y,因为(由引理)它们与 x 和 y 一样表示物体 A 和 B 所描画的线段。由此可得

$$\begin{aligned}x^3+3poxx&+3ppoox+p^3o^3-dyy-2dqoy-dqqoo=0\\ -abx&-abpo\\ &+a^3\end{aligned}$$

但 $x^3-abx+a^3-dyy=0$(据假设)。因此仅剩下

$$\begin{aligned}3poxx+3ppoox&+p^3o^3-2dqoy-dqqoo=0\\ &-abpo\end{aligned}$$

或以 o 除之,即为

$$\begin{aligned}3px^2+3ppox&+p^3oo-2dqy-dqqo=0\\ &-abp\end{aligned}$$

其中含 o 的那些项为无限小,略之即得

$$3pxx-abp-2dqy=0$$

对其他所有方程皆可依此处理①。

35.2. 求积术是流数法之逆

1669 年,牛顿为维护自己在无穷级数方面的优先权而撰成《用无限多项方程的分析》(De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas,简称《分析》)一文。《分析》开头部分对微积分方法作了概述。与 1666 年《流数简论》不同,《分析》回避了流数概念的运动学背

① 在《流数简论》的其余部分,牛顿用大量篇幅讨论了前述命题的各种应用,处理了求曲线的切线、曲率、拐点、曲线求长、求积、求引力与引力中心等共 16 类问题。这表明牛顿早期的微积分方法是以来源于运动学的无限小瞬概念为基础的。

景，而以变元 x 而不是时间 t 的无限小瞬作为其方法的基础，牛顿有时直截了当令"瞬"为零，从而使这里的瞬带上了浓厚的不可分量色彩。《分析》完稿后不久即由巴罗寄呈伦敦皇家学会，但至1771年才正式发表。以下摘录的是该文论微积分基本定理的一节，译自 MPIN，vol. Ⅱ，pp. 243～245。

设曲线 $AD\delta$ 的底为 $AB=x$（图3），垂直坐标 $BD=y$，面积 $ABD=z$，同时取 $B\beta=o$，$BK=v$，矩形 $B\beta HK(ov)$ 大小与 $B\beta\delta D$ 相等。因此 $A\beta=x+o$，$A\delta\beta=z+ov$。由此出发，从 x 和 z 的任意假定的关系，我们可按下述方法求出 y。

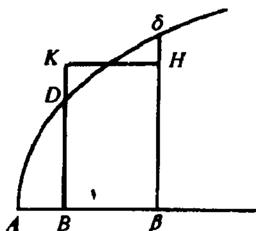


图 3

任取 $\frac{2}{3}x^{3/2}=z$，或 $\frac{4}{9}x^3=z^2$，则若以 $x+o(A\beta)$ 代 x，以 $z+ov(A\delta\beta)$ 代 z，可得（根据曲线性质）：$\frac{4}{9}(x^3+3x^2o+3xo^2+o^3)=z^2+2zov+o^2v^2$ 消去相等项（$\frac{4}{9}x^3$ 和 z^2），并以 o 除余式，得 $\frac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2)=2zv+ov^2$. 现设 $B\beta$ 为无限小，也就是令 o 为零，v 将与 y 相等，与 o 相乘的那些项亦将化为零，结果得 $\frac{4}{9}\times 3x^2=2zv$ 或 $\frac{2}{3}x^2(=zy)=\frac{2}{3}x^{3/2}y$，于是 $x^{1/2}(=x^2/x^{\frac{3}{2}})=y$。因此反过来，若已知 $x^{\frac{1}{2}}=y$，则将有 $\frac{2}{3}x^{3/2}=z$。

一般情形，若 $[n/(m+n)]ax^{(m+n)/n}=z$，令 $na/(m+n)=c$ 和 $m+n=p$，即若 $cx^{p/n}=z$ 或 $c^nx^p=z^n$，则当以 $x+o$ 代 x，以 $z+ov$（或与其等价之 $z+oy$）代 z，可得

$c^n(x^p+pox^{p-1}+\cdots)=z^n+noyz^{n-1}$……略去其他项，确切地说就是略去那些最终将化为零的项。现消去相等项 c^nx^p 和 z^n，并以 o 除余式，可得 $c^npx^{p-1}=nyz^{n-1}(=nyz^n/z)=nyc^nx^p/cx^{p/n}$。换言之，

若恢复 c 的值 $na/(m+n)$ 和 p 的值 $m+n$，即相当于数 $m=p-n$ 和 $na=pc$，则得 $ax^{m/n}=y$. 因此反过来，若已知 $ax^{m/n}=y$，则将有

$$[n/(m+n)]ax^{(m+n)/n}=z$$

这正是要证明的.

这过程中有一方法也许值得注意，通过此法可以求得你所需要的许多有已知面积的曲线。也就是说，假定已知任一表示面积关系的方程，则可由此求出坐标 y。这样，若设 $\surd[a^2+x^2]=z$，则经过计算可求得 $x/\surd[a^2+x^2]=y$。其他情形做法相仿。

35.3. 流数法

《分析》是急就篇，牛顿随后便试图改写，导致了《流数法与无穷级数》(Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum，简称《流数法》)的诞生(1671)。《流数法》不再使用不可分无限小瞬而全面恢复了运动学观点。《流数法》在牛顿去世后才正式发表(1736)，以下是该书的关键段落，节译自 MPIN，vol. Ⅲ，pp. 74～87。

问题 1 已知流量的相互关系，求流数关系。

解法 首先根据某个流量(如 x)的次数来排列表示已知流量关系的方程，同时将方程各项乘以算术级数的相应项，然后再乘以 $\dot{x}/x$[①]. 对每个流量分别施行此种运算，然后使这些乘积总和等于零，就得到所要求的方程。

例 1 若量 x 与 y 的关系是 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，用下法先乘按 x 排列的各项，然后乘按 y 排列的各项：

---

① 根据对牛顿手稿的最新考查，牛顿表示流数的点记号最早是在 1693 年撰写《曲线求积术》时引进的。牛顿《流数法》拉丁文原稿并未采用此种记号而是仍以字母 l，m，n，r，…分别表示变元 v，x，y，z，…的流数。这种表述形式使流数法不易被读者理解，因而从柯尔森(J. Colson)编辑《流数法》第一版(英文本，1736)起，即将牛顿拉丁文原稿中所有表示流数的字母一律换成当时已广泛使用的标准点记号 $\dot{v}$，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$…，致使后人误以为牛顿本人已在《流数法》中采用点记号表流数。D. Whiteside 在编辑出版 MPIN 时指出了这一长期误解，但为便于阅读，则仍在英译文中保留了点记号。中译准此。

	$-ax^2$
$x^3-ax^2+axy-y^3$	$-y^3+axy+x^3$
乘以 $\frac{3\dot{x}}{x}\cdot\frac{2\dot{x}}{x}\cdot\frac{\dot{x}}{x}\cdot 0$	乘以 $\frac{3\dot{y}}{y}\cdot\frac{\dot{y}}{y}\cdot 0$
得 $3\dot{x}x^2-2\dot{x}ax+\dot{x}ay$	得 $-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x$

两乘积之和为 $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$，这方程就给出了 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 之间的关系。确切地说，设 x 任意，则方程 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ 给出 y，这些确定后，流数关系就将是

$$\dot{x}:\dot{y}=(3y^2-ax):(3x^2-2ax+ay)$$

……

证明 流量的瞬(即它们在每一无限小时间间隔内所增加的无限小部分)是与其流动速度成比例的。因此若任一特殊流量如 x 的瞬由其速度 $\dot{x}$ 与一无限小量 o 之积(即 $\dot{x}o$)表示，则其他流量 v，y，z，[…]的瞬将由 $\dot{v}o$，$\dot{y}o$，$\dot{z}o$，[…]表示，因为 $\dot{v}o$，$\dot{x}o$，$\dot{y}o$，$\dot{z}o$ 与 $\dot{v}$，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 成比例。

现在，因为流量(如 x 和 y)的瞬(如 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$)是这些量在每一无限小时间间隔内的无限小增量，可知在任一无限小时间间隔后，这些量 x 和 y 将变为 $x+\dot{x}o$ 和 $y+\dot{y}o$，于是，一个不随时间而变化的表示流量关系的方程将如同表示 x 与 y 的关系一样地表示 $x+\dot{x}o$ 与 $y+\dot{y}o$ 的关系；这样就可以在所说的方程中用 $x+\dot{x}o$ 和 $y+\dot{y}o$ 来代替 x 和 y。

因此，设给定任一方程 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，并分别以 $x+\dot{x}o$ 和 $y+\dot{y}o$ 代替 x 和 y，将得出 $(x^3+3\dot{x}ox^2+3\dot{x}^2o^2x+\dot{x}^3o^3)-(ax^2+2a\dot{x}ox+a\dot{x}^2o^2)+(axy+a\dot{x}oy+a\dot{y}ox+a\dot{x}\dot{y}o^2)-(y^3+3\dot{y}oy^2+3\dot{y}^2o^2y+\dot{y}^3o^3)=0$。由假设 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，除去这些项并用 o 除余式，将得到

$3\dot{x}x^2+3\dot{x}^2ox-\dot{x}^3o^2-2a\dot{x}x-a\dot{x}^2o+a\dot{x}y+a\dot{y}x+a\dot{x}\dot{y}o-3\dot{y}y^2-3\dot{y}^2oy-\dot{y}^3o^2=0$。

但进一步，因设 o 是无限小，它可以表示量的瞬，那些包含它作因子的项相对其他项而言将等于零，所以我将它们舍弃而得到

$$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=0$$

因此我们看到，那些未被 o 乘的项总是被消去，同时那些含 o 的高于一次方的项也将被舍弃；而剩余项在被 o 除后将取得按法则应有的形式，这就是我想要证明的。

……

问题 2 已知一个表示量的流数间关系的方程，求流量间的关系。

特殊解法 因为此问题为前问题的逆，故应当用相反的步骤来解决。也就是说，首先按 x 的次数排列含 $\dot{x}$ 的项，并用 $\dot{x}/x$ 除之，然后再除以次数或者说算术级数的相应项，接着对那些含 $\dot{v}$，$\dot{y}$ 或 $\dot{z}$ 的项施行同样运算，同时将所有各项相加，并舍弃那些重复出现的项，最后使整个结果等于零。

例 已知方程 $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$，我们运算如下：

	$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y$		$-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x$
除以$\frac{\dot{x}}{x}$得	$3x^3-2ax^2+axy$	除以$\frac{\dot{y}}{y}$得	$-3y^3+axy$
除以	3. 2. 1	除以	3.1
得	x^3-ax^2+axy	得	$-y^3+axy$

总和 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，即为所求的流量 x 与 y 的关系。这里应该注意的是，虽然项 axy 出现了两次，但在总和中我并未都保留，而是舍弃了多余的重复项。这样，一般地说，凡是重复出现两次（或当问题涉及几个流量时重复出现多次）的项，在总和中我只写一次。

35.4. 首末比法

从八十年代中期开始，牛顿关于微积分的基础在观念上发生了变革，这就是作为极限概念先导的“首末比法”的提出。首末比法最初以几何形式在《原理》中发表[①]，其详尽的分析表述则是在《曲线求积术》(Tractatus de quadratura Curvarum，简称《求积术》)中给出的。对原始文献的最新考查表明，《求积术》撰成于 1693 年(而不是像以往所说的 1676 年)，1704 年首次作为《光学》一书附录正式发表。《求积术》是牛顿微积分理论最为成熟的著述。以下摘录的部分译自 D. J. Struik，A Source Book in Math. pp. 309～394。

(1)[②]在这里，我用连续运动来描述数学量，而不把它们看作是由很小的部分组成。这样，线由点的连续运动描画并生成，而不是由各个部分组成；面由线的运动、体由面的运动、角由边的转动、时间间隔由连续的流动生成，其他量亦是如此。这种生成过程确实是自然发生的，并为人们在物体运动中司空见惯。古人正是用这种方式，通过沿固定直线描画可动直线来说明矩形的生成。

(2) 因此，我考虑那些在相等时间内增长并通过增长而生成的量，它们变化的快慢取决于增长与生成速度的大小；我找到了一种由运动或增长速度来计算以该速度生成的量的方法，并称这种运动或增长的速度为流数，称那些被生成的量为流量。我在这里用来求曲线面积的流数方法，其发明时间可追溯到 1665 和 1666 年。

(3) 流数非常接近于在相等但却很小的时间间隔内生成的流量的增量，确切地说，它们是初生增量的最初比，但可用任何与之成比例的线段来表示。

① 见《自然哲学的数学原理》，中译本第 45～63 页，商务印书馆，1957。

② 段落编码为译者所加。

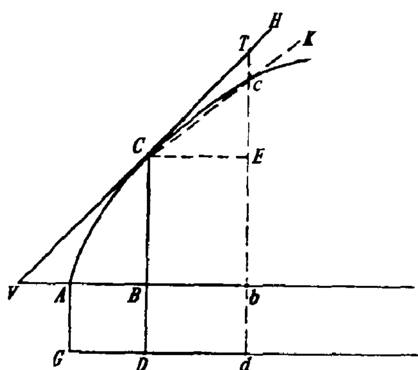


图　4

(4) 这样，若面积 ABC，$ABDG$（图 4）是用沿底 AB 匀速移动的坐标 BC，BD 来描画，这些面积的流数比将等于描画坐标 BC 和 BD 之比，并且可用这些坐标来表示，因为这些坐标比就等于面积的初生增量比。

(5) 设坐标 BC 从原处移动到新的位置 bc，作矩形 $BCEb$，并画直线 VTH 与曲线接触于 C，同时与直线 bc 和 BA 延长相交于 V 和 T。Bb，Ec 和 Cc 将是横坐标 AB、纵坐标 BC 和曲线 ACc 的生成增量；三角形 CET 的边构成这些被认为是初生增量的最初比，因此 AB，BC 和 AC 的流数比将等于三角形 CET 的边 CE，ET 和 CT 之比，并可用这些边来表示，或同样，可用与 CET 相似的三角形 VBC 的边来表示。

(6) 为了同样的目的，现在把流数理解为消逝部分的最终比。作直线 Cc 并延长至 K。令纵坐标 bc 回到原先位置 BC，当 C 与 c 趋合时，直线 CK 将与切线 CH 趋合，并且消逝三角形 CEc 的最终形式将变得与三角形 CET 相似，其消逝边 CE，Ec 和 Cc 相互之比最终将等于另一三角形 CET 的边 CE，ET 和 CT 之比，从而线 AB，BC 和 AC 的流数也构成相同的比。若点 C 与 c 之间相差任意小，则直线 CK 与切线 CH 同样将相差任意小。为使直线 CK 与切线 CH 重合，并能求出线段 CE，Ec，Cc 的最终比，点 C 与 c 必须趋近，并且完全重合。在数学中即使是最微小的误差也不应忽略。

(7) 设量 x 均匀地流动，并设问题是要求 x^n 的流数。

在量 x 因流动而变为 $x+o$ 的同时，量 x^n 将变为 $(x+o)^n$，根据无穷级数法就等于

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}oox^{n-2} + \&c$$

增量 o 与 $nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$ 之比等于 1 比 $nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \&c.$

现在令增量消逝，它们的最终比将等于 $1/nx^{n-1}$。

(8) 运用类似的推理，我们可以借助首末比法来推算各种情形下直线与曲线的流数，同时还有曲面、角度及其他量的流数。按这样的方式来建立有限量的分析，并研究这些有限量处于初生和消逝状态的最初比和最终比，这与古人的几何学是完全一致的，而我方才的意思是要指出：在流数法中，没有必要将无限小图形引入几何，然而这种分析可适用于任何类型的图形，它们在想像上与消逝的图形相似，而不论是有限的还是无限小的；如果做得谨慎小心，那么这种分析同样也适用于那些通常按不可分量法看是无限小的图形。

由流数求流量则是一个更为困难的问题，解这问题的第一步相当于曲线求积；关于曲线求积，我在很多年以前作过如下的论述。

(9) 下面我把不定量看成是随连续运动而增长或减少，也就是向前或向后流动的。用字母 z, y, x, v 来表示这些不定量，并用带点的同样字母 $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ 来表示其流数或增长速度①。同样有这些流数的流数或变化率，可称之为相同量 z, y, x, v 的二次流数，并可记作 $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$；后者的一次流数，或者说 z, y, x, v 的三次流数，可记作 $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$；四次流数则记作 $\ddddot{z}, \ddddot{y}, \ddddot{x}, \ddddot{v}$。这样，$\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$ 是量 $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$ 的流数；$\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$ 是量 $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ 的流数，同样量 z, y, x, v 也

① 这是牛顿著作中第一次采用带点字母表示流数。在《求积术》1704 年正式发表以前，带点流数记号曾先出现于沃里斯的《代数学》(De Algebra Tractatus, 1693) 一书中(该书有关段落出自牛顿手笔)。

可以看作是其他量的流数，我用$\acute{z}$，$\acute{y}$，$\acute{x}$，$\acute{v}$来表示这些其他量[①]，它们又可以被看作是其他量$\overset{\prime\prime}{z}$，$\overset{\prime\prime}{y}$，$\overset{\prime\prime}{x}$，$\overset{\prime\prime}{v}$的流数，而最后这些量又可以被看作是其它量$\overset{\prime\prime\prime}{z}$，$\overset{\prime\prime\prime}{y}$，$\overset{\prime\prime\prime}{x}$，$\overset{\prime\prime\prime}{v}$的流数。因此，$\overset{\prime\prime}{z}$，$\overset{\prime}{z}$，$z$，$\dot{z}$，$\ddot{z}$，$\dddot{z}$，$\ddddot{z}$等等构成一个量的序列，其中每一项都是前一项的流数，同时又是以紧接在后的项为流数的流量。这类序列的例子如

$$\overset{\prime\prime}{\sqrt{az-zz}},\ \overset{\prime}{\sqrt{az-zz}},\ \sqrt{az-zz},\ \dot{\sqrt{az-zz}},\ \ddot{\sqrt{az-zz}},\ \dddot{\sqrt{az-zz}};$$

同样的例子还有序列

$$\overset{\prime\prime}{\frac{az+zz}{a-z}},\ \overset{\prime}{\frac{az+zz}{a-z}},\ \frac{az+zz}{a-z},\ \dot{\frac{az+zz}{a-z}},\ \ddot{\frac{az+zz}{a-z}},\ \dddot{\frac{az+zz}{a-z}},\ \text{等等。}$$

（10）应当指出的是，这些序列中的每一项，都可以看作是一个曲线形的面积，而这些曲线形的纵坐标恰好等于紧接在后的项，横坐标则为 z，如$\overset{\prime}{\sqrt{az-zz}}$可以看作是纵坐标为$\sqrt{az-zz}$，横坐标为 z 的曲线形的面积。

（李文林 译）

① 这是牛顿引进的积分记号，它没有像带点流数记号那样获得公认，而是在使用过程中被淘汰了。

36. 莱布尼茨:论微积分

莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646～1716)出生于德国莱比锡一个教授家庭,早年在莱比锡大学学习法律,同时开始接触伽利略、开普勒、笛卡儿等人的科学思想。1667年获阿尔特多夫大学博士学位。1668年开始为缅因茨选侯服务,后被派往巴黎担任外交使节。在巴黎居留的四年(1672～1676),成为莱布尼茨科学生涯中最重要的时期,他有许多成就都是在这一时期取得或奠定基础。1676年,莱布尼茨回到德国,在汉诺威公爵处任顾问和图书馆长,从此定居汉诺威直到去世。莱布尼茨是柏林科学院的创建者和首任院长(1700);彼得堡科学院、维也纳科学院等也是在他的倡导下成立。他甚至曾致函中国康熙皇帝建议成立北京科学院。莱布尼茨的博学多才在科学史上罕有所比,其著作涉及数学、力学、机械、地质、逻辑、哲学、语言、法律、外交、神学等。在数学方面,莱布尼茨最突出的贡献是与牛顿各自独立地创立了微积分。与牛顿运动学观点的流数论相比,莱布尼茨的微积分则具有强烈的哲学背景并从几何角度着手。他的富有启发意义的符号远比牛顿使用的优越,对于微积分的传播、发展影响颇大。莱布尼茨关于微积分的论文大都发表在《教师学报》(Acta Eruditorum)上,本节选录其中的二篇。

36.1. 莱布尼茨的第一篇微分学论文

莱布尼茨1684年发表了他的第一篇微分学论文——《一种求极大与极小值和求切线的新方法》(拉丁文全名 Nova Methodus pro Maximis et minimis,itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quanti-

tates moratur, et singulare pro illi Calculi genus, Acta Eruditorum 3,1684, pp. 467～473)。这也是数学史上第一篇正式发表的微积分文献[①]。该文是莱布尼茨对自己1673年以后微积分研究的概括,其中定义了微分,并广泛采用了微分记号 dx,dy。这篇论文还给出了函数和、差、积、商及乘幂的微分法则,同时包含了微分法在求切线、求极大极小值以及拐点等方面的应用。以下摘录这篇论文的主要部分,原文亦载于 Leibniz: Mathematische Schriften, Abth. 2, Band, Ⅲ. 1863。

一种求极大与极小值和求切线的新方法,它也适用于分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算。

已知轴 AX(图 1)[②] 和某些曲线 VV,WW,YY,ZZ,曲线的纵坐标 VX,WX,YX,ZX 与已知轴相垂直且分别记为 v,w,y,z。在轴上截出的线段 AX 称为 x。设切线为 VB,WC,YD,ZE,分别与轴相交于 B,C,D,E。现将某个任意选定的直线段叫做 dx,将与 dx 之比等于 v(或 w,或 y,或 z)与 XB(或 XC,或 XD,或 XE)之比的线段叫做 dv(或 dw,或 dy,或 dz)[③],或称之为 v(或 w,或 y,或 z)的微分[④]。从这些假设出发,我们可以得到以下的计算法则。

如果 a 是一给定常数,那么 $da=0$,并有 $d(ax)$[⑤] $=adx$。如果

① 牛顿发明微积分的时间虽在莱布尼茨之前(约1664),但却迟迟没有发表结果。1687年出版的《自然哲学的数学原理》是牛顿正式发表的第一本包含有其流数理论的著作。

② 注意在莱布尼茨图中,横坐标轴与纵坐标轴的取法与现今通常使用的坐标系相反。

③ 若用S表示次切线,莱布尼茨在这里用比式 $dv:dx=v:s$ 来定义微分 dv,这个定义在逻辑上假定切线已先有定义,但如我们将在后面所看到,莱布尼茨对切线的定义是不能令人满意的。

④ 莱布尼茨在这里使用的是拉丁词 differentia(差),在莱布尼茨的著述中,常出现 difference 与 differential 的混用,这与他对微分实质的理解(参见下文)不无关系。

⑤ 莱布尼茨写作 $d\,\overline{ax}$。莱布尼茨不用括号,本译文则从 Struik 的做法,用括号替代莱布尼茨的横道记号,但莱布尼茨使用的其他符号,都统统保持不变。

$y=v$（就是说曲线 YY 的纵坐标等于曲线 VV 的相应的纵坐标）那么 $dy=dv$.

现在是加减法则：如果 $z-y+w+x=v$，那么 $dv=d(z-y+w+x)=dz-dy+dw+dx$.

乘法法则：$d(xv)=xdv+vdx$，或设 $y=xv$，则有 $dy=xdv+vdx$. 无论我们是取 xv 这样的式子还是代之以 y 之类的字母，结果都一样。需要注意的是，在这种计算中，对 x 和 dx 的处理与对 y 和 dy，或对任何其他不确定字母及其微分的处理方法相同。另外必须注意的是，从一个微分方程出发，并不一定能进行相反的运算，除非适合一定的条件。关于这一点，我们将在其他场合来讨论。

接着是除法法则：$d\frac{v}{y}$ 或 $dz=\frac{\pm vdy\mp ydv}{yy}$①（设 $z=\frac{v}{y}$）.

关于符号，我们必须牢记以下规则。如果在计算中只是用微分代替字母，则符号保持不变：对 z 我们写出 dz，对 $-z$ 则写出 $-dz$，正如前述加、减法则中所显示的那样。但若涉及 z 值的具体表达式，也就是说考虑的是 z 与 x 的关系，那就必须指出 dz 是正量还是小于零的量（或负量）。如果是后一种情形，那么切线 ZE 就不是朝 A，而是相反即由 X 处向下。当纵坐标 z 随 x 的增加反而减小时，就出现这样情况。因为纵坐标 v 有时增加，有时减少，dv 将有时为正，有时为负；在前一种情形，切线 $1V1B$ 将朝 A，在后一种情形则切线 $2V2B$ 朝向相反，

图 1

① 莱布尼茨有时在确定确切符号前先使用±，∓这样的所谓"二义符号"（ambiguous signs）。关于二义符号及其确定，他在下文中给出了一段说明，本译文从略。

在中间位置 M，则上述两种情形都不发生，此时 V 既不增加也不减少，而是处于静止状态。因此 $dv=0$，这个量已无所谓正负，因为 $+0=-0$. 在该处 v 即纵坐标 LM 达极大值（或当曲线凸向轴时，达极小值），而曲线在 M 点的切线既不从 X 向上朝 A 趋近于轴，也不取向下的另一方向，而是与轴相平行。若 dv 相对于 dx 为无限，则切线将与轴相垂直，即为纵坐标线本身。若 $dv=dx$，则切线将与轴相交成半直角。如果随着纵坐标 v 的增加其增量或微分也增加（就是说当 dv 为正，ddv，微分的微分，亦为正，而当 dv 为负，ddv 亦为负），则曲线将凸向轴，在另一情形曲线将凹向轴[①]。在增量达到极大或极小值处，或者说当增量由增变减或由减变增时，就会出现一个拐点[②]。在该处曲线的凹凸性将会改变，只要纵坐标本身并不由增变减或相反由减变增，……。

……

乘幂：$dx^a=ax^{a-1}dx$，例如 $dx^3=3x^2dx$。

根式：$d\,\dfrac{1}{x^a}=-\dfrac{adx}{x^{a-1}}$，例如若 $w=\dfrac{1}{x^3}$，则 $dw=-\dfrac{3dx}{x^4}$。

$d\sqrt[b]{x^a}=\dfrac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$（因此 $d\sqrt[2]{y}=\dfrac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$，因为在此情形 $a=1,b=2$，故 $\dfrac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$，但由几何级数中指数的性质，$y^{-1}$ 与 $\dfrac{1}{y}$ 是一样的，同时 $\sqrt[2]{\dfrac{1}{y}}=\dfrac{1}{\sqrt[2]{y}}$）。

$$d\,\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}=\frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$$

对整数幂的法则也适用于分式以及根式情形，因为一个幂当指数为负数时就变为分式，而当指数为分数时则变为根式。不过我宁愿自己来推导这些结果，而不把麻烦留给别人，因为所有这些结果都相当一般并经常出现，在本身很复杂的问题中，简化计算是可

① 莱布尼茨原文此处“凹”（Cancavity）、“凸”（Convexity）误易，与上下文不相一致，今从 D. E. Smith 英译本予以更正。

② 莱布尼茨的原始拉丁用语为：punctum flexii contrarri，直译为“反向弯曲点”。

取的。

知道了这种我称之为微分学(differential calculus)的算法(Algorithm),所有其他的微分方程就都能用一种共通的方法来求解。我们可以求极大值与极小值以及求切线,而不必像以往发表的方法那样去消除分式、无理式或其他的限制。所有这一切的证明对于有处理这类问题的经验的人来说是轻而易举的,这些人了解这样一个迄未得到充分认识的事实,即 dx,dy,dv,dw,dz 可以被看成是与相应的 x,y,v,w,z 的瞬时差(即瞬时增量或减量)成正比[①]。对于任意给定的方程。我们都可以写出其微分方程,这只要将方程的每一项(即通过加、减而对方程有贡献的任何部分)用其微分量来代替即可。对于任何其他量(本身不是方程的项,但对该项的构成有贡献),我们用它们的微分量来得到这个项本身的微分量,为此不能通过简单的代换,而要根据上述的算法。以前的方法就没有这种过渡。他们大多采用诸如 DX 之类的线段,而不用作为 DX,DY 与 dx 的第四比例项的线段 dy——这样做容易引起混淆。他们由此进一步消除分式和无理式(其中有未知量出现)。十分清楚,我们的方法也适用于超越(transendental)[②]曲线——即那些不能通过代数运算来化约或没有确定次数的曲线,因而能在最一般的意义上成立,而毋需任何特殊的、往往并不令人满意的假设。

我们只要记住:求切线就是指画出曲线上距离为无限小的两点的连线,或画出一有无限多个角的多边形的延续边,我们用此多边形来代替曲线。这种无限小距离总可以用像 dv 这样的已知微分或其关系式来表示,也就是说用某些已知切线来表示。特别地,设 y 是一超越量,例如一条摆线的纵坐标,它出现在确定另一条曲

---

① 莱布尼茨在这里试图对微分的实质作出解释:微分乃是无限小差。但对无限小量的意义,莱布尼茨的思想始终踌躇不定。通常认为莱布尼茨的无限小量是实在的、确定的量,即不等于零却比任何正数都小的量,但对莱布尼茨著述的进一步研究表明,莱布尼茨并不坚持无限小量的实在性,他在后来的一些手稿中,有时也将无限小量理解成变化的(无限变小的)和不确定的量。

② 这可能是数学史上第一次在“非代数”的意义下使用 transendental 这一术语。

线的纵坐标 z 的计算中，如果要知道 dz 或通过 dz 得出后一曲线的切线，那么我们就要千方百计通过 dy 去求出 dz，因为摆线的切线我们是知道的，即使不知道，也可以根据圆的切线的已知性质通过类似的方法将它求出。

现在我们来举一个这种算法的例子，其中除法将用 $x:y$ 或 $\frac{x}{y}$ 表示，意指 x 被 y 除。

设已知方程或第一方程为

$$x:y+(a+bx)(c-xx):(ex+fxx)^2+ax\sqrt{gg+yy}$$
$$+yy:\sqrt{hh+lx+mxx}=0$$

它表示 x 与 y 或 AX 与 XY 之间的关系，其中 a,b,c,e,f,g,h 为已知数，我们希望从一点 Y 作曲线的切线 YD，或者说求线段 DX 与已知线段 XY 之比。为简化起见我们记 $n=a+bx,p=c-xx,q=ex+fxx,r=gg+yy$ 和 $s=hh+lx+mxx$，于是得到

$$x:y+np:qq+ax\sqrt{r}+yy:\sqrt{s}=0$$

我们称之为第二方程。根据我们的算法可得

$$d(x:y)^{①}=(\pm xdy\mp ydx):yy$$

同样可得

$$d(np:qq)=[(\pm)2npdq(\mp)q(ndp+pdn)]:q^3$$
$$d(ax\sqrt{r})=+axdr:2\sqrt{r}+adx\sqrt{r}$$
$$d(yy:\sqrt{s})=[(\pm)yyds(\mp)4ysdy]:2s\sqrt{s}.$$

所有这些微分量相加等于零，因此若将第二方程中各项用其微分量代换就得到第三方程。现有 $dn=bdx,dp=-2xdx,dq=edx+2fxdx,dr=2ydy$ 和 $ds=ldx+2mxdx$. 将这些值代入第三方程又得到第四方程，其中仅剩的微分量 dx,dy 都不在分母中出现，因而不受限制。将方程的每一项乘以 dx 或 dy，使得不论计算多么复杂，关于这两个量齐次律永远成立。由此我们可得到 $dx:dy$ 的

① 莱布尼茨写成 $d,x:y$.

值，即 dx 与 dy 之比值，或所求 DX 与已知 XY 之比值。在我们的例子中，这个比值将等于(如果第四方程被变换成比式)：

$$\mp x : yy - axy : \sqrt{r} (\pm) 2y : \sqrt{s}$$

除以

$$\mp 1 : y(\pm)2np(e+2fx) : q^3(\mp)(-2nx+pb) : qq$$
$$+a\sqrt{r}(\pm)yy(l+2mx) : 2s\sqrt{s}$$

因为点 Y 是已知的，故 x 和 y 已知，这样我们就得到了需要的结果。虽然这个例子相当复杂，但通过它我们可以明白如何在更困难的计算中运用上述那些法则。现在只剩下来说明这些法则在比较容易掌握的情况下的应用了。

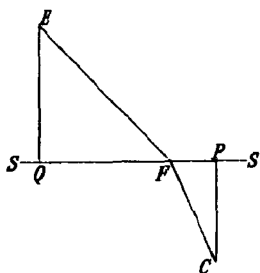


图 2

设有两点 C 和 E(图 2)及同一平面上的直线 SS，在 SS 上求一点 F，使当 E 和 C 分别与 F 相连后，CF 与已知线段 h 的乘积同 FE 与已知线段 r 的乘积之和尽可能地小。换言之，若 SS 是两种介质的界面，h 表示 C 方介质(如水)的密度，r 表示 E 方介质(如空气)的密度，我们要求一点 F 使由 C 经 F 到 E 是最短的可能路径。假设所有可能的乘积和，或者说所有可能的路径，用垂直于直线 GK(参见图 1)的曲线 VV 的纵坐标 KV 表示。我们将称这些纵坐标为 w，那么问题是要求它们的最小值 MN，因为 C 和 E 已知，它们关于 SS 的垂线 CP(记为 c)和 EQ(记为 e)就已知；另外 PQ(记为 p)也已知，我们用 x 表示 $QF=GN$(或 AX)，f 表示 CF，g 表示 EF，则 $FP=p-x$，$f=\sqrt{cc+pp-2px+xx}$，或简写为 $\sqrt{l}$；$g=\sqrt{ee+xx}$，或简写为 $\sqrt{m}$，因此

$$w=h\sqrt{l}+r\sqrt{m}$$

根据我们的算法得微分方程(因为在极小值情形有 $dw=0$)：

$$0=+hdl : 2\sqrt{l}+rdm : 2\sqrt{m}.$$

但 $dl=-2(p-x)dx$，$dm=2xdx$；因此

$$h(p-x):f=rx:g.$$

现将此方程应用于屈光学，并取 f 和 g 即 CF 和 EF 相等(因为不管线段 CF 长短如何，在 F 点的折射都相同)，于是有 $h(p-x)=rx$ 或 $h:r=x:(p-x)$，或 $h:r=QF:FP$；因此，入射角和折射角的正弦 QF 和 FP 与入射介质和折射介质的密度 r 和 h 将成反比例。然而介质密度是独立于我们的性质，仅与光线遇到的阻力相关。于是我们就对本《学报》另一篇文章[①] 中所陈述的计算方法给出了一个证明，在那篇文章中我们建立了光学、反射光学和屈光学的一般基础。凡熟悉微分学的人都能像本文这样魔术般做到的事情，却曾使其他渊博的学者百思不解。

……

这仅仅是更高超的几何学的开端，这种几何学甚至能适用于最困难、最奇妙的应用数学问题，而如果没有我们的微分学或类似的算法，任何人都不可能如此容易地解决问题。最后我要附加说明德·波纳[②] 向笛卡儿提出的一个问题的解答，笛卡儿在《书信集》第 3 卷中试图解决这个问题却未获成功[③]。问题是求一条曲线 WW，使当向轴画出其切线 WC 且 XC 恒等于已知常线段 a，则 XW(或 w)与 XC(或 a)之比等于 dw 与 dx 之比，若 dx(可任意选取)为常数，例如恒等于 b，也就是说 x 或 AX 均匀地增长，则有 $w=\frac{a}{b}dw$. 因此纵坐标 w 与它们的 dw(即增量或微分)成正比，这意味着如果 x 形成一算术级数，那么 w 就形成一几何级数，换句话说，如果 w 是一些数，x 就是它们的对数，因此曲线 WW 是对数

---

① Leibniz: Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium, Acta Eruditorum 1 (1683)，该文讨论光的反射与折射定律，也是莱布尼茨宣布自己发现极大与极小值求法的第一篇公开论文。

② Florimond De Beaune (1601～1652)，法国律师、学者。

③ 这是一个反切线问题。莱布尼茨在这里引征 Les lettres de René Descartes (3vols; Paris, ed. C. de Clerselier, 1657～1667)。该书信集载有德·波纳的提问和笛卡儿的答复(1639)，引起莱布尼茨的关注，该问题发端于纳皮尔的对数研究，经笛卡儿、莱布尼茨直到欧拉等一系列大数学家的讨论，最终导致了对函数 $y=\log x$ 与 $x=e^y$ 互逆关系的充分认识。

曲线。

36.2. 莱布尼茨的第一篇积分学论文

莱布尼茨在发表第一篇微分学论文后两年,又发表了他的第一篇积分学论文,其中首次引进了积分号$\int$,并初步论述了积分或求积问题与微分或求切线问题的互逆关系。该文题为《深奥的几何与不可分量及无限的分析》(De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum),是对牛顿的学生克雷格(J. Craig)一本著作① 的书评,发表于《教师学报》(Acta Eruditorum, 5, 1686),亦载 Leibniz: Mathematisches Schriften, Abth. 2, Band Ⅲ, pp. 226—235,以下摘录这篇论文的一部分。

因为研究不定求积或其不可能性的方法对我来说不过是我称之为反切线方法的更广泛的问题的特殊情形(并且事实上是比较容易的情形),而这种反切线方法包括了整个超越几何的绝大部分;因为它总可以代数地求解,其中的一切都被看成是已知,而尽管如此,到目前为止我却始终未能看到令人满意的结果,因此我要来说明反切线问题如何能像不定求积本身一样地进行求解。正如以往代数学家用字母或一般的数来表示所求量一样,在这种超越问题中,我用假设的一般或不定方程来表示所求曲线。例如用通常的 x 和 y 表示横坐标和纵坐标,所求曲线的方程为

$$0=a+bx+cy+exy+fx^2+gy^2$$

通过这个不定方程,求一条具体曲线的切线(如果需要的话,这总是能做到的),并与切线的已知性质进行比较,于是就得到 a,b,c 等假设字母的值,进而得到所求曲线的方程,有时某些项目仍不能

---

① J. Craig: Methodus figuraum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi (London, 1685),该书出版时间在牛顿流数术公开发表之前,其中提到了莱布尼茨的微积分。John Craig(1660? ~1731),苏格兰神学家。

确定，在这种情况下可能会有无数条满足要求的曲线，问题变得如此复杂，以致许多人认为它不够确定，从而不可能解决。利用级数也可以进行同样的过程。但根据所施行的运算，我还用到了许多东西，对这些我将另作说明。如果比较不成功，我就认为所求曲线不是代数的而是超越的。

在这种情况下，为了发现超越类[①]（因为有些超越量与比的不定问题或对数有关；另一些超越量与角的不定问题或圆弧有关；还有一些超越量则依赖于更复杂的不定问题），除了字母 x 和 y，我又假设了第三个字母 v，用以表示超越量，由这三个字母形成所求曲线的方程，由这方程再按我 1684 年 10 月在《教师学报》上发表的切线方法（此法并不排除超越量）求曲线的切线表达式，然后将所得结果与曲线切线的已知性质进行比较，这样不仅可以求出 a，b，c 等假设字母，而且可以发现该超越量的特性。

………

我处理这问题的方法如下。设纵坐标为 x，横坐标为 y，曲线法线与纵坐标之间的区间为 p，则从我的方法立即得到 $pdy=xdx$[②]，正如克雷格博士已发现的那样。对此微分方程求和，我们就得到 $\int pdy=\int xdx$，但根据我们的切线方法，$d(\frac{1}{2}xx)=xdx$；反之则有 $\frac{1}{2}xx=\int xdx$（像通常的乘方与开根运算一样，这里的和与差，即 $\int$ 与 d，也是互逆的运算）。于是我们得到 $\int pdy=\frac{1}{2}xx$，这就是要证明的[③]。

---

① “类”(species)：韦达(F. Viete)用语，参见本书[29]韦达：《分析引论》译注。

② 如图（见下页注②）曲线 C 上一点 P，C 在 P 点的法线 n，次法线 p，因由 ds，dx，dy 构成的特征三角形与由 n，p 和 x 构成的三角形相似，有 $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$，故 $pdx=ydy$，注意莱布尼茨原文此处纵坐标与横坐标是反取的。

③ 莱布尼茨在这里证明的问题源于巴罗，巴罗曾提出如下的定理：一条曲线的纵坐标与其法线在横轴上截取的区间之和等于终点坐标平方之半。见 I. Barrow，Lectiones geometricae(Cambridge，1670)，Lecture XI，No. 1. 克雷格在他 1685 年的著作中亦曾试图证明巴罗定理，引出了莱布尼茨的研究。

在这里我选用 dx 和类似的符号而不用特殊字母，因为 dx 是 x 的某种变化，由此表明这种运算仅涉及 x 与其乘幂和微分，并可表示 x 与另一变量之间的超越关系[①]。这样超越曲线也可以用方程来表示，例如若 a 是弧长，ver sine x，则 $a=\int dx : \sqrt{2x-xx}$，同时设摆线的纵坐标为 y，那么 $y=\sqrt{2x-xx}+\int dx : \sqrt{2x-xx}$，这方程完美地表示了纵坐标 y 与横坐标 x 之间的关系，由此可以证明摆线的所有性质，这样分析运算就被推广到那些迄今为止仅仅以不适用为由而横遭排斥的曲线上去；沃里斯的插值法和其他许多问题都可从这方法推导出来。

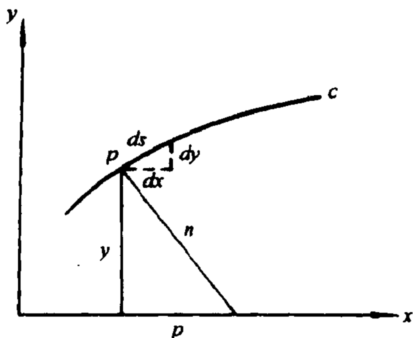
……

在这方面我当时还是初出茅庐的新手，通过与球面面积证明有关的研究，我突然看到一片光明。因为我认识到：一般说来，由一条曲线的法线形成的图形，即将这些法线（在圆的情形就是半径）按纵坐标方向置于轴上所形成的图形，其面积与曲线绕轴旋转而成的立体的面积成正比[②]。这一定理使我欢欣鼓舞，因为我不知道

---

① 此处原文比较晦涩，各本翻译不尽一致，D. J. Struik 认为莱布尼茨这里的意思主要是说：将 x 的幂与微分 dx 置于积分号下，便于揭示表达式的函数特征，尤其是诸如 $\int dx : x$，$\int dx : \sqrt{1-x^2}$ 这类所谓"超越量"的函数性质。

② 如图两个相似三角形中，有 $\frac{ds}{n}=\frac{dx}{y}$，$yds=ndx$，故，$\int yds=\int ndx$，容易看出这正是莱布尼茨这里所述的定理，这一结果是对帕斯卡关于圆的类似定理的推广，它不仅是莱布尼茨发现特征三角形的决定性一步，并且导致了莱布尼茨微积分的一系列关键进展。



还有其他人知道这样的事情，我立即对任意曲线构造了所谓特征三角形，这种三角形的边是不可分量（更确切地说是无限小量）或微分量；由此我又迅速地、毫无困难地建立了大量的定理，其中有些定理我后来才在格雷戈里(Gregory)和巴罗的著作中看到。

……

我终于发现了代数学对超越量的推广，也就是我的无限小算法，它包括了微分以及求和或求积．我称这种算法为**不可分量及无限的分析**（如果我想得不错，这是一个十分恰当的名称），它一旦被发现，所有这类曾使我绞尽脑汁的问题，似乎都变成儿童的游戏了。

（李文林 译）

37. 雅各·伯努利:论序列与级数

17世纪末和18世纪初,莱布尼茨的微积分学说被他的学生推广、发展并取得了很大成功。在这方面,雅各·伯努利(Jacob Bernoulli,1654~1705)和约翰·伯努利(Johann Bernoulli,1667~1748)兄弟贡献尤著。他们的工作形成了现今所谓初等微积分的大部分内容,同时反映了微分方程、变分法等的早期发展。

雅各·伯努利毕业于瑞士巴塞尔大学,最初攻读神学,后来兴趣转向数学,1687年任巴塞尔大学数学教授直至去世。他身后出版的《猜测术》(Ars Conjectandi,1713,Basel),是概率论的先驱著作之一,但其中引进的著名的“伯努利数”,以及作为附录而收载的关于无穷级数的论文,也是对分析发展的重要贡献。

37.1. 论伯努利数

伯努利数现已成为分析中应用极广的数。以下选录《猜测术》的有关部分,转译自 D.E.Smith: A Source Book in Math pp. 87~90,从中我们可以看到伯努利数的原始引进过程,以及作者的富有启发意义的思维方式。

设有自然数列1,2,3,4,5,…直到n,欲求它们的和、平方和、立方和等等。因为组合表中第二列的一般项为$n-1$,所有各项(即所有的$n-1$)之和或$\int \overline{n-1}$[①] 按前面所述应为

$$\frac{n\cdot \overline{n-1}}{1\cdot 2}=\frac{nn-n}{2}$$

① 伯努利用符号$\int$表示我们今天所用的$\sum$。

和 $\int \overline{n-1}$ 或 $\int n - \int 1 = \frac{nn-n}{2}$.

因此 $\int n = \frac{nn-n}{2} + \int 1$

但 $\int 1$ （所有的单位之和）$=n$，因此所有 n 的和

$$\int n = \frac{nn-n}{2} + n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$$

第三列的一般项为

$$\frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} = \frac{nn-3n+2}{2}$$

所有各项（即所有的$\frac{nn-3n+2}{2}$）之和为

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3-3nn+2n}{6}$$

我们将有 $\int \overline{\frac{n^2-3n+2}{2}}$ 或

$$\int \frac{1}{2}nn - \int \frac{3}{2}n + \int 1 = \frac{n^3-3nn+2n}{6}$$

和

$$\int \frac{1}{2}nn = \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \int \frac{3}{2}n - \int 1$$

但 $\int \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}\int n = \frac{3}{4}nn + \frac{3}{4}n$

和 $\int 1 = n$.

经过替换，我们有

$$\int \frac{1}{2}nn = \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \frac{3nn+3n}{4} - n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}nn + \frac{1}{12}n$$

其两倍 $\int nn$（所有 n 的平方和）$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$.

第四列的一般项为

$$\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3-6nn+11n-6}{6}$$

所有各项之和为

$$\frac{n\cdot \overline{n-1}\cdot \overline{n-2}\cdot \overline{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{n^4-6n^3+11nn-6n}{24}.$$

它应等于$\int \overline{\frac{n^3-6nn+11n-6}{6}}$

亦即$\int \frac{1}{6}n^3-\int nn+\int \frac{11}{6}n-\int 1=\frac{n^4-6n^3+11nn-6n}{24}$.

因此

$$\int \frac{1}{6}n^3=\frac{n^4-6n^3+11nn-6n}{24}+\int nn-\int \frac{11}{6}n+\int 1$$

此前已求得

$$\int nn=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}nn+\frac{1}{6}n,\ \int \frac{11}{6}n \text{ 或 } \frac{11}{6}\int n=\frac{11}{12}nn+\frac{11}{12}n$$

和$\int 1=n$,分别代入上式后可得如下结果:

$$\int \frac{1}{6}n^3=\frac{n^4-6n^3+11nn-6n}{24}+\frac{1}{3}n^{③}+\frac{1}{2}nn+\frac{1}{6}n-\frac{11}{12}nn$$

$$-\frac{11}{12}n+n=\frac{1}{24}n^4+\frac{1}{12}n^3+\frac{1}{24}nn$$

或乘以 6 得

$$\int n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}nn$$

这样我们就可以逐步达到越来越高次幂并不难形成下表[①]。

幂　和

$\int n=\frac{1}{2}nn+\frac{1}{2}n,$

$\int nn=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}nn+\frac{1}{6}n,$

$\int n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}nn,$

$\int n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3 \quad * -\frac{1}{30}n,$

---

① 表中 * 号表示缺项。

$$\int n^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4 \quad * -\frac{1}{12}nn,$$

$$\int n^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5 \quad * -\frac{1}{6}n^3 \quad * +\frac{1}{42}n,$$

$$\int n^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6 \quad * -\frac{7}{24}n^4 \quad * +\frac{1}{12}nn,$$

$$\int n^8=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7 \quad * -\frac{7}{15}n^5 \quad * +\frac{2}{9}n^3 \quad * -\frac{1}{30}n,$$

$$\int n^9=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8 \quad * -\frac{7}{10}n^6 \quad * +\frac{1}{2}n^4 \quad * -\frac{1}{12}nn,$$

$$\int n^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9 \quad * -1n^7 \quad * +1n^5 \quad * -\frac{1}{2}n^3 \quad * +\frac{5}{66}n.$$

无论谁按他们的规则来检查这些数列，都可将此表继续下去。设 c 为任意次幂指数，所有 n^c 之和或

$$\int n^c=\frac{1}{c+1}n^{c+1}+\frac{1}{2}n^c+\frac{c}{2}An^{c-1}+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4\cdot c-5\cdot c-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{c-7}$$

等等，n 的指数相继减 2 直到 n 或 nn，大写字母 A,B,C,D 依次表示 $\int nn$，$\int n^4$，$\int n^6$，$\int n^8$ 的表达式中最后一项的系数，也就是说，$A=\frac{1}{6}$，$B=-\frac{1}{30}$，$C=\frac{1}{42}$，$D=-\frac{1}{30}$.

这些系数满足这样的性质，即它们每一个与同一表达式中的其他系数相加为 1，这样 D 一定取值 $-\frac{1}{30}$，因为 $\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{15}+\frac{2}{9}+(+\mathrm{D})-\frac{1}{30}=1$，

借助此表，我只花不到七、八分钟时间就算出了前 1000 个数的十次方相加之和为

91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500.

由此可见布里亚杜(Ismael Bullialdus)[①]编纂的大部头著作《无穷算术》是多么劳而无功。他在该书中费了九牛二虎之力才算出的前六次幂和,只不过是我用一页纸就能完成的工作的一部分而已。

37.2. 论调和级数

微积分的发展与无穷级数的研究密不可分。雅各·伯努利在1689～1704年间撰写了5篇关于无穷级数的论文,使他成为当时这一领域的权威。这些论文引起了关于级数求和及收敛性的进一步研究。它们曾被雅各的侄子尼古拉(Nicholas Bernoulli,1695～1726)作为《猜测术》的附录发表(1713)。后又载入J. Bernoulli:Opera,2 vols. (G. Cramer ed.)Geneva,1744,以下摘录第一篇论文(1689)关于调和级数的论述,转译自D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 321～324.

① I. Bullialdus(1605～1694),法国天文学家,著有Opus novum ad arithmeticam infinitorum (Paris,1682).

恰如有限小之和孕含了无穷级数，

无限之处存在着极限：

伟大的上帝同样显迹于平凡的躯体，

狭小的空间却又无垠无边。

噢！透过巨大而洞察细微是多么美妙。

在平凡中认识上帝的伟大又是何等荣耀[①]！

一个有调和比的无穷级数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

的和是无限。

我的弟弟首先考察了这一点：因为他在按前面所说的方法求出和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$$

以后，想进一步知道若用第 XIV 节的方法[②]求级数

---

① 原文为拉丁文诗句：Ut non finitam seriem finita coercet
Summula et in nullo limite limes adest：
Sic modico immensi vestigia Numinis haerent
Corpore et augusto limite limes abest
Cernere in immense parvum，dic，quanta voluptas！
In parvo immensum cernere，quanta，Deum！

② 雅各·伯努利在第 XIV 节中推理如下：

设 $N=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$；

则 $P=N-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$；

故 $N-P=1=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\cdots$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

这种推理是不能接受的，因为 N 不是有限数，但雅各的证明经适当修改后仍能成立。设

$Sn=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，

则 $Sn-(Sn-1)=1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n}$，

故 $1=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}]$.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\cdots$$

的和将得到什么。然后他通过假设调和级数有有限和而引出明显的矛盾，并由此证明了定理的正确性。

确实，他注意到：若各项分数的分子分别变为 1，2，3，4，…，则级数 $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$ 将变成级数 $B=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}+\cdots=C+D+E+F+\cdots$，

这里 $C=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots\cdots=1$（证明如前），

$$D=+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots\cdots=C-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E=+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots\cdots=D-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$F=+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots\cdots=E-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

………

由此可得

$$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots=A$$

于是在和为有限的假设下，可推出部分等于整体。

当他告诉我这一结果后，我给出了一个证明，我的证明是通过以下方法来指出无穷调和级数 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 的和大于任意给定的数，因此根据命题Ⅱ[①]它是无限。为了证明这一点，设 N 是一给定的任意大数。从级数的开始部分取出一组项，它们的和等于或大于 1，即数 N 所含的一个单位。从余下的项中再取出一组项，它们的和也大于一个单位，重复这一过程，数 N 有多少个单位，就重复多少次。所有各项加在一起将超过给定的数，从而整个级数也将超过此数。

① 命题Ⅰ即：大于任意给定量的量是无限。

如果你不相信在取出某些项后其余的项能超过单位大，那么设 1 : a 是最后一次分取后剩余的第一项，则 1 : a 之后的各项为 1 : $(a+1)$，1 : $(a+2)$，1 : $(a+3)$，等等。现在形成一几何级数，开头二项为 1 : a 和 1 : $(a+1)$，那么该级数中第二项以后各项将小于调和级数中相应的项，因为它们有较大的分母(参见命题Ⅳ[①])。继续该几何级数直至$\leqslant 1-a^2$ 的一项(这可在有限步内做到，因为 a 是一有限数)。那么根据命题Ⅷ[②]，这有限几何级数将等于 1，因此具有同样多项的调和级数将超过单位大，证毕。

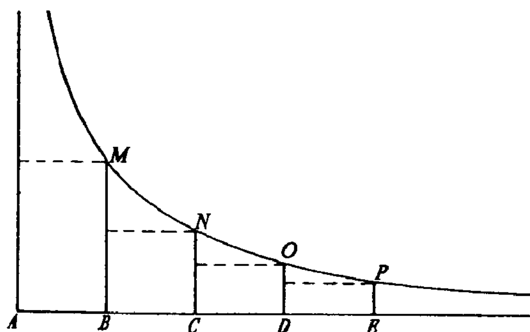


图 1

系 1，如果允许转向几何学，则同样地可证明：一条双曲线与其渐近线之间的面积为无限。设由中心点 A 开始将一条渐近线分为无限个相等部分(图 1)，分点为 B,C,D,E，……，通过它们向曲线引平行于另一条渐近线的直线 BM,CN,CO,EP，等等，并完成矩形 AM,BN,CO,DP，等等。因为它们的底相等，它们的面积之比将等于高之比，也就是说等于线段 BM,CN,DO,EP，…之比，或者

① 命题Ⅳ是说：若数 A,B,C,D,E，……形成一几何级数，A,B,F,G,H，……形成一有相同首项 A,B 的算术级数，则 $C>F,D>G,E>H$，等等。这可以通过应用欧几里得《原本》卷 V 命题25 来证明，欧氏命题由 $a:b=c:d$ 推得 $a+d>b+c$，若 a 和 d 分别为比例中的最大数与最小数(且均为正数)。据此由 $A:B=B:C=C:D=D:E$ 可得 $A+C>2B=A+F$，从而 $C>F$，等等。

② 命题Ⅷ给出一几何级数中 n 项之和，其论证如下：以$\frac{1}{a}+\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a}+\cdots\cdots$代替$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots\cdots$，此处 $r=\frac{a}{a+1}$。继续该几何级数直至最后一项$\frac{r^{n-1}}{a}\leqslant\frac{1}{a^2}$，或 $ar^{n-1}\leqslant 1$，该级数中 n 项之和 S_n 应为：

$$S_n=\frac{1}{a}\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a+1}{a}(1-r^n)\geqslant\frac{a+1}{a}(1-\frac{r}{a})=1$$

根据双曲线性质，应等于$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…之比，但因为我们已经证明了$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$是无限，则诸矩形 AM，BN，CO，DP，…面积之和也将为无限，从而有更充分的理由断定包含所有这些矩形的双曲线的面积也为无限。

（李文林 译）

38. 约翰·伯努利:论积分

约翰·伯努利早年曾随其兄雅各·伯努利学习数学,1695 年起任荷兰格罗宁根大学教授,1705 年到巴塞尔大学继任雅各的数学教授职位,直至 1748 年去世。

约翰与他哥哥雅各一样也是莱布尼茨的追随者并成为 18 世纪微积分的奠基人之一。他的成就也是多方面的,积分法的发展是其主要贡献之一。这里选录约翰 1691～1692 年间所撰积分学讲义的有关部分,转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 324～328. 该讲义最早刊于 Johann Bernoulli: Opera Omnia, 4 vols, Geneva, 1742,题为 Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque conscriptae in resum Ill. Marchionis Hospitalli cum auctor Parisiis ageret annis 1691 et 1692(关于积分法及其他课题的数学讲义,作者 1691 与 1692 年间授于巴黎,为洛必达侯爵使用而撰)。

第一讲. 论积分法及其他问题

我们已经看到怎样求量的微分[①]。现在我们来说明如何相反地求微分的积分即产生这些微分的量。如前所述可知,dx 是 x 的微分,xdx 是$\frac{1}{2}xx$ 或$\frac{1}{2}xx$+(或－)某常量的微分,$xxdx$ 是$\frac{1}{3}x^3$+(或－)某常量的微分,x^3dx 是$\frac{1}{4}x^4$+(或－)某常量的微分,同样地:

adx 是 ax 等的微分,

① 参阅约翰·伯努利《微分学讲义》(Lectiones de calculo differentialium, Basel, 1922),1922 年才正式发表。

$$axdx \text{ 是} \frac{1}{2}axx \text{ 等的微分，}$$

$$axxdx \text{ 是} \frac{1}{3}ax^3 \text{ 等的微分，}$$

$$ax^3dx \text{ 是} \frac{1}{4}ax^4 \text{ 等的微分。}$$

由此可以得出一般的法则

$$ax^p dx \text{ 是量} \frac{a}{p+1}x^{p+1} \text{的微分。}$$

因此，如果我们要求一个微分的积分，我们必须首先弄清已知量是否是一微分与其绝对量① 的某次幂的倍数之积。这是可以应用上述法则求出积分的标识。例如，欲求 $dy\sqrt{(a+y)}$ 的积分，我首先注意到它是 dy 与其绝对量 $(a+y)$ 的 $\frac{1}{2}$ 次幂的倍数之积，然后就可用上述法则而求出其积分 $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{\frac{1}{2}+1}$，亦即 $\frac{2}{3}(a+y) \cdot \sqrt{(a+y)}$.

同样地我们求出 $xdx\sqrt[3]{(a^2+x^2)}$ 的积分是

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+1}(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{8}(a^2+x^2)\sqrt[3]{(a^2+x^2)}$$

$dx : \sqrt{(a+y)}$ 的积分等于 $2\sqrt{(a+y)}$；$dx : x$ 的积分等于 $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \infty$②。

请注意有时出现的量乍看不能用上述法则来积分。但经适当

---

① 所谓“绝对量”(absolute quantity)可以通过下例说明：在 $xdx\sqrt[3]{a^2+xx}$ 中，“绝对量”是指 $z=a^2+xx$，因被积函数是 $dz^{1/3}$ 的倍数。

② 这里约翰·伯努利关于 $\int \frac{1}{x}dx$ 的推导是错误的，但它在后面纠正了这个错误。

变化后却容易求出它们的积分，正如下列情形所示。

1. 若将 $dx\ \sqrt{(a^2xx+x^4)}$ 换写成 $xdx\sqrt{(a^2+xx)}$，就可求出其积分为 $(\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}xx)\sqrt{(a^2+xx)}$. 若将 $dx\sqrt{a^3+3a^2x+3axx+x^3}$ 换写成 $(adx+xdx)\sqrt{(a+x)}$，就可求出其积分为 $\frac{2}{5}(a^2+2ax+xx)\sqrt{(a+x)}$。

2. 另一方面也会发生这样的情况：在有可能积分以前，将一个或更多个字母移到平方根号之下，例如下式

$$(3ax^3dx+4x^4dx)\sqrt{(ax+xx)}$$

该式似乎不能用上述法则积分，但若将一 x 移进根号，就可用我们的法则求出该微分的积分，结果是 $\frac{2}{3}(ax^3+x^4)\sqrt{(ax^3+x^4)}$.

3. 如果出现分式，其分母为平方、立方或其它次幂，那么我们假设其平方根为绝对量。这样在 $\frac{xdx}{a^4+2a^2xx+x^4}$ 中我们取 a^2+xx 为绝对量，就得到积分 $-1:(2a^2+2xx)$。如果我们取 $x^4+2a^2xx+x^4$ 为绝对量，那就不可能求出该分式的积分。

4. 两个不能被单独积分的量，有时可以求出它们的组合量的积分。例如

$$\frac{adx}{\sqrt{(2ax+xx)}}+\frac{xdx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$$

其中每一项都不能单独积分，但它们的和 $\frac{adx+xdx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$ 却以 $\sqrt{(2ax+xx)}$ 作为其积分。

5. 一个分式有时似乎没有积分；但在分子、分母乘以同一个量后却容易求出积分。例如取

$$adx+xdx:\sqrt{(3a+2x)}$$

分子、分母同时乘以 x 得到

$$axdx+xxdx:\sqrt{(3axx+2x^3)}$$

该式有积分$\frac{1}{3}\sqrt{(3axx+2x^3)}$.

6. 将一个分式的分子、分母除以同一个量，同样也有可能求出一个积分。例如

$axxdx : \sqrt{(a^2xx+x^4)}$，分子、分母同时除以 x 得到 $axdx : \sqrt{(a^2+xx)}$，按上述法则其积分为 $a\sqrt{(a^2+xx)}$.

……

注意事项(Monitum)①：

虽然求任意量的微分很容易，但求任意微分的积分却很困难。有时我们甚至无法肯定究竟能否求出一个已知量的积分。不过我敢断言：任意整量或有理量乘以或除以 $x^p\sqrt{(a^2-xx)}$，$x^p\sqrt{(ax-xx)}$，$x^p\sqrt{(a^2+xx)}$，皆可以被积分，或其积分可化为圆或双曲线的求积②。下面我们就来说明这一点。

一般地说，我们必须仔细弄清被积分量是否能通过乘、除或开方运算而化为这样的量：即上列根式之一与有理或整量之积。如果能做到这一点，我们就能立即求出已知量的积分，或发现它能被化为圆或双曲线的求积。例如，设已知的被积分量为

$$(a^3+axx-x^3)dx\sqrt{\frac{a+x}{x}}$$

初看其积分似乎无法计算并且与圆的求积毫无关系。如果我假设绝对量为根号下的表达式即分式$(a+x) : x$，则其微分也是分式。为了避免这样的情况，我用分子同乘无理分式的分子与分母，然后将分子自乘的积与量的有理部分结合在一起，于是就得到一个分式，其分子为有理量，分母为无理量。事实上我们得到

---

① 这是伯努利在情形 7 以后所加的注意事项。

② 伯努利的思想用现代语言表述就是：每个形为 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分(其中 R 为有理函数)都可用代数函数、测圆函数(*cyclometric*)或对数函数来表出，莱布尼茨亦有类似思想。

$$(a^3+axx-x^3)dx\sqrt{\frac{a+x}{x}}=\frac{(a^4+a^2xx+a^3x-x^4)dx}{\sqrt{(ax+xx)}}$$

这就给了我判断积分性质即能否化为双曲线求积的线索。现在来说明怎样确定和进行这件事。

……①

欲求曲线 BDC（图 1）的性状，其次切距等于常数 a。根据这一假设，$dy:dx=y:a$，故 $dx=ady:y$. 若两边同乘以 a，我们得到

$$adx=\frac{aady}{y}$$

因此，为了作出曲线，我们必须画无限长垂线 BJ，LH，并考虑所有等于 y 的 AB，AN，AO，…，相应的 BK，NE，OF，…等于 ady. 于是我们得到双曲线 KEF，其渐近线为 AO，AL。现在考虑 AG，AH，…，垂线 GP，HQ，…等于 a，于是 PQ 将是一与 AH 平行的直线。因此如果我们取双曲线面积 KN 等于矩形面积 AP，KO 等于 AQ，则交点 D，C，…将落在所求曲线上，因此如果 AG，AH，…成算术比，那么 AB，AN，AO，…将成几何比，因为面积 KN，EO，…必须相等，所以曲线 BDC 将是一条对数曲线②。

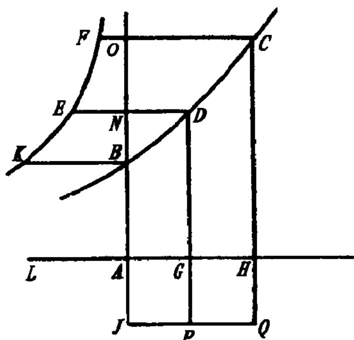


图 1

（李文林 译）

① 伯努利在下面的讲义中讨论了用变量代换法求积分的例子及其对求面积问题的应用，以下摘录的是第十讲中关于求双曲线与其一条渐近线之间的面积的例子。

② 伯努利在这里纠正了自己前面关于 $\int \frac{1}{x}dx$ 的错误结论。

39. 泰勒级数

在英国，牛顿的继承者在剑桥、牛津、伦敦和爱丁堡等著名的大学里传授和发展流数术，他们中的优秀代表有 B. 泰勒，C. 马克劳林（Maclaurin）、A. 棣莫弗（de Moivre）和 J. 斯特林（Stirling）等。其中泰勒（Brook Taylor，1685～1731）1709 年毕业于剑桥大学，1714～1718 年任皇家学会秘书。泰勒最重要的著作是《正的和反的增量方法》（Methodus Incrementorum Directa et Inversa，London，1715）。书中陈述了他在 1712 年已获得的著名的"泰勒公式"。泰勒公式使人们有可能通过幂级数展开来研究函数，对微积分的进一步发展有重要意义。以下是《正的和反的增量方法》一书中包含泰勒级数的章节。

命题Ⅶ. **定理**Ⅱ　设 z 和 x 是两个变量，其中 z 以给定增量 Δz①均匀地增加，设 $n\Delta z=v$，$v-\Delta z=\dot{v}$，$\dot{v}-\Delta z=\ddot{v}$，等等，那么我认为当 z 增加为 $z+v$ 时，x 增加为

$$z+\Delta x\frac{v}{1\cdot\Delta z}+\Delta^2x\frac{v\dot{v}}{1\cdot 2(\Delta z)^2}+\Delta^3x\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot 2\cdot 3(\Delta z)^3}+\cdots\cdots$$

证明（表 1）

x	Δx	Δ^2x	Δ^3x	Δ^4x	etc.
$x+\Delta x$	$\Delta x+\Delta^2x$	$\Delta^2x+\Delta^3x$	$\Delta^3x+\Delta^4x$	etc.	
$x+2\Delta x+\Delta^2x$	$\Delta x+2\Delta x+\Delta^3x$	$\Delta^2x+2\Delta^3x+\Delta^4x$	etc.		

① 泰勒原文中以 $\dot{z}$ 表示 z 的增量，$\ddot{z}$ 表示 $\dot{z}$ 的增量，等等。为明白起见，本译文改记 $\dot{z}$，$\ddot{z}$，$\dddot{z}$ 为 Δz，Δ^2z，Δ^3z 等等。因为 z 均匀变化，故 Δz 为常数，Δ^2z，Δ^3z 等均为零。

$x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x \quad \Delta x+3\Delta^2 x \qquad$ etc.

$+3\Delta^2 x+\Delta^4 x$

$x+4\Delta x+6\Delta^2 x \qquad$ etc.

$+4\Delta^3 x+\Delta^4 x$

从表中所示运算可以看到，由连续相加而得到的 x 值是 x，$x+\Delta x$，$x+2\Delta x+\Delta^2 x$，$x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x$，等等。但在 x 的这些值中项 x，Δx，$\Delta^2 x$，等等的数值系数的产生方法与二项展开中相应项的系数一样，若 n 是二项展开的指数，那么（根据牛顿定理）各系数将是 $1,\frac{n}{1},\frac{n}{1}\frac{n-1}{2},\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}$，等等。因此当 z 增加为 $z+n\Delta z$ 即 $z+v$ 时，x 将等于级数

$$x+\frac{n}{1}\Delta x+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\Delta^2 x+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\Delta^3 x+\cdots\cdots$$

但 $\frac{n}{1}=(\frac{n\Delta z}{\Delta z})=\frac{v}{\Delta z},\frac{n-1}{2}=(\frac{n\Delta z-\Delta z}{2\Delta z})=\frac{\dot{v}}{2\Delta z},\frac{n-2}{3}=(\frac{n\Delta z-2\Delta z}{3\Delta z})=\frac{\ddot{v}}{3\Delta z}$，等等，因此当 z 增加为 $z+v$，x 就增加为①

$$\dot{x}=x+\Delta x\frac{v}{1\cdot\Delta z}+\Delta^2 x\frac{v\dot{v}}{1\cdot 2(\Delta z)^2}+\Delta^3 x\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot 2\cdot 3(\Delta z)^3}+\cdots$$

系 I. 如果 Δz，Δx，$\Delta^2 x$，$\Delta^3 x$ 保持不变，但改变 v 的符号使 z 减少并变为 $z-v$，那么 x 也同时减少并变为

$$x-\Delta x\frac{v}{1\cdot\Delta z}-\Delta^2 x\frac{v\dot{v}}{1\cdot 2(\Delta z)^2}-\Delta^3 x\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot 2\cdot 3(\Delta z)^3}-\cdots$$

或

$$x-\Delta x\frac{v}{1\cdot\Delta z}+\Delta^2 x\frac{vv_1}{1\cdot 2(\Delta z)^2}-\Delta^3 x\frac{vv_1v_{11}}{1\cdot 2\cdot 3(\Delta z)^3}+\cdots$$

其中 $\dot{v}$，$\ddot{v}$ 改变为 $-v_1$，$-v_{11}$ 等等。

系 II. 如果用与消逝增量成比例的流数来代替这些增量，那么所有的 $\ddot{v}$，$\dot{v}$，v，v_1，v_{11} 均变为相等。当 z 均匀流动为 $z+v$，x 就变

① 这是著名的牛顿插值公式。

为[1]

$$x+\dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\dot{z}^2}+\dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\dot{z}^3}+\cdots$$

或者当 v 改变其符号而 z 减少为 $z-v$ 时，x 则变为

$$x-\dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\dot{z}^2}-\dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\dot{z}^3}+\cdots。$$

（李文林 译）

---

① 这就是经典的泰勒公式，因为若用莱布尼茨的符号就有 $\frac{\dot{x}}{\dot{z}}=\frac{dx}{dz}$，$\frac{\ddot{x}}{(\dot{z})^2}=\frac{d^2x}{dz^2}$ 等等。因此泰勒是由牛顿插值公式取 $\Delta x=0, n=\infty$ 而获得其级数的。

40. 伯克莱:《分析学家》

早期微积分逻辑基础的不严密特别是在使用无限小概念上的混乱,一开始就引起了怀疑与批评。荷兰物理学家纽文蒂(B. Nieuwentyt,1654~1718)就曾指责牛顿的流数术阐述不清、莱布尼茨的高阶微分缺乏根据。但影响最强烈的抨击是来自英国牧师、哲学家G。伯克莱(George Berkeley,1685~1753)。伯克莱于1734年成为克罗因(属今爱尔兰科克郡)地方主教。同年发表著名的小册子《分析学家,或致一位不信神的数学家》(The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, London,1734). 副题中所谓"不信神的数学家",乃指曾帮助牛顿出版《原理》的哈雷(E. Halley).《分析学家》的主要矛头是牛顿的流数术,但对莱布尼茨的微积分学说同样竭力非难。伯克莱对微积分的攻击虽出于宗教动机,但许多批评切中要害,客观上刺激了18,19世纪数学家们为建立微积分严格基础而进行的巨大努力。《分析学家》亦载于 The Works of George Berkeley, Ⅳ (Nelson, London,1951),pp. 65~102,以下摘译其中的一部分。

3. 流数方法是一把通用的钥匙,当代数学家们借助它来解开几何学的、最终也是大自然的奥秘。这一方法使数学家们能够在发现定理和解决问题方面大大超越古人。正因为如此,其发挥、应用便成为当今那些号称深刻的几何学家们主要的(如果不是唯一的)事业。然而这方法究竟是否清楚,是否没有矛盾并可加以证明,或者相反,只是一种含糊的、令人反感和不可靠的方法?我将以最公正的方式来提出这样的质疑,以便让你们,让每一位正直的读者作出自己的判断。假设点的运动生成线,线的运动生成面,面的运动

生成体。由于在相等时间内所生成的量的大小取决于它们增加和生成的速度,已经发现了一种由生成它们的运动速度来确定这些量的方法。这样的速度被称为流数,而被生成的量叫流量。这些流数被认为是近似等于在最小相等时间间隔内生成的流量的增量。精确地说,它们等于初生增量的最初比或消逝增量的最终比。有时,代替速度,被考虑的是未知流量的瞬时增量或减量,并称之为瞬。

4. 所谓瞬,我们不要把它理解为有限小量,有限小量不是瞬,而是由瞬所生成的量,因此瞬只是有限量的初生元素(nascent principles)。据说在数学中最微小的误差也不可以忽略[①],据说流数是瞬变量(celerities),不能与有限的增量成比例,而不管这些增量多么小;流数只能与瞬或初生增量成比例,这时所考虑的仅仅是比,而不是量本身。除了上述的流数,还有其他流数,其中流数的流数被称为二阶流数,二阶流数的流数则被称为三阶流数,如此等等,四阶、五阶、六阶、……,以至无穷。因为我们的感觉很难察知并接受极微小的对象,那么来源于感觉的想象就很难形成关于最小时间间隔或由它生成的最小增量的清晰概念,同时也很难理解瞬,或是流量处于初生状态即在它们最初存在和变成有限小量之前的增量概念了。至于要想象这种初生的、未完成的存在物的抽象速度,那就更是难上加难了。如果我没有弄错的话,这些速度的速度,即二阶、三阶、四阶和五阶速度等等,全都超出了整个人类理解能力的范围。人的思维越是进一步分析和研究这些难以捉摸的概念,它感到迷惑不解的地方就越多;所有这些对象都是稍纵即逝。从任何意义上看,二阶或三阶流数都是模糊而不可思议的东西。初始瞬变的初始瞬变、初生增量的初生增量,也就是一种根本没有大小的东西的增量,无论你从哪种观点去理解,我相信都不可能获得其清晰的概念。究竟是否如此,我吁请每个有思想的读者来判断。如果二阶流数都无法想像,我们又怎么能想像三阶、四阶、五阶乃至无

---

① 为牛顿在《曲线求积术》一文中所言。

穷阶的流数呢?

5. 有些人,甚至我们自己的人,都认为外国数学家使用的方法虽然不够精确,并且也许是几何化的方法,但却更清楚明了。代替流量及其流数,他们考虑随着连续加上或减去无限小量而增加或减少的可变的有限量;代替生成增量的速度,他们考虑增量或减量本身,并称之为差分,认为它们是无限小量。一段线的差分是一无限小线段;一块面的差分是一无限小面。他们还假设有限量是由无限小部分组成,并把曲线看作是边长为无限小的多边形,而这些边相交的角度决定了曲线弯曲的程度。坦率地说,要设想一个量为无限小,即比任何可感觉或可想象的量还要小,或者说比任何最小的有限量还要小,这确已超出了本人的能力。而要设想这种无限小量的一部分,即比它本身还要无限地小并且即使将它无限倍也决不会等于最小有限量的量,我想对任何人来说都是极端困难的事情;所有直言不讳的人都会承认这一点,只要他是在真正地思考,而决不盲从轻信。

6. 微分学方法与流数方法具有同样的目标,在微分学中,我们的现代分析学家们同样不满足于只考虑有限量的差分:他们还要考虑这些差分的差分,差分的差分的差分,如此等等,以至无穷。这就是说,他们要考虑比可察觉的最小量还要无限地小的量;其他比这个无限小量还要无限地小的量;以及其他比前一步得到的无限小量还要无限地小的量,等等,没有终极。这样我们就要允许一个无限小量的无限系列,其中每个量都比前面的量无限地小,而比后面的量无限地大。正如有一阶、二阶、三阶、四阶、五阶等等流数一样,也有一阶、二阶、三阶、四阶等等差分,它们形成一个趋向于零的无限序列,而这个零,你却只能逼近而永远不能达到它!并且(这是最令人莫名其妙的)如果任取千万个这样的无限小量,其中每个都被认为比其他某些实在的量无限地大,当你把它们加到最小的已知量上,却决不会使后者变大。这就是我们的现代数学家们最谦逊的假设,是他们全部思辩的基石。

……

9. 在说明了对象以后，我现在来考虑这种借助于瞬、流数或无限小量的新分析的原理；在这里，您的整个方法所依据的主要论点似乎包含着错误的推理。因此说，您自己已堕入迷津，当然也就不可能正确地指导他人了。流数法一个重要的事实是关于矩形或两个未定量的乘积的流数或瞬的求法，因为所有其他乘积或乘幂的流数计算法则均可由此推出，而不管系数或幂数是整数还是分数，是有理数还是不尽根数。现在人们也许会以为这个重要事实必已确立无疑：只要想想有多少结果是以它为基础而建立起来，其影响又是怎样地广及整个分析。然而还是请读者们自己来判断吧，以下就是所谓的证明。假设乘积或矩形 AB 随连续运动而增加，边 A 和 B 的瞬时增量为 a 和 b. 当边 A 和 B 分别减少它们的瞬的一半，矩形就变为 $A-\frac{1}{2}a\times B-\frac{1}{2}b$ 即 $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$，当边 A 和 B 分别增加它们的瞬的另一半，矩形则变为 $A+\frac{1}{2}a\times B+\frac{1}{2}b$ 即 $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. 由后者减去前者，剩下的差将是 $aB+bA$. 因此由整个增量 a 和 b 产生的矩形的增量为 $aB+bA$，证毕。但显然获得矩形的瞬或增量的直接而正确的方法应该是让各边分别增加它们的整个增量，然后将它们相乘，即 $(A+a)$ 乘以 $(B+b)$，则积 $AB+aB+bA+ab$ 就表示增大后的矩形。因此从它减去 AB，剩下的 $aB+bA+ab$ 应是矩形的真正增量，比用上述间接的、不合理的方法所得增量要大一个量 ab. 不论 a 和 b 是什么量，是大还是小，是有限量还是无限小量，是增量、瞬还是速度，这一结论普遍成立，即使你认为 ab 是极小的量也不会改变：因为据说"*in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*"①.

……

13. 另一种推导任意次幂的流数的方法如下。设量 x 均匀地

① 作为讽刺，伯克莱在这里用拉丁文重复牛顿的话：在数学中最微小的误差也不可以忽略。

流动，欲求 x^n 的流数。与 x 通过流动变为 $x+o$ 的同时，幂 x^n 变为 $\overline{x+o}|^n$. 也就是说，使用无穷级数方法有

$$x^n+nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}+\&c.,$$

而增量 o 与 $nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}+\&c.$ 之比为

$$1:nx^{n-1}+\frac{nn-n}{2}ox^{n-2}+\&c.$$

现在假设增量消失，它们的最终比将是 $1:nx^{n-1}$。然而这种推理看来是不合理和不能令人信服的。因为如果让增量消失，亦即让增量变为零，或者说没有任何增量，那么原先关于增量存在的假设也就不能成立，而由这一假设引出的结果即借助于增量而得到的表达式却必须保留。根据前面的引理可知，这种推理是站不住脚的。因为如果我们假设增量消失了，理所当然也就必须假设它们的比，它们的表达式，以及由于假设其存在而导出的一切东西都将随之而消失。

……

20. 我所非议的不是您的结论，而是您的逻辑和方法：您是怎样进行证明的？您所熟悉的对象是什么？关于它们您的表述是否清楚？您依据的原理是什么？它们是否可靠？您是如何应用它们的？……

23. 现在我要首先指出，在这里，正确结论的获得，并不是因为被丢弃的 dy 的平方是无限小，而是因为这个错误被另一个相反的但程度相等的错误抵消了[①]。……

35. 我不知道是否值得指出：有人也许希望借助符号和假设的运算来避免流数、瞬和无限小量的使用。其法如下：设 x 为一条曲线的横坐标，z 为同一曲线的另一横坐标，同时设相应的面积为 xxx 和 zzz，$z-x$ 是坐标增量，$zzz-xxx$ 是面积增量，这里不考虑

① 伯克莱在此前的几节中分析了莱布尼茨的方法，指出它是从错误的原理出发通过“错误的抵消”而获得正确的结论。

这些增量究竟有多大或多小。现在将 $zzz-xxx$ 除以 $z-x$，得商 $zz+zx+xx$；再设 z 和 x 相等，同一个商将变为 $3xx$，这正是那种情形里的纵坐标，在此处可以不通过流数和无限小而获得。但这里也存在着明显的缺陷：因为，首先假设了 z 和 x 不相等，没有这个假设将寸步难行；其次又假设 z 与 x 相等，这显然是自相矛盾，与前面的想法其实是半斤八两。因此我们完全有理由认为，一切意欲回避流数与瞬的学说而在正确的基础上建立高深、精密的几何学的尝试，同样都将被发现是此路不通。至此，关于几何学的对象与目的，最好还是按其惯有的意义去理解。流数方法的伟大作者感到了这一困难，因而才提出那样一些精巧的抽象方法和几何的形而上学，没有它们，他认为就不可能在公认的原理基础上有任何作为。至于他的证明方法成效又如何呢？读者将会作出自己的判断。必须承认，他使用流数就象建筑中使用脚手架一样，一旦发现了与之成比例的有限线段，就立即将它们弃之一边。然而这些有限的元素却是借助于流数而获得的，不论你通过有限的元素和比例得到什么结果，它们都应被归功于流数，所以必须首先理解流数。那么什么是流数呢？消逝增量的速度。这些消逝的增量又是什么呢？它们既不是有限量，也不是无限小，又不是零，难道我们不能称它们为消逝量的鬼魂吗？

……

（李文林 译）

41. 达朗贝尔、欧拉、拉格朗日论微积分基础

18世纪数学家们为建立微积分的严格基础进行了重要的尝试。在英国，为了回答伯克莱的攻击，产生了许多为流数论辩护的著述，最著名的如马克劳林(C. Maclaurin)的《流数论》(1742)等。但所有这些辩护都因坚持几何论证而显得软弱无力。相比之下，欧洲大陆数学家提倡的代数途径则更有成效。这里介绍最有代表性的三种观点，包括达朗贝尔的极限思想、欧拉的不同阶"零"的分析(欧拉关于统一初等函数的论述也附录于此)以及拉格朗日的幂级数理论。19世纪的分析严格化，乃是上述不同方向融汇发展的结果。

41.1. 达朗贝尔论极限

达朗贝尔(Jean le Rond d'Alembert，1717～1783)生于巴黎，是圣让·勒隆教堂附近的一个弃婴，后成为法国科学院院士(1741)。达朗贝尔是18世纪法国启蒙运动的杰出代表之一，他与狄德罗(D. Diderot)共同编纂了著名的《科学，艺术和工艺百科全书》并负责撰写数学与自然科学条目。在《微分》(Differentiel)等条目中，达朗贝尔发展了牛顿的"首末比方法"，但用极限概念代替了牛顿含糊的"最初"与"最终"比。达朗贝尔的极限观点成为现代严格极限理论的先导。以下摘录"微分"条目的部分内容，原载《Encyclopedie ou dictionnaire raisonné des Sciences, des arts et des métiers》，4，Paris，1754。

微分

……在这里我们最关心的是微分演算的形而上学。

关于这种形而上学已有很多论述，它甚至比微分学法则本身更重要并且也许更难解释：许多数学家，其中包括拒不接受无限小量假设的洛尔①，对它采取了完全否定的态度，认为其基本原理是站不住脚的，并会导致谬误。然而所有通过普通几何获得的结果，也都能同样地并且更容易地借助微分学途径而建立，人们一定认为，既然这种演算产生可靠、简单和精确的方法，它所依赖的基本原理也必须是简单的和确定的。

莱布尼茨感到有人反对微分演算中出现的无限小量，他觉得十分为难，因此宁愿将无限小归结为不可比量。然而这可能会损害演算的几何精确性；伯纳德② 问道：是否微分学发明人的权威压倒了发明本身？其他学者如纽文蒂等则仅承认一阶微分而拒绝所有的高阶微分。实际上这是不行的。在一个圆中考虑一阶无限小弦，其相应的横坐标或正矢就是二阶无限小③；如果弦是二阶无限小，则所涉及的横坐标就是四阶无限小，等等。这很容易通过初等几何来证明，因为圆的直径（取作有限量）与弦之比总等于该弦与相应横坐标之比④。这样，如果我们允许一阶无限小，那么也必须允许所有其他各阶无限小，虽然如下面将要说明的那样，最终我们可以很容易地摆脱微分学中所有这些与无限有关的形而上学。

牛顿则从另外的原理出发；人们可以认为这位伟大数学家关于流数演算的形而上学是十分精密的和富有启发性的，虽然对于

---

① Michel Rolle(1652～1719)，法国科学院院士，1700年前后开始卷入关于微积分基本原理的争论。参阅 C. Boyer：The Concepts of the Calculus Hafner，1949，中译本《微积分概念史》，上海人民出版社，1977。

② Bernard le Bovier de Fontenelle (1657～1757)，法国数学家，在达朗贝尔之前任科学院秘书。

③ $\text{vers}\sin\alpha=1-\cos\alpha=\alpha^2/2!-\alpha^4/4!+\cdots$，(注意达朗贝尔的 $\text{vers}\alpha$ 相当于我们的 $R\text{vers}\alpha$)。

④ $2R:2R\sin\alpha/2=2R\sin\alpha/2:R(1-\cos\alpha)$。

他的思想我们只能有一种不完全的了解。

他从来没有把微分学看作是关于无限小量的研究，而是把它看作最初与最终比的方法，也就是说求比的极限的方法。因此这位著名的作者从来没有求过量的微分，而只是对方程进行微分；事实上每个方程都表示两个变量之间的一种关系，而对方程微分仅涉及求这方程所包含的两个变量的有限差分之比的极限。让我们举一个例子来说明这一点，这个例子将对微分方法给出最清楚的概念和最确切的描述。

设 AM 是一条普通的抛物线（图 1），其方程是 $yy=ax$，此处假设 $AP=x$，$PM=y$，a 为参数。过点 M 求作此抛物线的切线 MQ，假定问题已经解决。在距离 PM 有限远处作纵坐标线 pm；进而通过点 M，m 作直线 mMR. 显然，首先纵坐标 MP 与

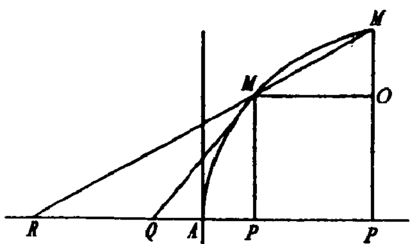


图 1

子切线 PQ 之比 $\frac{MP}{PQ}$ 大于比 $\frac{MP}{PR}$ 或与之相等的 $\frac{mO}{MO}$（因三角形 MOm，MPR 相似）；其次，点 m 越接近点 M，则点 R 就越接近点 Q，因此比 $\frac{MP}{PR}$ 或 $\frac{mO}{MO}$ 就越接近比 $\frac{MP}{PQ}$；最后，第一个比可以任意地逼近第二个比，因为 PR 与 PQ 之差可任意地小。这样，比 $\frac{MP}{PQ}$ 乃是 mO 与 OM 之比的极限。因此，如果我们能以代数形式表示比 $\frac{mO}{OM}$，那就能得到 MP 与 PQ 之比的代数表达式，最终也就能得到纵坐标与子切线之比的代数表达式，这将使我们能求出这条子切线。现在设 $MO=u$，$Om=z$；我们将有 $ax=yy$ 和 $ax+au=yy+2yz+zz$. 故由 $ax=yy$ 就可得 $au=2yz+zz$ 和 $\frac{z}{u}=a/(2y+z)$.

因此这个值 $a/(2y+z)$ 一般来说就等于 mO 与 OM 之比，而不管我们怎样选择点 m。这个比永远小于 $a/2y$，但 z 越小，这个比

就越大，并且因为 z 可以被选得任意地小，比 $a/(2y+z)$ 也就可以任意接近比 $\frac{a}{2y}$，结果 $\frac{a}{2y}$ 就是比 $a/(2y+z)$ 亦即比 $\frac{mO}{OM}$ 的极限。我们已经知道 $\frac{MP}{PQ}$ 也是 mO 与 OM 之比的极限，于是 $\frac{a}{2y}$ 与比 $\frac{MP}{PQ}$ 相等。这是因为两个量如果是同一量的极限，那么它们必相等。为了证明这一点，设 X 和 Z 是同一量 Y 的极限，则可断言 $X=Z$。实际上，如果它们相差 V，设 $X=Z\pm V$。根据假定，量 Y 可任意逼近 X，这就是说，Y 与 X 之间的差可任意小，但因 Z 与 X 相差量 V，结果 Y 就不可能逼近 Z 而使得差量比 V 还要小，因此 Z 不可能是 Y 的极限，这是与假设相矛盾的。

由此我们得到 $\frac{MP}{PQ}$ 等于 $\frac{a}{2y}$，因此 $PQ=\frac{2yy}{a}=2x$，现在，根据微分演算法，MP 与 PQ 之比等于 dy 与 dx 之比。同时由方程 $ax=yy$ 可得 $adx=2ydy$ 及 $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}$，因此 $\frac{dy}{dx}$ 为 z 与 u 之比的极限，此极限是通过在分式 $a/(2y+z)$ 中令 $z=O$ 而求出。

然而人们也许会问：在分式 $\frac{z}{u}=a/(2y+z)$ 中令 $z=0$ 和 $u=0$ 是否必要？这样做将导致 $\frac{0}{0}=\frac{a}{2y}$，这表示什么意思？我的回答如下。首先，并不存在任何荒谬之处。$\frac{0}{0}$ 确实可以等于我们所希望的任何量，因此它也可以 $=\frac{a}{2y}$；其次，虽然 z 与 u 之比的极限是在 $z=0$ 和 $u=0$ 的情况下求出，但这个极限实际上并不是 $z=0$ 与 $u=0$ 之比，因为后者的定义尚不清楚，我们不知道两个都等于零的量的比是什么。如果我们假设 z 和 u 都取实值并且递减，那么这个极限乃是比 $\frac{z}{u}$ 所任意趋近的量，这一点是再明白不过了。我们还可以将这一思想应用于其它无限多种情形。

遵照微分法（伟大的数学家牛顿关于曲线求积的论文就是由此开始），代替方程 $ax+au=yy+2yz+zz$，我们可以写成 $ax+a0$

$=yy+2y0+00$.这样，如果考虑 z 和 u 等于零，就会得到 $\frac{0}{0}=\frac{a}{2y}$，我们上面的论述指出了这种记法既有优点，也有麻烦。优点是当 $z=0$ 时它将从比 $\frac{a}{(2y+0)}$ 中消失而毋需作任何其他假设；麻烦之处在于，比 $\frac{0}{0}$ 的两个项被认为都等于零，这决不是一种一目了然的思想。

从以上所说我们看到，微分学方法给出的比与用前述计算所得的结果完全相同。对于其他更复杂的例子情形也一样。这就足以使初学者得以理解微分学形而上学的真谛。一旦有了充分理解，人们就将感到关于无限小量所作的假设只不过是起着精简推理的作用，而微分演算并不必然要假定这些量的存在；进而言之，这种演算仅仅在于从代数上确定我们已通过线段来表达的比的极限，并使这两种表达式相等。这将使我们能获得我们所要寻求的线段。这也许是关于微分学的最精确、最简洁的定义，但它只能被那些已经相当熟悉这种演算的人所理解，因为一般说来，只有对一门科学研究有素的人才能真正理解这门科学的本质。

在上述例子中，已知的 z 与 u 之比的几何极限是纵坐标与子切线之比；在微分学中，我们寻求 z 与 u 之比的代数极限并得到 $\frac{a}{2y}$，然后，称 s 为子切线，则有 $\frac{y}{s}=\frac{a}{2y}$，因此 $s=\frac{2yy}{a}=2x$. 这个例子使我们得以理解其他的问题。所以只要精通上述关于抛物线切线的例子就够了。由于整个微分学都可被归结为切线问题，因此我们总可以将上述原理应用于微分学的各类问题，如求极大值与极小值，拐点，尖点，等等。

求极大或极小值究竟是什么意思呢？一般认为就是令差分[①] dy 等于零或无限；但更确切地说，则是求表示有限的 dy 与有限的 dx 之比的极限量 $\frac{dy}{dx}$，并使该量等于零或无限。用这种说法一切神

---

① 达朗贝尔在这里对微分与差分作了区别。

秘之点都可冰释。并不是要使 dy= 无限，那样做是荒谬的，因为 dy 被看成无限小量从而不可能是无限。取无限的是 $\frac{dy}{dx}$，也就是说，我们寻求这样的 x 值，使得有限 dy 与有限 dx 之比的极限为无限。

通过以上论述我们已经看到，在微分学中其实并不存在一阶无限小量；那些被称为 u 的量实际上要被另一个假设为无限小的量除。在这种情形，它们既不表示无限小量，也不表示无限小量的商；它们乃是两个有限量之比的极限。对于二阶或更高阶差分情况也一样。在几何中实际上并没有 ddy 这样的量；无论何时，一个方程中如果出现有 ddy，它都要被量 dx^2 或其它同阶的量除。那么 ddy/dx^2 究竟是什么？它是 ddy/dx 被 dx 除所得之比的极限；或者更确切地说，它是 $\frac{dz}{dx}$ 的极限，这里 $\frac{dy}{dx}=z$ 是一个有限量。

41.2 (a). 欧拉论无限小为零

18 世纪分析学的奠基在很大程度上归功于欧拉(Leonard Euler，1707～1783)，欧拉因此被誉为“分析的化身”。欧拉的三部著作——《无限小分析引论》(Introductio in Analysin infinitorum，1748)、《微分学》(Institutiones Calculi differentialis，1755)和《积分学》(Institutiones Calculi integralis，1768～1770)，是 18 世纪分析的标准课本。在《微分学》中，欧拉给出了关于无限小的不同阶零的理论。这一理论虽然在很长时期内未被数学家们理解，但欧拉提倡的形式化方法则为微积分基础的纯粹算术与代数的论证开辟了道路。以下摘录《微分学》中的有关部分(Opera Omnia，Ser I. vol. 10)。

83. 然而，如果我们能够说清什么是数学家们所谓的无限小，那么这种无限的学说就能获得更好的理解。毫无疑问，任何一个量都可以不断减小，直到它完全消失，化为乌有。但一个无限小量无非是一个消失的量，因此事实上将 =0。无限小的这一定义，是与它的另一种定义即比任意给定量还要小的量相符的。实际上，如果一

个量如此小以致比任一给定量都要小，那么它当然不可能是任何其他量而只能为零；因为如果它不＝0，那就必定能指出一个与它相等的量来，这是与假设矛盾的。对于那些质问何为数学中的无限小量的人，我们的回答是：它事实上＝0，所以在这一概念中并不像通常认为的那样隐藏着这么大的神秘性，这些假想的神秘已使无限小演算遭受许多人的怀疑。下面我们就来解释这种无限小演算，并将彻底消除那些余留的疑点。

84. 为了说明无限小量确实为零，我们首先需要排除以下异议：为什么不用同样的0号而用特殊的记号来表示无限小量？因为所有的零都相等，似乎没有必要用不同的记号来区分它们。确实，任何两个零在这样的意义上相等，即它们之差为零，然而却有两种比较方法，一种是算术的，另一种是几何的，所以让我们来看一看它们之间的区别（根据被比较量的来源）：任意两个零的算术比相等，但几何比却并非如比。这一点最好是通过几何比例 $2:1=0:0$ 来理解，其中第四项及第三项都＝0，按照比例性质，如果第一项是第二项的二倍，那么第三项也将是第四项的二倍。

85. 但这一点在普通算术中也很清楚。众所周知，零被任何数乘都得零，$n\cdot 0=0$ 以及 $n:1=0:0$。因此，两个量，不论它们的几何比是什么，从算术观点看却有可能始终相等。所以，既然两个零可以有任何比率，我认为就应当用不同的记号表示，当我们必须考虑不同的零的几何比时尤其如此。于是无限小演算只不过是不同无限小量的几何比的研究，我们必须使用不同的记号来表示这些无限小量，否则这种研究将会陷入极大的混乱。除此之外不可能有任何其他有效的方法。

86. 因此，当我们在无限小演算中引进一种符号表示，其中以 dx 记无限小量，则有 $dx=0$ 和 $adx=0$（a 是任意有限量）。尽管如此，几何比 $adx:dx$ 将是有限量，即 $a:1$，这就是为什么我们在研究两个无限小量 dx 和 adx（虽然它们都＝0）之比时，不能将它们相互混同的原因。类似地，当出现两个不同的无限小量 dx 和 dy 时，它们的比也是不定的，虽然其中每一个都＝0。为了研究这样的

两个无限小量的比，我们需要借助微分学的全部威力。这种比较的用处，虽然初看并不明显，但必将倍受重视并大放光彩。

87. 既然无限小确实为零，那么十分清楚：当一个有限量加上或减去一个无限小量时，它既不增大也不减小。设 a 是一有限量，dx 是无限小量，则 $a+dx$，$a-dx$ 和一般地 $a+ndx$ 都 $=a$，于是不论我们考虑的是 $a\pm ndx$ 与 a 之间的算术关系还是几何关系，在两种情形我们都得到相等的量。事实上，等量的算术比是显然的，因为若 $ndx=0$，我们有

$$a\pm ndx-a=0.$$

这就清楚地给出了等量的几何比，即

$$\frac{a\pm ndx}{a}=1$$

由此可以得出一条多数人能接受的法则，这就是：**与有限量相比，无限小量成为零，因此相对于有限量而言可忽略不计。**

这样，认为无限小分析缺乏严格性的反对意见就会不攻自破，因为被忽略的不是别的量，而是地道的零。因此我们有充分的权利断言：在这门崇高的科学中，我们完全能够保持最高度的数学严格性，就像我们在古代著作中所看到的那样。

88. 因为无限小量 dx 确实 $=0$，它的平方 dx^2，立方 dx^3 及其他任何正数次幂也将 $=0$，并且与有限量相比它们都一样将成为零。同时，一个无限小量 dx^2 与 dx 相比也将成为零，因为 $dx+dx^2$ 与 dx 之比是等量比，不管这种比较是以算术的还是几何的方式进行。前一种比较无可非议，至于几何比较，我们得到

$$(dx\pm dx^2):dx=\frac{dx\pm dx^2}{dx}=1\pm dx=1$$

同样我们将得到 $dx\pm dx^3=dx$ 和一般地 $dx\pm dx^{n+1}=dx$，只要 n 大于零，几何比则为

$$(dx\pm dx^{n+1}):dx=1\pm dx^n$$

由于 $dx^n=0$，这个比应是等量比。因此，像通常的幂一样，我们称 dx 为一阶无限小，dx^2 为二阶无限小，dx^3 为三阶无限小，等等。那

么，显然高阶无限小相对一阶无限小而言将成为零。

41.2(b). 欧拉论初等函数的统一

在数学史上，欧拉首先把函数放到了微积分的中心地位。他在《无限小分析引论》中明确宣称"数学分析是关于函数的科学"，并对函数概念作了前所未有的深入考察，获得了许多对分析的严格发展有重要意义的结果。作为示例，我们选录《无限小分析引论》第 8 章的一部分(Introductio in Analysin infinitorum, I. Lausanne, 1748, Chap. 8, = Opera omnia[I]vol. 8, pp. 103～152.)欧拉在这里揭示了指数函数、对数函数与三角函数的联系，给出了数学中初等函数的统一理论。

126. 在对数与指数量之后，我们将研究圆弧及其正弦和余弦，这不仅是因为它们构成了另一类超越量，而且也因为在引进虚数以后，它们恰好可以通过这些对数与指数量来得到。

因此让我们取圆的半径[①] =1，那么这个圆的周长显然不可能精确地用有理数来表示，但已经发现其半周长近似 = 3.141592653589793……[②]，为简化起见，我将用 π 来表示这个数[③]，这样 π 就是半径 = 1 的圆的半周长，或者说是 180 度弧的弧长。

127. 如果我们用 z 来表示圆上的任意一段弧，圆的半径总可

---

① 欧拉在这里使用了旧时表示圆半径的术语 sinus totus，这是他最后一次沿用这一旧术语。他在《引论》中定义三角函数为对应的函数线与圆半径的比，并令半径为 1，而以往一直是以线段长作为三角函数的定义。

② 此处写出了 127 位十进小数。欧拉采用的这个 π 近似值引自法国数学家 T. G, de Lagny : Mémoire sur la quadrature du cercle, Histoire de l'Académie Royale, Paris, 1719, 1ᵉ partie. pp, 176～189.

③ π 作为圆周率记号最先由英国数学家 W. Jones 创用(W. Jones: Synopsis palmariorum matheseos, London, 1706). 欧拉在其著作《力学》(1736)及《无限小分析引论》(1748)中系统采用了 π 记号并使其广泛传世。

以假设为1.通常我们主要是考虑该弧的正弦和余弦，今后我们将用 $\sin A.z$ 这样的方式来表示弧 z 的正弦，或径记作 $\sin z$，相应地用 $\cos A.z$ 表示弧 z 的余弦，或径记作 $\cos z$，因为 π 是180°弧，所以我们将得到 $\sin 0=0$，$\cos 0=1$，和 $\sin\frac{1}{2}\pi=1$，$\cos\frac{1}{2}\pi=0$.

……

132. 因为 $(\sin z)^2+(\cos z)^2=1$，通过因式分解我们将得到 $(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)\times(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)=1$①，其因式虽然是虚量，但在正弦与余弦的组合与相乘中却有很大用处。例如让我们求如下的因式积

$$(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$$

我们得到

$$\cos y\cos z-\sin y\sin z+\sqrt{-1}(\cos y\sin z+\sin y\cos z)$$

但因 $$\cos y\cos z-\sin y\sin z=\cos(y+z)$$

和 $$\cos y\sin z+\sin y\cos z=\sin(y+z)$$

我们求得积

$$(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)$$
$$=\cos(y+z)+\sqrt{-1}\sin(y+z)$$

类似地

$$(\cos y-\sqrt{-1}\sin y)(\cos y-\sqrt{-1}\sin z)$$
$$=\cos(y+z)-\sqrt{-1}\sin(y+z)$$

同样有

$$(\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x)(\cos y\pm\sqrt{-1}\sin y)(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)$$
$$=\cos(x+y+z)\pm\sqrt{-1}\sin(x+y+z)$$

133. 于是得到

---

① 欧拉在《引论》中尚未引入虚数记号 i，记号 i 表示 $\sqrt{-1}$ 第一次出现在欧拉1777年向彼得堡科学院递交的报告 De formulis differentialibus 中，1794年欧拉去世后才正式发表，见 Opera omnia，[I]Vol. 19，pp. 130.

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$$

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1}\sin 3z$$

一般有 $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$①

从这些式子出发,考虑到其中的双重符号,可以推出

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

和 $$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

如将其中的二项式展开为级数,我们将得到

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \text{etc}$$

和 $$\sin nz = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \text{etc}$$

134. 设弧 z 为无限小;那么我们就得到 $\sin z = z$ 和 $\cos z = 1$;现在设 n 为一无限大数,而弧 nz 却具有有限的大小。

令 $nz = v$,则因 $\sin z = z = \frac{v}{n}$,我们将有

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots + \text{etc}$$

和 $$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots + \text{etc}$$

……

138. 现在让我们在§133 中的公式中设弧 z 为无限小,同时设 n 是一无限大数 i②,使得 iz 取有限值 v,于是我们有 $iz = v$ 和 z

---

① 这就是所谓"德·莫阿弗公式"。德·莫阿弗(Abraham de Moivre,1667～1754)在 1707～1730 年间曾逐步获得了相当于这一公式的结果(A. de Moivre:Miscellanea Analytica,London,1730),但他仅隐含地写出这一公式。欧拉在这里首次明确陈述了这一公式,后又将其中的 n 推广为任意实数(1749)。

② 注意欧拉在这里用 infinitus 的第一个字母 i 表示一个无限大量,1777 年以后,他改用 i 表示 $\sqrt{-1}$(见前注)。

$=\frac{v}{i}$，因此 $\sin z=\frac{v}{i}$ 和 $\cos z=1$。将这些值代入后我们得到

$$\cos v=\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}+\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2}$$

$$\sin v=\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}-\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2\sqrt{-1}}$$

在前一章中我们已得到

$$(1+\frac{z}{i})^{i}=e^{z}$$

这里 e 表示双曲对数的底；因此如果我们首先将 z 取作 iv，然后取作 $-iv$，就会得到

$$\cos v=\frac{e^{\sqrt{-1}v}+e^{-\sqrt{-1}v}}{2}$$

和

$$\sin v=\frac{e^{\sqrt{-1}v}-e^{-\sqrt{-1}v}}{2\sqrt{-1}}$$

从这些公式我们可以看到怎样能把虚指数量化为实弧的正弦和余弦。事实上我们有

$$e^{\sqrt{-1}v}=\cos v+\sqrt{-1}\sin v$$

$$e^{-\sqrt{-1}v}=\cos v-\sqrt{-1}\sin v$$

41.3. 拉格朗日论幂级数途径

拉格朗日 1797 年出版的《解析函数论》(Theorie des functions analytiques)，试图将微积分归结为纯粹的“代数分析艺术”，其中特别强调了幂级数对微积分基础的重要性。他不仅假定了任一函数 $f(x)$ 都可表成幂级数，而且将 $f(x)$ 的导数形式上定义为幂级数展开中的系数(“导数”这一名词及记号 $f'(x)$ 也是拉格朗日首先创用)。拉格朗日的观点，对于使分析摆脱几何的束缚有重要影响。以下摘录《解析函数论》的有关内容，译自 La-

grange: Oeuvres, X. pp. 13～19, Gauthier-Villars, Paris, 1884

现在让我们来考虑具有一个变元 x 的函数 $f(x)$。如果我们用 $x+i$ 代替 x，i 是一个任意的量，那么它将变为 $f(x+i)$，同时根据级数论，我们可以将它展成具有如下形式的级数：

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots$$

其中量 $p,q,r,\cdots$，即 i 的幂的系数，将是 x 的新的函数，它们可以从 x 的原来的函数导出，并独立于量 i。

然而为了证明我们的论断，需要考察当以 $x+i$ 代替 x 时表示函数 $f(x)$ 展开的级数的具体形式，这里只涉及 i 的正整数次幂。

对于已知的各种函数来说，这一假定确实是成立的，但据我所知，没有任何人曾试图事先给以证明，而这在我看来似乎非常必要，因为存在着特殊情形，其中这一假定不成立。另外，微分学肯定需要用到这一假定，而那些例外情形恰好成为引起人们对微积分发生争议的地方。

首先我将证明，在函数 $f(x+i)$ 展开而得的级数中，除特殊的 x 值之外，不会出现 i 的分数次幂。

……

我们已经看到，$f(x+i)$ 的展开产生出其他各个函数 p,q,r，……，它们都是从原来的函数 $f(x)$ 推导而得，同时我们已对特殊情形给出了这些函数的求法。但是为了建立与这类函数有关的理论，我们还必须寻找它们的一般推导规律。

为此让我们再次取一般公式 $f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\cdots$，并假设未知量 x 被 $x+o$ 所代替，o 是独立于 i 的任意量。这时 $f(x+i)$ 将变为 $f(x+i+o)$。十分清楚，如果在 $f(x+i)$ 中直接以 $i+o$ 代替 i，我们将得到同样结果。在 $f(x)$ 的展开式中无论是以 $i+o$ 代替 i 还是以 $x+o$ 代替 x，所得结果也应该是相同的。

第一种代换产生

$$f(x)+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+\cdots$$

或将 $i+o$ 的幂展开，并且为简化起见只写出每个展开的头两项(因为就我们的目的而言，只比较这些项就够了)，我们得到：

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\cdots+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\cdots$$

为了进行其他的代换，请注意当分别在函数 $f(x)$，p，q，r，…中以 $x+o$ 代替 x 时，我们将得到

$f(x)+f'(x)o+\cdots$，$p+p'o+\cdots$，$q+q'o+\cdots$，$r+r'o+\cdots$ 等等，这里我们在展开式中仅保留含有 o 的一次幂的那些项。显然，上述同一展式将变为

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\cdots+f'(x)o+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\cdots。$$

因为无论 i 和 o 取什么值，这两个结果都必须相等，比较与 o，io，i^2o，…有关的项就将得到：

$$p=f'(x),\ 2q=p',\ 3r=q',\ 4s=r',\cdots$$

现在显然，像 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的一次导函数一样，p' 是 p 的一次导函数，q' 是 q 的一次导函数，r' 是 r 的一次导函数，依此类推。因此，如果为了更加简明一致，我们以 $f'(x)$ 记 $f(x)$ 的一次导函数，以 $f''(x)$ 记 $f'(x)$ 的一次导函数，等等，那么我们就有

$$p=f'(x),\qquad \text{从而 } p'=f''(x);$$

因此

$$q=\frac{p'}{2}=\frac{f''(x)}{2},\qquad \text{从而 } q'=\frac{f'''(x)}{2}$$

因此

$$r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''(x)}{2\cdot 3},\qquad \text{从而 } r'=\frac{f^{\text{iv}}(x)}{2\cdot 3}$$

因此

$$s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{\text{iv}}(x)}{2\cdot 3\cdot 4},\qquad \text{从而 } s'=\frac{f^{\text{v}}(x)}{2\cdot 3\cdot 4}$$

如此等等。

于是，将这些值代入函数 $f(x+i)$ 的展开式，我们得到

$$f(x+i)=f(x)+f'(x)i+\frac{f''(x)}{2}i^2+\frac{f'''(x)}{2\cdot 3}i^3+\frac{f^{\text{iv}}(x)}{2\cdot 3\cdot 4}i^4+\cdots$$

这一新的表达式有这样的好处，它表明了级数中各项是怎样相互

依赖的，尤其是表明了怎样形成级数中包含的所有导函数，只要知道怎样形成原来函数的一次导函数就行。

我们将称函数 $f(x)$ 为由它导出的函数 $f'(x)$，$f''(x)$，…的**原函数**(primitive function)；被导出的这些函数则称为前者的**导函数**(derived function)。我们进而称一次导函数为**第一函数**，二次导函数为**第二函数**，三次导函数为**第三函数**，等等。同样地，若设 y 是 x 的函数，我们分别用 y'，y''，y'''，…表示其导函数，使当 y 作为原函数时，y' 就是其第一函数，y'' 是其第二函数，y''' 是其第三函数，等等。

因此，若用 $x+i$ 代替 x，则 y 将变为

$$y+y'i+\frac{y''i^2}{2}+\frac{y'''i^3}{2\cdot 3}+\cdots$$

这样，如果我们已经有了计算任意原函数的第一函数的方法，那么只要重复同样的运算，就能得到所有的导函数，从而也就能得到原函数展成的级数的所有各项。

最后，只需要具备少量微分学知识就能明白，y 的导函数 y'，y''，y'''，…分别与表达式

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\cdots$$

相一致。

……[①]

（李文林 译）

① 拉格朗日接着用具体例子来说明函数及其导函数的概念。

42. 达朗贝尔：论弦振动方程

18世纪数学家们一方面努力探索微积分严格化的途径，一方面又往往不顾基础问题的困难而大胆前进，大大扩展了微积分应用的范围，同时开拓出一系列新的数学分支诸如偏微分方程、常微分方程、变分法等等。这些新的分支与微积分本身一起，形成了被称之为“分析”的广大领域。

偏微分方程论就是起源于微积分对弦的振动问题的应用。一般将达朗贝尔1747年发表的论文《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》(Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, Histoire de l'Académie Royale, Berlin, 3. 1747. pp. 214～219)看成为偏微分方程论的发端。虽然在达朗贝尔之前，泰勒和约翰·伯努利等人也曾对弦振动进行过数学描述，但他们均未采用偏导数概念。达朗贝尔在上述论文中则首次明确导出了偏微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$及其解，并讨论了初始条件。以下摘译该文的部分内容。

Ⅰ. 在本文中我提议证明存在无限多种与“延伸摆线”(elongated cycloid)[①] 不同的曲线，满足所考虑的问题。我将始终假设：

1. 弦的偏移或振动非常小，以致总可以合理地将所形成的曲线弧AM(图1)与相应的横坐标AP看成相等；



图1

2. 整根弦粗细是均匀的；

3. 张力F与弦的重量之比为常数

① 指正弦曲线。

$m \cdot l$，由此若 p 为重量，l 为曲线长，则可假定 $F=pml$；

4. 若称 AP 或 AM 为 s，称 PM 为 y，并视 ds 为常数，则在 M 点沿 MP 方向的加速度力当曲线凹向 AC 时为 $-F(ddy/ds^2)$，当曲线凸时为 $F(ddy/ds^2)$。请参阅泰勒的《增量方法》。

Ⅱ. 这样，让我们设想 Mm，mn（图 2）是曲线在任一瞬时的两段相邻弧，并设 $Pp=p\pi$，即 ds 为常数。设 t 为从初始一瞬起振动经历的时间，纵坐标 PM 只能通过时间 t 和横坐标或相应的弧 s 或 AP 的函数① 来表示。因此设 $PM=\varphi(t,s)$，亦即设它等于 t 和 s 的未知函数。我们将记 $d[\varphi(t,s)]=pdt+qds$，p 和 q 也是 t 与 s 的函数。根据欧拉先生的一条定理(mem. de Pétersbourg，7，p. 177)，p 的微分中 ds 的系数显然应等于 q 的微分中 dt 的系数②。因此，如果 $dp=\alpha dt+\nu ds$，那么 $dq=\nu dt+\beta ds$，α，ν，β 亦为 t 和 s 的未知函数。

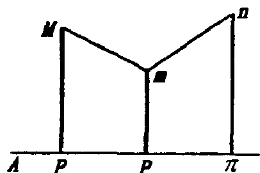


图 2

Ⅲ. 因 Mm，mn 属于同一曲线，由上述可知，仅有 s 变化时 $pm-PM$ 将等于 $\varphi(t,s)$的微分，因此 $pm-PM=qds=ds \cdot q$，并且我们在前面用 ddy 表示的量，即 PM 仅有 s 变化时所取的二阶微分将等于 $ds \cdot \beta ds$，因此 $F(ddy/ds^2)=F\beta$。

Ⅳ. 现在让我们设想点 M，m，n 移至 M'，m'，n'（图 3），PM'超过 PM 的部分显然将等于 $\varphi(t,s)$仅有 t 变化时所取的微分，也就是说 $PM'-PM=pdt=dt \cdot p$；并且 pM 仅有 t 变化时所取的二阶微分，即 MM'的微分（或相当于点 M 在加速度力作用下通过的距离），将等于 αdt.

Ⅴ. 这样，设 a 是在重力 p 作用下物体在定常时间 θ 内通过

① 达朗贝尔当时将函数看作是由代数和微积分步骤构成的解析表达式，但正是他的关于弦振动的论文，引起了什么是函数的争论。

② 这里是指定理：当 $F=F(x,y)$，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$. 欧拉在 De infinitis curvis eiusdem generis 一文中独立地证明了这条已被莱布尼茨等人获得的定理，欧拉的文章发表在 Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 7，1740。

的路程，那么显然有（牛顿：Princ. Math.）①

$$\alpha dt^2 : 2a = F\beta dt^2 : p\theta^2$$

因此

$$\alpha = \frac{2aF\beta}{p\theta^2} = \frac{2apml\beta}{p\theta^2} = \beta\frac{2aml}{\theta^2}②.$$

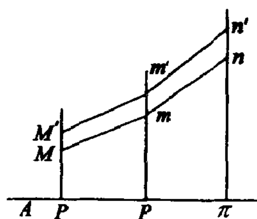


图 3

Ⅵ．首先指出，我们可以用任意大小的定长线段来表示已知时间 θ：只需注意取线段 t（表示可变的、不定的时间间隔）使它与表示 θ 的线段之比等于可变时间间隔与已知定常时间（在此时间内受重物体通过路程 a）之比即可。因此我们可以设 $\theta^2 = 2mal$，使在此情形下有 $\alpha = \beta$. 由于 $dp = \alpha dt + \nu ds$，从而 dq 或 $\nu dt + \beta ds$ 必定 $= \nu dt + \alpha ds$③.

Ⅶ．为了利用这些条件来确定量 α 和 ν，我们注意：因 $dp = \alpha dt + \nu ds$ 和 $dq = \nu dt + \alpha ds$，故应有 $dp + dq = (\alpha + \nu) \cdot (dt + ds)$ 和 $dp - dq = (\alpha - \nu) \cdot (dt - ds)$。

由此可得：

①$\alpha + \nu$ 是 $t + s$ 的函数，$\alpha - \nu$ 则是 $t - s$ 的函数；

②因此我们将有 $p = \frac{\varphi(t+s) + \Delta(t-s)}{2}$ 或简单地有 $\varphi(t+s) + \Delta(t-s)$ 和 $q = \varphi(t+s) - \Delta(t-s)$. 由此可得（因 $d\varphi = pdt + qds$）$PM = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)$，这里 $\Psi(t+s)$ 和 $\Gamma(t-s)$ 分别表示 $t+s$ 和 $t-s$ 的未知函数。

从而曲线的一般方程为

$$y = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)。$$

Ⅷ．容易看出，这个方程包括了无限多条曲线。为了说明这一

① 见 Newton：Principia Mathematica，I，Sec. X，prop. LII.

② 用现代的符号即：$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dt^2 : 2a = T \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} : \theta^2 g$

或 $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{2aml}{\theta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

③ 这里是说，通过适当选择时间单位，可使 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$。

点，我们只要在此考虑一个特殊情形，即当 $t=0$ 时 $y=0$ 的情形……①。

在达朗贝尔上述论文发表后不久，欧拉也发表了《论弦的振动》（见 Nova Acta Erud. pp. 512～527，1749）。欧拉沿用达朗贝尔的方法，但允许初始函数为他所说的“不连续曲线”（相当于今天导数有间断的连续函数）。大约同一时期，丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli，1700～1782）亦发表了自己关于弦振动问题的研究论文（1753），他采取了与达朗贝尔和欧拉不同的途径，并断言所有可能的初始函数都可表成 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$ 的形式。这立即遭到欧拉和达朗贝尔的反对，他们围绕用三角级数表示任意函数这一重要问题展开了激烈争论，这场争论牵涉了许多数学家，一直延续到19世纪初，傅里叶级数的工作出现（参阅本书[81]）后才平息，对于函数概念及整个分析的严格化产生了深远影响。

（李文林 译）

① 达朗贝尔接下在边界条件（$s=0, y=0; s=l, y=0$）及适当初始条件下论证了解的周期性与奇性。他要求初始函数 $y(0,s)=f(s)$ 二次可微，并在论文结尾部分指出初始速度（$\frac{\partial y}{\partial t}$）须是偶函数。

43. 欧拉:论常微分方程

43.1. 关于二阶常微分方程的降阶

常微分方程论是伴随微积分而发展起来的分析分支。牛顿与莱布尼茨在他们的著作中都处理过与常微分方程有关的问题,但使常微分方程求解成为独立研究课题的先驱是伯努利兄弟和欧拉。欧拉在21岁时发表的一篇题为《将二阶微分方程化为一阶微分方程的新方法》(Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi qradus, Comm. Acad. Sci. Petropoli, Ⅲ.1728, pp. 124～137),标志了二阶方程系统研究的开始,其中引进的指数函数代换,在后来高阶方程的求解中起着特别重要的作用。以下摘录该文的主要部分,转译自D. E. Smith: A Source Book in Math. pp. 638～643.

1. 当分析学家们遇到二阶或任意高阶微分方程时,他们往往求助于两种求解方法。第一种方法是考察这些方程是否容易被积分?如果是,那他们就达到了目的。但如果这些方程根本不可能被积分或至少积分起来十分困难,他们就会力图将这些方程化成一阶微分方程,而这些一阶方程当然比较容易判断能否求解。迄今为止,除了一阶方程以外,还没有其他的微分方程可以用已知的[一般]方法来求解,……。

3. 然而,如果在一个微-微分(differentio-differential)方程[①]中,一个或另一个不定量(即变量)没有出现,那就很容易把它化为简单的微分式,为此只需将一个新变量与另一个微分相乘并用乘

① 即二阶微分方程。

积表达式去代替那个缺少的量的微分……。例如方程 $Pdy^n = Qdx^n + dv^{n-2}ddv$，其中 P 和 Q 表示 y 的任意函数，dy 被取作常量。因为 v 在方程中不出现，令 $dv = zdy$，则 $ddv = dzdy$。将这些关系式代入后得到方程 $Pdy^n = Qz^n dy^n + z^{n-2} dy^{n-1} dz$，除以 dy^{n-1}，得到方程 $Pdy = Qz^n dy + z^{n-2} dz$；这是一个简单微分式。

4. 据我所知，迄今为止还没有人能用别的方法将其他微-微分方程化为一阶微分式，也许容易直接积分的情形例外。这里我提出一种方法，通过这种方法虽然不是所有的但却肯定有无数的微-微分方程可以被化为更简单的微分式，而不论每个变量以何种方式影响方程。这样，我便转向那样一些化约过程，即借助于某种代换而将微分方程变为在其中缺少一个变量的形式。经过这样处理的方程，再利用前节所述的方法就可以最终被化为一阶微分方程。

5. 为此我来考察指数量(或者说其指数是变量而被自乘量[①]保持不变的乘幂)的下列性质：当这些量被反复微分时，变量本身受到约束，以致它总只出现在指数中，而微分是由积分本身[②]与指数的微分之积构成。c^x 就是这样的量，这里 c 表示对数为 1 的数[③]；c^x 的微分是 $c^x dx$，微-微分是 $c^x(ddx + dx^2)$，这里 x 只出现在指数中。考虑了这些情况，我注意到如果在一个微-微分方程中变量用指数量来代换，那么这些变量将只在指数中出现，有鉴于此，若用这些量去代换一个变量，它们在经过代换后必定变得可以用除法被消去。因此，用这种方法将能消去一个或另一个变量而只留下其微分。

6. 这一过程并不是在所有情形下都适用。但我已发现对三种类型的二阶微分方程它是行之有效的，其中第一类包括了所有那

---

① 即底数。

② 即被微分的量。

③ 即自然对数的底 2.718…，欧拉不久改用 e 代替了 c。字母 e 作为自然对数的底，最早出现在欧拉的论文《关于最近所做火炮发射试验的思考》(Meditatio in experimenta explosione termentorum nuper instituta，1727～1728)中，该文在欧拉去世后才正式发表(1862)，但此前欧拉已在《力学》(1736)一书中首次公布了这一后来通用的记号。

些仅有两项的方程，……。

7. 所有第一类方程具有如下的一般形式：$ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} \cdot ddy$，这里 dx 被看作常量……。为了化约这个方程，我取 $x = c^{\alpha v}$，$y = c^v t$，于是有 $dx = \alpha c^{\alpha v} dv$，$dy = c^v(dt + tdv)$。由此可得

$$ddx = \alpha c^{\alpha v}(ddv + \alpha dv^2), ddy = c^v(ddt + 2dtdv + tddv + tdv^2)$$

但因 dx 被看作常数，故 $ddx = 0$，以及 $ddv = -\alpha dv^2$。以此代替 ddv，得 $ddy = c^v[ddt + 2dtdv + (1-\alpha)tdv^2]$。用这些值去代换已知方程中的 x 和 y，方程将变为：

$$ac^{\alpha v(m+p)}\alpha^p dv^p = c^{(n+p-1)v}t^n(dt + tdv)^{p-2}[ddt + 2dtdv + (1-\alpha)tdv^2]$$

8. 现在 α 应当这样来确定，使得指数量可以通过除法而被消去。为此须有 $\alpha v(m+p) = (n+p-1)v$，从而可推得 $\alpha = \frac{n+p-1}{m+p}$。$\alpha$ 被确定后，上述方程就可被变换成：

$$a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p dv^p = t^n(dt + tdv)^{p-2} \cdot \left(ddt + 2dtdv + \frac{m-n+1}{m+p}tdv^2\right)$$

这可从已知方程直接导出，只要设 $x = c^{(n+p-1)v:(m+p)}$ 和 $y = c^v t$. 但 $n+p-1$ 是由 y 决定的次数，$m+p$ 则是由 x 决定的次数，所以对任何特殊情形都容易找出 α 并将其代入结果。在已导出的方程中，因为 v 不出现，设 $dv = zdt$，则 $ddv = zddt + dzdt$，但

$$ddv = -\alpha dv^2 = \frac{1-n-p}{m+p}z^2 dt^2$$

由此可得 $ddt = \frac{-zdt}{z} + \frac{1-n-p}{m+p}zdt^2$. 代入方程后得出

$$a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^p dt^p = t^n(dt + tzdt)^{p-2} \cdot \left(\frac{1-n-p}{m+p}zdt^2 - \frac{dzdt}{z} + 2zdt^2 + \frac{m-n+1}{m+p}tzzdt^2\right)$$

两边除以 dt^{p-1} 给出

$$a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^p dt = t^n(1+tz)^{p-2} \cdot \left(\frac{1+2m-n+p}{m+p}zdt\right.$$

$$-\frac{dz}{dt}+\frac{m-n+1}{m+p}tz^3dt-dz)$$

9. 在所得方程两边乘以 z，原先的一般方程 $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} \cdot ddy$ 于是就被化成以下的一阶微分方程：

$$a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^{p+1}dt = t^n(1+tz)^{p-2}\left(\frac{1+2m-n+p}{m+p}z^2dt\right.$$
$$\left.+\frac{m-n+1}{m+p}tz^3dt-dz\right)$$

这方程也可从已知方程一步得出，只要将第一个代换中的 v 改为 $\int zdt$. 因此我们应取 $x=c^{(n+p-1)\int zdt:(m+p)}$，同时用 $c^{\int zdt}t$ 代替 y；或取 $x=c^{(n+p-1)\int zdt}$和 $y=c^{(m+p)\int zdt}$也一样……。

10. 我们将用一些特例来说明前面在一般情形下获得的结果。设 $xdxdy=yddy$. 与一般方程相对照我们有 $a=1, m=1, p=1, n=1$，将它们代入上述一阶微分方程，已知方程就被化为

$$\frac{1}{2}z^2dt = t(1+tz)^{-1}\left(\frac{3}{2}z^2dt+\frac{1}{2}tz^3dt-dz\right)$$

亦即

$$z^2dt+tz^3dt = 3tz^2dt+t^2z^3dt-2tdz$$

已知方程 $xdxdy=yddy$ 也可以通过代换 $x=c^{\int zdt}$和 $y=c^{2\int zdt}t$ 而被直接化成这一方程。因此，原来方程的求解就依赖于被导出微分方程的求解。

11. 第二类可以用我的方法化为一阶微分方程的微分方程是这样的：方程各项中变量及其微分确定的次数保持相同①。这类方程的一般形式如下：

$$ax^m y^{-m-1}dx^p dy^{2-p}+bx^n y^{-n-1}dx^q dy^{2-q}=ddy$$

其各项中变量（以及它们的微分）的次数是 1。同样地 dx 被看作常数。这个方程只有 3 项。但可以根据需要在上式中添加任意多项，而整个过程将保持不变。例如可加上 $ex^r y^{-r-1}dx^q dy^{2-q}$以及诸如此

① 这是说，该微分方程关于 x, y, dx, dy 和 d^2y 是齐次方程。

类所需要的任意多项，……。

12. 我通过以 c^v 代换 x、$c^v t$ 代换 y 来变换给定方程，因此由 $x=c^v$ 和 $y=c^v t$ 可得到 $dx=c^v dv$ 和 $dy=c^v(dt+tdv)$；由此又可得到 $ddx=c^v(ddv+dv^2)$和 $ddy=c^v(ddt+2dtdv+tdv^2+tddv)$。因为 dx 被看作常数，故 $ddx=0$ 并有 $ddv=-dv^2$，由此可得 $ddy=c^v(ddt+2dtdv)$。将 x,y,dx,dy 以及 ddy 的这些值代入方程，方程就化为：

$$ac^v t^{-m-1}dv^p(dt+tdv)^{2-p}+bc^v t^{-n-1}dv^q(dt+tdv)^{2-q}=c^v(ddt+2dtdv)$$

两边除以 c^v，上式就变为

$$at^{-m-1}dv^p(dt+tdv)^{2-p}+bt^{-n-1}dv^q(dt+tdv)^{2-q}=ddt+2dtdv$$

因为 v 在方程中不出现，设 $dv=zdt$，于是有

$ddv=zddt+dzdt$，　　但 $ddv=-dv^2=-z^2dt^2$；因此

$$ddt=-zdt^2=-\frac{dzdt}{z}$$

结果得到方程

$$at^{-m-1}z^p dt^p(dt+ztdt)^{2-p}+bt^{-n-1}z^q dt^q(dt+ztdt)^{2-q}=-zdt^2-\frac{dzdt}{z}+2zdt^2$$

或写成更好的形式

$$at^{-m-1}z^p dt(1+zt)^{2-p}+bt^{-n-1}z^q dt(1+zt)^{2-q}=zdt-\frac{dz}{z}$$

13. 这个一阶微分方程也可以从已知方程一步得到，即直接假设 $x=c^{\int zdt}$和 $y=c^{\int zdt}t\cdots$

18. 第三类可以用我的化约方法来处理的方程包括那些在各项中有一个变量次数保持相同的方程。这里需要根据在各项中次数相同的那个变量的微分是否等于常数而区分出两种情形。具有

下列一般形式的方程属于第一种情形[①]：

$$Px^m dy^{m+2}+Qx^{m-b}dx^b dy^{m+2-b}=dx^m ddy$$

这方程每一项中 x 的次数均为 m，dx 被看作常数。此处 P 和 Q 表示 y 的任意函数。为了化约这个方程，只需进行一个代换即 $x=c^v$，使得 $dx=c^v dv$ 和 $ddx=c^v(ddv+dv^2)=0$，结果有 $ddv=-dv^2$. 从这一代换可以得到

$$Pdy^{m+2}+Qdv^b dy^{m+2-b}=dv^m ddy$$

当然首先要用 c^{mv} 除方程的两边。

19. 因为在导出的方程中 v 不出现，我们就可以通过用 zdt 代换 dv 而对方程进行化约……。

20. 第三类方程的另一种情形则与下列一般方程有关：

$$Px^m dy^{m+1}+Qx^{m-b}dx^b dy^{m-b+1}=dx^{m-1}ddx$$

在此方程中 dy 被看作常数，P 和 Q 表示 y 的任意函数。正如我们所看到的那样，在每一项中 x 都有相同的次数 m[②]. 像前面一样取 $x=c^v$，则 $dx=c^v dv$ 和 $ddx=c^v(ddv+dv^2)$。若将这些代入方程，两边除以 c^{mv} 后可得

$$Pdy^{m+1}+Qdv^b dy^{m-b+1}=dv^{m+1}+dv^{m-1}ddv$$

这方程可进一步化约如下：因为 v 不出现，取 $dv=zdy$，由于 dy 是常数从而有 $ddv=dzdy$。结果，上述最后的方程就变为

$$Pdy^{m+1}+Qz^b dy^{m+1}=z^{m+1}dy^{m+1}+z^{m-1}dy^m dz$$

但此方程在除以 dy^m 后给出

$$Pdy+Qz^b dy=z^{m+1}dy+z^{m-1}dz.$$

因此，已知方程 的求解就依赖于该导出方程的求解。

21. 我相信，通过以上所述将不难理解，应该怎样处理与三类微分方程中任一类有关的二阶微分方程，……。

---

① 这是说，在这一情形中，微分方程是关于 x 和 dx 的齐次方程。

② 这是说，该微分方程是关于 x、dx 和 ddx 的齐次方程。

43.2. 关于常系数线性齐次方程的一般解法

欧拉率先完整地解决了常系数线性齐次常微分方程的求解问题，指出 n 阶方程的通解是其 n 个特解的线性组合。他是最早明确区分“特解”与“通解”的数学家。欧拉这方面的工作，正式发表于 1743 年（见 L. Euler: Opera omnia (I)，22，pp. 108～149)，是对常微分方程分析求解的重大推动。但在此以前，欧拉在 1739 年致约翰·伯努利的一封信中已经宣布了有关结果。以下就选录欧拉的这封信，原载 G. Eneström (ed.)：Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler and Johann I. Bernoulli, Bibliotheca Mathematica，6(1905)，pp. 33～38.

欧拉致约翰·伯努利(1739.9.15)

最近我发现了一个求高阶微分方程积分的方法，按照这一方法，只要推出一个有限的(代数)方程，就可一步直接得到微分方程的积分，而且这一方法适用于所有具有如下一般形式的方程：

$$y+\frac{ady}{dx}+\frac{bddy}{dx^2}+\frac{cd^3y}{dx^3}+\frac{dd^4y}{dx^4}+\frac{ed^5y}{dx^5}+\text{etc}=0$$

这里设 dx 为常数。为了求出上述方程的积分，我考虑以下的方程或代数表示式：

$$1-ap+bp^2-cp^3+dp^4-ep^5+\text{etc}=0$$

如果可能的话，将该表示式分解成形如 $1-\alpha p$ 的实单因式；但若做不到这一点，那就将它分解成形如 $1-\alpha p+\beta pp$ 的二次因式，这种分解总可能在实数范围内进行，因为不论什么形式的方程，都可以被表示成一些因式的乘积，这些因式或者是单因式 $1-\alpha p$，或者是二次因式 $1-\alpha p+\beta pp$，并且都是实因式。进行了这种分解以后，我认为 y 的值就是一个关于 x 和某些常数的有限表达式，它由所有那些与上述代数表达式的因式相对应的成员组成，各别成员构成积分的个别项。当然，单因式 $1-\alpha p$ 给出积分成员 $ce^{x/\alpha}$，合

因式 $1-\alpha p+\beta pp$ 给出积分成员

$$e^{-\alpha/2\beta}(C\sin A \cdot \frac{x\sqrt{4\beta-\alpha\alpha}}{2\beta}+D\cos A \cdot \frac{x\sqrt{4\beta-\alpha\alpha}}{2\beta})$$

这里我用 $\sin A$ 和 $\cos A$ 表示半径为 1 的圆弧的正弦和余弦，但值得注意的是，若表示式 $1-\alpha p+\beta pp$ 不能被分解为单因式，当 $4\beta>\alpha\alpha$ 时，所得积分仍然是实的。下面让我们来举一个适当的例子

$$ydx^4=K^4d^4y,\text{或 } y-\frac{K^4d^4y}{dx^4}=0$$

相应的代数表示式为 $1-K^4p^4=0$，它有三个实因式 $1-Kp$，$1+Kp$，$1+K^2p^2$；由这些因式得出方程的积分

$$y=Ce^{-x/K}+De^{x/K}+E\sin A \cdot \frac{x}{K}+F\cos A \cdot \frac{x}{K}$$

在这表示式中，因为我们一步写出了四项积分，按积分性质的要求，它就包含了四个新的常数。如果能让您满意，最尊敬的阁下，我将在另外的场合写出我的证明方法。

（李文林 译）

44. 伯努利兄弟论最速降线问题

在数学史上，约翰·伯努利的最速降线问题通常被看作为变分法的发端。诚然，在此之前伽利略(1630，1638)、牛顿(1686)都已涉及变分法性质的问题，但他们的处理在方法上缺乏应有的一般性。最速降线问题的提出与解决，则显示了变分法在概念与方法论上区别于普通微积分极值问题的特征。

约翰·伯努利最先于 1696 年 6 月在《教师学报》(Acta Eruditorum)上提出最速降线问题以向其他数学家挑战。问题提出后半年未获佳音，约翰遂于 1697 年元旦发表《公告》，再次向“全世界最有才能的数学家”挑战。此后不久，莱布尼茨、牛顿、洛必达、雅各·伯努利和约翰本人都陆续得到正确解答。(他们的解答均发表在 1697 年 5 月的《教师学报》上。)所有这些工作，与大约同时期出现的等周问题和测地线问题等研究一道，标志着变分法作为一门新的独立数学分支的诞生。

44.1. 约翰·伯努利：新问题——向数学家们征解

这就是约翰·伯努利原始的挑战问题，转译自 D. E. Smith：A Source Book in Math. pp. 645—646. 原文载于 Acta Eruditorum, Leipzig, June, 1696, p. 269.

已知垂直平面上两点 A 和 B，欲求一条路径 AMB，使一动点 M 在其自身重力作用下沿此路径由点 A 下滑至点 B 所用时间最短。

为了激发人们解决这一问题的兴趣与愿望，可能需要指出：所提问题并不像初看那样仅仅是无用的思辩。相反，尽管很少有人会轻易相信，它在诸如力学这样的其他科学分支中有重大的应用。同

时(为了防止轻率的判断)有必要指出虽然直线 AB 确实是点 A 与 B 之间距离最短的曲线,它却不是用最短时间通过的路径。然而曲线 AMB 是几何学家们所熟知的一种曲线,如果在今年年底以前没有其他人能发现答案,我本人将为它命名。

……

44.2. 约翰·伯努利:公告(1697年元旦发表于格罗宁根)

> 这是约翰·伯努利就最速降线问题向数学界的第二次挑战,选译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. pp. 646~648,原文载 Johann Bernoulli: Opera omnia, vol. 1, pp. 166~169

大学数学教授约翰·伯努利向全世界最有才能的数学家致以最高敬意。

众所周知,没有什么比提出困难而又有用的问题更能激发杰出的天才人物来为增长人类知识而工作了。通过也只有通过这类问题的解决,他们方能扬名于世,并为自己建立不朽的丰碑。因此,如果我效仿梅森、帕斯卡、费马诸位,尤其是最近佛罗伦萨之谜的匿名作者[①] 以及其他做过同样事情的人士,在当代领头的分析学家们面前提出了这样的问题,我希望将能得到数学界的感谢:这个问题就像一块试金石,可以试验他们的方法,激发他们的能力。并且任何人一旦有所发现并通告我们,就理应受到我们公开的奖誉。

事实是半年以前,我曾在《莱比锡学报》[②]6月号上提出了这样一个问题,它的优美、有用将为所有成功地致力于其求解的人所公认。当时给几何学家们的期限是从公布之日起六个月。如到期无人能解决问题,我曾允诺公布我本人的解答。现规定期限已过,却

---

① 指维维亚尼(Vincentius Viviani,1622~1703),意大利数学家、物理学家,曾于1692年提出著名的"佛罗伦萨之谜":求一教堂的半球形屋顶的面积,在屋顶四面开有相同的圆孔形窗户。

② 即《教师学报》。

尚未出现获解的迹象。只有著名的莱布尼茨，他在高等几何领域理所当然地享有盛誉，曾写信给我说他很幸运已经解决了这个他认为十分漂亮并且是前所未闻的难题；他还善意地劝我将期限延至下一个复活节，以使问题能在法国和意大利广为传知，而没有人能抱怨缺少应有的时间。我不仅同意了这一值得赞许的建议，并已决定宣布延期，现正拭目以待，看在经历这样长久的时间后最终究竟鹿死谁手。为了方便那些看不到《莱比锡学报》的人，兹将问题复述如下。

关于最速降线的力学-几何问题。

给定与水平面距离不等且不在同一垂直线上的两点，求连接这两点的曲线，使一在自身重量作用下从上方一点出发运动的质点沿此曲线最快地降落至下方一点。

问题的意义是这样的：在连接两给定点或从一点到另一点画出的无限多条曲线中，选择这样一条曲线，使若用一条细管或狭槽来代替该曲线时，其上放置的小球被释开后将以最短的时间从一点滑至另一点。

为了避免混淆，我们在这里不言而喻地接受伽利略的假设，在忽略摩擦的情形下，任何明智的几何学家都不会怀疑这一假设的真实性：一自由下落物体所具有的实际速度，与它下落高度的平方根成正比。然而我们的解题方法是完全一般的，可以被应用于其他任何假设情形。

因为已不再有模糊之处，我热切地请求当代所有的几何学家都摩拳一试，运用他们珍藏的一切秘密武器，全力以赴攻克堡垒。愿他们能尽快膺获我们允诺的奖赏。当然这奖赏既不是黄金也不是白银。金银只能诱惑那些卑劣而容易收买的灵魂，对这些人我们绝不能指望任何值得称赞和有益科学的东西。相反，美德是她自身最需求的奖赏，名声则是一种强有力的激励，因此我们提供的奖赏是由荣誉和赞美编织的桂冠，适合品格高尚的人士。我们将通过公

开或私下、书面或口头等各种形式大力颂扬伟大阿波罗[1]的聪明智慧。

但如过了复活节仍没有人能解决问题，我们就要将自己的解答公诸于世；届时希望盖世无双的莱布尼茨允许宣布他本人的解答以及我们得到的并在很久前已向他透露过的结果。对于这些具有深刻背景的解答，几何学家们如能加以研究，他们无疑会认识到普通几何的局限，并给我们的发现以更高的评价，因为目前出场的、能够解决这一非凡问题的人寥寥无几，即使是那些对他们的方法自视甚高的人也不例外，这些人夸口说用这类方法他们不仅深入到了几何学最隐藏的秘密，而且还以奇妙的方式拓广了几何学的疆界；尽管他们自以为曲高和寡的重要定理早已有人发表过[2]。

44.3. 雅各·伯努利的解答

1697 年 5 月号《教师学报》同时刊登了莱布尼茨、牛顿、洛必达(G. F. A. L'Hospital)、契恩豪斯(E. W. Tschirnhaus)和伯努利兄弟等关于最速降线问题的解答。其中雅各·伯努利的方法更为几何化但也更具变分法的一般特征，该文后被收载于 Jacob Bernoulli：Opera，I. pp. 768～778。以下摘录的部分内容转译自 D. J. Struik：A Source Book in Math. pp. 396～399.

引理. 设 $ACEDB$(图 1)是所求曲线，一质点沿此曲线以最短时间由 A 下落至 B，并设 C 与 D 是其上任意接近的两点。在所有以 C 与 D 为端点的弧段中，由 A 点下落的质点通过弧段 CED 所需时间最短。事实上，若通过另一弧段 CFD 的时间最短，那么质

① Apollo：希腊神话中的太阳神。

② 这一段话被认为是针对牛顿的隐晦攻击. 牛顿于 1697 年 1 月 29 日从造币局回到寓所，从一封法国来信中获知了伯努利的挑战，他利用晚饭后的时间一举给出一个正确的解答，并将结果写成短文匿名发表于 Philosophical Transaction，1697，No. 224. 伯努利读到后惊呼："从这锋利的爪我认出了雄狮。"

点沿 $ACFDB$ 移动的时间要比沿 $ACEDB$ 短，这与我们的假设相矛盾。

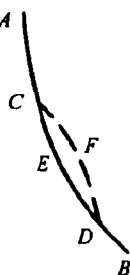


图 1

因此，在一与水平面成任意倾角的平面（本身不必水平）上取 ACB（图 2.a）为所求曲线，质点沿此曲线由 A 到达 B 所需时间比沿该平面上任何其它曲线都短。在此曲线上取无限接近的两点 C 与 D，作水平线 AH，垂线 CH 及其法线 DF。取 C 和 F 的中点 E 并通过线段 EI 作出矩形 DE。现在我们需要在 EI 上确定一点 G，使沿 CG 降落的时间加沿 GD 降落的时间取极小值。我以

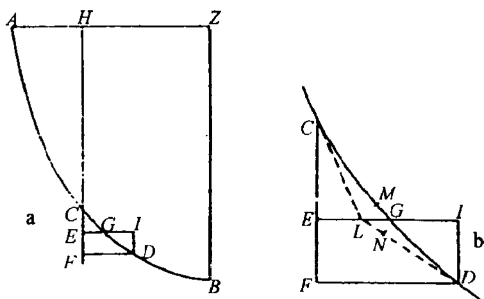


图 2

$$t_{CG}+t_{GD}$$

表示这段时间，同时记住下落是从 A 处开始的。如果我们在 EI 上取另一点 L（图 2.b），使 GL 相对 EG 而言无比地小，同时作 CL 与 DL，则根据极小性质：

$$t_{CL}+t_{LD}=t_{CG}+t_{GD}$$

从而

$$t_{CG}-t_{CL}=t_{LD}-t_{GD}$$

现进一步论证如下。根据自由落体性质，

$$CE : CG=t_{CE} : t_{CG}$$

$$CE : CL=t_{CE} : t_{CL}$$

因此 $CE:(CG-CL)=t_{CE}:(t_{CG}-t_{CL})$[①]

如果我们在 CG 上取一点 M 使 $CG-CL=MG$，则由于三角形 MLG 与 CEG 相似，我们有

$$CE:GL=EG\times t_{CE}:CG\times(t_{CG}-t_{CL})$$

同样根据自由落体性质，我们得到

$$EF:GD=t_{EF}:t_{GD}$$

$$EG:LD=t_{EF}:t_{LD}$$

因此 $EF:(LD-GD)=t_{EF}:(t_{LD}-t_{GD})$

如果我们在 DL 上取一点 N 使 $LD-GD=LN$，则由于三角形 LNG 与 GID 相似，我们有

$$LN:LG=GI:GD$$

因此 $EF:LG=GJ\times t_{EF}:GD\times(t_{LD}-t_{GD})$

因为极小值存在，经比较我们有

$$EG\times t_{CE}:CG\times(t_{CG}-t_{CL})=GI\times t_{EF}:GD\times(t_{LD}-t_{GD})$$
$$=CG:GD$$

换项得

$$EG\times t_{CE}:GI\times t_{EF}=CG\times(t_{CG}-t_{CL}):GD\times(t_{LD}-t_{GD})$$
$$=CG:GD$$

但根据引力定律我们有

$$EG\times t_{CE}:GI\times t_{EF}=\frac{EG}{\sqrt{HC}}:\frac{GI}{\sqrt{HE}}$$

最终得到

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}}:\frac{GI}{\sqrt{HE}}=CG:GD$$

顺便提请纽文蒂[②] 先生注意二次微分（即微分的微分）的使用，因为他错误地忽视了这一概念。事实上我们不得不假设无限小线段 EG，GI 的一部分 GL 是相对于它们而言的无限小，我不知道

---

① 伯努利原文未使用括号。

② B. Nieuwentyt（1654～1718），荷兰物理学家，曾尖锐批评莱布尼茨的高阶微分概念，认为其缺乏根据。

如果没有这一假设问题该如何解决。

现在，EG 和 GI 是横坐标轴 AH 的元素，CG 和 GD 是所求曲线的元素，HC 和 HE 是它们的纵坐标，而 CE 和 EF 则是纵坐标元素。这样问题就可被归结为纯几何形式，即确定一曲线，其线元与横坐标元成正比，同时与纵坐标的平方根成反比。我发现这正是惠更斯(C. Huygens)等时曲线(isochrone)所具有的性质，从而所求曲线也就是 Oligochrone[①] 即几何学家们熟知的摆线(cycloid)[②]。

（李文林 译）

① Oligochrone：这是雅各·伯努利对最速降线问题解的专门用语。

② 对此雅各·伯努利给出了一个几何证明，若记 $AH=x$，$HC=y$，则容易验证他的证明相当于导出方程 $dy\sqrt{\frac{y}{a-y}}=dx$，并指出了如何由此而得到一条以 AH 为水平基线并通过已知点 A 和 B 的摆线。雅各这段推理与他弟弟约翰的解法中相应的部分类似，此处从略。

45. 拉格朗日:论变分法

拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange),1736 年生于意大利都灵市,19 岁就成为都灵皇家炮兵学校数学教授;1766 年应普鲁士腓特烈大帝之邀到柏林科学院任职。腓特烈大帝死后,拉格朗日于 1787 年定居巴黎,曾负责法国的度量衡改革,后出任巴黎高等师范学校(1795)和综合工科大学(1797)教授。1813 年卒于巴黎。拉格朗日是 18 世纪推动分析发展的最重要的数学家之一。除了分析,他在方程论、数论、概率论、经典力学等领域也都留下了影响深远的工作。

拉格朗日与欧拉同为变分法的奠基者。拉格朗日发展了欧拉的方法,同时克服了欧拉变分法过多依赖于几何论证的倾向,在纯分析的基础上建立变分法。拉格朗日的工作使由最速降线等特殊问题发展起来的变分法真正成为分析的一个独立分支。这里选录拉格朗日的经典论文《论确定不定积分式极大和极小值的一个新方法》(Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies, Miscellanea Taurinensia 2, 1760—61, pp. 173～195＝Lagrange:Oeuvres, I. pp. 355～362, Paris, 1867),转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 406～413).

几何学家们解决的第一个这样的问题,是约翰·伯努利先生在上世纪末提出的捷线(Brachystochrone)或最速降线问题。它只是对特殊的情形被解决了,不久以后,在等周问题的研究中,刚才提到的这位伟大几何学家和他杰出的兄弟雅各·伯努利给出了解决若干其他同类问题的某种一般法则,但这些法则还不足够一般,

因此著名的欧拉先生在一本题为“Methodus Inveniendi…”[①] 的书中将所有这些研究归结为一个一般的方法，这本创造性的著作处处都显示出深刻的微积分知识。然而，不论他的方法是多么巧妙和富有成果，我们必须认识到，它尚缺乏一门纯分析学科所要求的那种高度的简明性。作者自己在该书第Ⅱ章39节中向我们说明了这一点，他指出：“因此就需有一种能摆脱几何论证的方法……”。

我现在就提出一种方法，它只需要微积分原理的非常简单的应用，但首先要提醒读者的是，由于这种方法要求同样的量以两种不同的方式变化，为了不致引起混淆，我在计算中引进了一种新的标记 δ，这样，δZ 表示 Z 的差，这种差不同于 dZ，但却仍将按同样的规则产生；因此，如果我们有一个方程 $dZ=mdx$，那就同样会有 $\delta Z=m\delta x$，其他表达式情形也是如此。

作了这些说明后，我首先来研究以下问题。

问题 Ⅰ　已知定积分表达式 $\int Z$，其中 Z 表示变量 x,y,z 及其微分 $dx,dy,dz,d^2x,d^2y,d^2z,\cdots$ 的任意给定函数，求这些变量间的关系，使表达式 $\int Z$ 取极大值或极小值。

解.　根据已知的极大与极小值方法，我们必须对被计算的 $\int Z$ 进行微分，将 $x,y,z,dx,dy,dz,d^2x,d^2y,d^2z,\cdots$ 看作变量并使所得微分等于零。因此，若用 δ 来表示这些变分(variation)，我们将首先得到极大或极小值的方程

$$\delta\int dZ=0$$

或与此等价的

① 即欧拉的《求某种具有极大或极小性质的曲线或解最广义的等周问题的技巧》(Methodus Inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperi-metrici latissimo sensu accepti, Lausanne, Geneva, 1744)。欧拉在该书中给出了求积分极值问题的一般方法，并获得了后以“欧拉方程”著称的变分法基本方程。

$$d\int \delta Z=0$$

现在设 Z 使得

$$\begin{aligned}\delta Z=&n\delta x+p\delta dx+q\delta d^2x+r\delta d^3x+\cdots\\&+N\delta y+P\delta dy+Q\delta d^2y+R\delta d^3y+\cdots\\&+\nu\delta z+\pi\delta dz+\chi\delta d^2z+\rho\delta d^3z+\cdots\end{aligned}$$

由此得到方程

$$\begin{aligned}&\int n\delta x+\int p\delta dx+\int q\delta d^2x+\int r\delta d^3x+\cdots\\&+\int N\delta y+\int P\delta dy+\int Q\delta d^2y+\int R\delta d^3y+\cdots\\&+\int \nu\delta z+\int \pi\delta dz+\int \nu\delta d^2z+\int \rho\delta d^3z+\cdots=0\end{aligned}$$

但容易知道

$$\delta dx=d\delta x,\qquad \delta d^2x=d^2\delta x$$

以及其他变量的同样的关系式;进而通过分部积分可得

$$\int pd\delta x=p\delta x-\int dp\delta x$$

$$\int qd^2\delta x=qd\delta x-dq\delta x+\int d^2q\delta x$$

$$\int rd^3\delta x=rd^2\delta x-drd\delta x+d^2r\delta x-\int d^3r\delta x$$

以及其他变量的同样的关系式,于是前述方程将变为:

$$\begin{aligned}&\int (n-dp+d^2q-d^3r+\cdots)\delta x\\&+\int (N-dP+d^2Q-d^3R+\cdots)\delta y\\&+\int (\nu-d\pi+d^2\chi-d^3\rho+\cdots)\delta z\\&+(p-dq+d^2r-\cdots)\delta x+(q-dr+\cdots)d\delta x\\&\qquad+(r-\cdots)d^2\delta x+\cdots\\&+(P-dQ+d^2R-\cdots)\delta y+(Q-dR+\cdots)d\delta y\\&\qquad+(R-\cdots)d^2\delta y+\cdots\\&+(\pi-d\chi+d^2\rho-\cdots)\delta z+(\chi-d\rho+\cdots)d\delta z\end{aligned}\tag{A}$$

$$+(\rho-\cdots)d^2\delta z+\cdots=0$$

由此我们首先得到不确定方程

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned}&(n-dp+d^2q-d^2r+\cdots)\delta x\\&+(N-dp+d^2Q-d^3R+\cdots)\delta y\\&+(\nu-d\pi+d^2\chi-d^3\rho+\cdots)\delta z=0\end{aligned}$$

然后得到确定方程

$$\text{(C)}\quad \begin{aligned}&(p-dq+d^2r-\cdots)\delta x+(q-dr+\cdots)d\delta x\\&\quad+(r-\cdots)d^2\delta x+\cdots\\&+(P-dQ+d^2R-\cdots)\delta y+(Q-dR+\cdots)d\delta y\\&\quad+(R-\cdots)d^2\delta y+\cdots\\&+(\pi-d\chi+d^2\rho-\cdots)\delta z+(\chi-d\rho+\cdots)d\delta z\\&+(\rho-\cdots)d^2\delta z+\cdots=0\end{aligned}$$

此方程涉及积分 $\int Z$ 的最后部分，但我们必须注意，因为它的每一项，例如 $p\delta x$，依赖于式子 $\int p\delta x$ 的分部积分，我们可以给它加上或减去一个常量。确定这一常量的条件是：$p\delta x$ 必须在积分 $\int p\delta x$ 开始处消失；因此我们应当从 $p\delta x$ 减去它在该点的值。由此可以得到如下规则：让我们一般地用 M 表示方程(C)的第一部分，设 M 在积分 $\int Z$ 开始处的值用 $'M$ 表示，M 在积分结束处的值用 M' 表示；则对于方程(C)的整个表达式我们有 $'M-M'=0$。现在为了使所得方程中没有不确定微分 $\delta x,\delta y,\delta z,d\delta x,d\delta y,\cdots$，根据问题的性质，我们必须首先验证它们之间是否存在某种关系，然后将它们的个数尽可能化为最小，并使剩下的每个微分的系数等于零。如果它们完全互相独立，那么从方程(B)我们将立即得到以下三个方程：

$$n-dp+d^2q-d^3r+\cdots=0$$
$$N-dP+d^2Q-d^3R+\cdots=0$$
$$\nu-d\pi+d^2\chi-d^3\rho+\cdots=0$$

……①

问题Ⅱ 使表达式 $\int Z$ 取极大值或极小值，假设 Z 是变量 x，y，z 和它们的微分 $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, \cdots$ 以及量 $\Pi = \int Z'$ 的任意代数函数，其中 Z' 本身又是变量 $x, y, z, \cdots$ 和它们的微分 $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, \cdots$ 的另一个任意代数函数。

解 通过关于 δ 的微分，我们有

$$\begin{aligned}\delta Z &= L\delta\Pi + n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + \cdots \\ &+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \cdots \\ &+ \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \cdots\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\delta Z' &= n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots \\ &+ N'\delta y + P'\delta dy + Q'\delta\chi d^2y + \cdots \\ &+ \nu'\delta z + \pi'\delta dz + \chi'\delta d^2z + \cdots\end{aligned}$$

然后根据假设我们将得到

$$\delta\Pi = \delta\int Z' = \int \delta Z' = \int (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots)$$

因此

$$\delta\int Z = \int \delta Z = \int (n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + \cdots) + \int L\int (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots)$$

第一部分可以像问题Ⅰ那样被化为

$$\int (n - dp + d^2q - \cdots)\delta x + (p - dq + \cdots)\delta x + (q - \cdots)d\delta x + \cdots$$

至于第二部分，我们将它变换成

$$\int L\times(n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots) - \int\left[\int L\times(n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x)\right]$$

---

① 此处我们省略了接下去的举例说明，拉格朗日给出的例子是 $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{x}}$，这是在空间中的捷线问题，拉格朗日在本文中还导出了变动端点问题的极小化曲线必须满足的条件，并认为这是他的变分法比欧拉更一般的地方。

现用 H 表示整个积分 L 的值。如果我们将量 H 看作常数，那么可使前面所得方程化为：

$$\int\left[\left(H-\int L\right)(n'\delta x+p'\delta dx+q'\delta d^2x+\cdots)\right]$$

利用分部积分，容易将该方程变换成

$$\int\left[n'\left(H-\int L\right)-dp'\left(H-\int L\right)+d^2q'\left(H-\int L\right)+\cdots\right]\delta x$$

$$+\left[p'\left(H-\int L\right)-dq'\left(H-\int L\right)+\cdots\right]\delta x$$

$$+\left[q'\left(H-\int L\right)-\cdots\right]d\delta x+\cdots$$

因此，若为简化起见我们记

$$n+n'\left(H-\int L\right)=(n)$$

$$p+p'\left(H-\int L\right)=(p)$$

$$q+q'\left(H-\int L\right)=(q)$$

同样

$$N+N'\left(H-\int L\right)=(N)$$

$$P+P'\left(H-\int L\right)=(P)$$

$$Q+Q'\left(H-\int L\right)=(Q)$$

以及

$$\nu+\nu'\left(H-\int L\right)=(\nu)$$

$$\pi+\pi'\left(H-\int L\right)=(\pi)$$

$$\chi+\chi'\left(H-\int L\right)=(\chi)$$

一般地我们将得到

$$\delta\int Z=\int\left[(n)-d(p)+d^2(q)-\cdots\right]\delta x$$

$$
\begin{aligned}
&+\int[(N)-d(P)+d^2(Q)-\cdots]\delta y\\
&+\int[(\nu)-d(\pi)+d^2(\chi)-\cdots]\delta z\\
&+[(p)-d(q)+\cdots]\delta x-[(q)-\cdots]\delta dx+\cdots\\
&+[(P)-d(Q)+\cdots]\delta y-[(Q)-\cdots]\delta dy+\cdots\\
&+[(\pi)-d(\chi)+\cdots]\delta z-[(\chi)-\cdots]\delta dz\\
&=0
\end{aligned}
$$

这是一个与前一问题中的方程(A)形式相同的方程,如此等等。

……

问题Ⅱ 求表达式$\int Z$的极大或极小值方程,设Z由一个只包含Z的一阶微分的微分方程给出[1]。

(李文林 译)

---

[1] 在此情形,我们可以写出:

$\delta dZ+T\delta Z=n\delta x+p\delta dx+\cdots+N\delta y+P\delta dy+\cdots+\nu\delta z+\pi\delta dz$,然后,此方程可以被看作一个关于$\delta Z$的线性微分方程而解出(考虑到$\delta dZ=d\delta Z$).

拉格朗日在本文最后加了两个附录。附录1涉及极小曲面问题,拉格朗日讨论了两类极小曲面:(a)在有相同边界的所有曲面中面积最小者,即:

$$\delta\int\int dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}=0,p=(\frac{\partial z}{\partial x}),q=(\frac{\partial z}{\partial y})$$

(b)在有相同体积的所有曲面中面积最小者,即:

$$\delta(\int\int zdxdy)=0,\delta(\int\int dxdy\sqrt{1+p^2+q^2})=0$$

附录2研究求所有边数相等的多边形中面积最大的多边形的问题。

V．数论与代数的进化

数　论

46. 费马定理

虽然古希腊、中国与印度的数学著作中不乏数论问题与结果的记述，但近代意义的数论研究是从费马开始的。费马(Pierre de Fermat，1601～1665)，生于法国南部城市图卢兹附近，早年入图卢兹大学攻读法律，后以律师为业，并从1631年起兼任图卢兹议会议员直至去世。费马主要以业余时间从事数学研究，但发现颇多，在数论、解析几何、微积分与概率论等方面均有奠基性贡献。

46.1. 费马大定理

在数论领域，费马的名字因"费马大定理"而特别响亮。费马大定理亦称"费马猜想"，最先由费马在阅读巴歇(C. Bachet)校订的丢番图《算术》时作为卷2命题8的一条页边批注而提出。1670年费马之子萨缪尔(Samuel)连同其父的批注一起出版了巴歇的书的第二版，此后三个多世纪，费马大定理成为世界上最著名的数学问题，吸引历代数学家为它的证明付出了巨大的努力，有力地推动了数论乃至整个数学的进步。1994年，这一旷世难题被英国数学家威尔斯(A. Wiles)解决。

以下就是费马的页边批注，原文为法文，载 Précis des Oeuvres Mathematiques de P. Fermat et de l'Arithmetique de Diophante, E. Brassinne, Paris, 1853.

把一个数的立方分成另两个数的立方和，把一个数的四次方分成另两个数四次方的和，或一般地，把一个数的高于2的任何次方分成两个数的同次方的和是不可能的。我确信已找到了一个极佳的证明，但书的空白太窄，写不下。

46.2. 费马小定理

费马经常把他的一些研究结果写信告诉其他数学家。在1640年10月18日致德·贝西(B. F. de Bessy)的一封信中包含了后以“费马小定理”著称的如下结果：如果 p 是素数，a 与 p 互素，则 a^p-a 可以被 p 整除。费马曾对欧几里得《几何原本的定理》，36很感兴趣，该定理是说：如果 2^n-1 是素数，则形如 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的数是完全数，即它等于其所有因子的和。这种像 2^{n-1} 的数费马叫做完全数的根。在1640年6月写给梅森神父(M. Mersenne)的信中费马有如下结论：如果 n 非素，则 2^n-1 非素；如果 n 是素数，则 2^n-2 可被 n 整除；如果 n 是素数，则 2^n-1 只能被形如 $2kn+1$ 的素数整除。同年8月，在给贝西的信中，费马讨论了 2^n+1 型的数(当 $n=2^t$ 时，$2^{2^t}+1$ 型数后被称为“费马数”。)费马在10月18日写给贝西的信中首先回顾了上述诸信的结果，然后转向“费马小定理”。以下摘录该信有关部分，转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 28～29.

1640年10月10日费马写给贝西(de Bessy)(1605～1675)的一封信：

上次信后[①]，我觉得还应该告诉你我构造的所有有关那个几何级数的证明的根据是什么。内容如下：

---

① 1640年8月，费马曾写信给贝西，信中说他“几乎确信”：当 n 为2的幂时，2^n+1 型的数是素数。我们现在知道，$n=2,4,8,16$ 时此命题成立，但 $n=32$ 时的情况后来被欧拉证明是不对的，此时 $2^{32}+1$ 可被641整除。

每个素数总是任意级数[①] 中的一个幂减 1 的因子，而幂指数是该素数减 1 的因子。当找到满足这个命题的第一个指数后，则以此指数的倍数为幂指数的所有幂也都满足命题。

例：设给定级数

1	2	3	4	5	6
3	9	27	81	243	729…

幂指数写在上面一行。

比如素数 13，它是三次幂减 1 的因子，指数 3 又是 12(即 13—1)的因子，729 的幂指数是 6，它是第一个满足条件的指数 3 的倍数，那么 13 也是 729 减 1 的一个因子。

这一命题对所有级数和素数都是正确的。若非怕篇幅过长，我就会寄给你这个命题的证明。

但是，"每个素数都是任何这种级数中的一个幂加 1 的因子"，这个命题却不一定正确[②]。因为若所说的素数是一个幂减 1 的因子，其指数若是奇数，则在这种情况下这个素数就不是级数中一个幂加 1 的因子；

例：在 2 的直至无穷的级数中，23 是 2 的 11 次幂减 1 的因子，但它不是 2 的某个幂加 1 的因子。

但如果第一个使所给的素数是一个幂减 1 的因子的指数是偶数，则在这种情况下，原指数的一半为指数的幂加 1 将以给定的素数作为它的一个因子。

所有的难点在于找出那些素数，它们不是给定的级数中的任何幂加 1 的因子。因为这有助于发现哪些素数是完全数的根的因子，也有助于发现许许多多别的事情，诸如为什么 2 的 37 次幂减 1 有因子 223。总而言之，我们必须确定哪些素数为最小幂减 1 的因子，这里的幂指数为一奇数——我认为这是很困难的。

（李家宏 译　朱尧辰 校）

---

① 指任何一个大于 1 的整数的幂所形成的级数。

② Struik 英译为"is true"，从下文内容分析，是遗漏了"not"。

47. 哥德巴赫猜想

德国数学家哥德巴赫(C. Goldbach,1690～1764)曾长期在俄国圣彼得堡科学院工作。他从1729年起与欧拉进行了长达35年的书信交往,许多重要成果就是通过这种方式记录下来。1742年6月7日,他在给欧拉的信中提出了数论史上著名的“哥德巴赫猜想”。这一猜想历二百余年至今仍悬而未决。以下选录载有哥德巴赫猜想原始陈述的哥德巴赫与欧拉的通信,转译自 D. J. Struik:A Source Book in Math. pp. 47～49. 哥德巴赫与欧拉的通信原文见 A. P. Youschkevithch and E. Winter(eds.): Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel, 1729～1764。Berlin,1965.

47.1. 哥德巴赫致欧拉(1742年6月7日)

我不相信关注那些虽没有证明但很可能正确的命题是无用的。即使以后它们被验证是错误的,也会对发现新的真理有益。比如费马的“每个 $2^{2^{n-1}}+1$ 型的数都给出一列素数”的想法尽管不正确,正像你已证明① 的那样,但要是发现这种数仅能唯一地分解为两个平方因子的积也是很了不起的结果。我也想同样冒险提出一个假说:每一由两个素数组成的数都等于许多数的和,这些数的多少随我们的意愿(包括1),直到所有的数都是1的情况为止② [哥德巴赫在空白处写道:]重新读过上面的内容后,我发现这一假定如果在 n 的情况下成立且 $n+1$ 可被分做两个素数的和,则 $n+1$ 的情况可以很严格地证明。证明是非常简单的。看来无论如何,任

① 见下文。

② 意即每一数 n 若为两个素数之和,则它也是许多素数的和,这些素数象人们所希望的那么多,但不超过 n,注意欧拉和哥德巴赫将1看作是素数。

何大于 2 的数都是三个素数的和①。例如：

$$4=\begin{cases}1+1+1+1\\1+1+2\\1+3\end{cases}\qquad 5=\begin{cases}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{cases}$$

$$6=\begin{cases}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{cases}$$

47.2. 欧拉致哥德巴赫(1742 年 6 月 30 日)

"如果 $2^{2^{n-1}}+1$ 形式的表示式所包括的所有数都可以以唯一的方式分为两个平方的和,那么这些数也一定是素数"。这个命题并不正确,因为这些数都被包含在 $4m+1$ 形式的表达式中。只要当 $4m+1$ 是素数时,它就一定可以唯一地分为两个数的平方和,而 $4m+1$ 若不是素数,则它要么不能分为两数的平方和,要么可以由多于一种的方式分解。例如,$2^{32}+1$ 不是素数,它就可以用至少两种方式分拆,这一点我可由下面的定理推知:(1)如果 a 和 b 可分为两个平方和。则积 ab 也能被分做两个平方和。(2)若积 ab 及一个因子 a 能被分做两个平方和,则另一因子 b 也将能分拆为两个平方和。以上两定理是可以严格地证明的,现在 $2^{32}+1$ 是可

---

① 这是哥德巴赫猜想的原始形式,欧拉将其进一步明确化(见下文欧拉致哥德巴赫的信)。英国数学家 E. 华林(Waring,1734～1798)在他的《代数沉思录》(Meditationes algebraica, Cambridge,1770,p. 217;1782,p. 379)中首先给出了哥德巴赫猜想的如下形式:每个偶数是两个素数之和;每个奇数是三个素数之和。一种略经修改的现代标准陈述是:(A)任何≥6 的偶数为两个奇素数之和;(B)任何≥9 的奇数是三个奇素数之和。猜想(B)已于 1937 年被原苏联数学家 A. I. 维诺格拉多夫证明。显然由(A)也可以推出(B),王元:《哥德巴赫猜想研究》,P. 1. 黑龙江教育出版社,1987)。但(A)至今仍为未决之猜想。1966 年,中国的陈景润证明了每个充分大偶数都可表为一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和,这是迄今关于哥德巴赫猜想研究的最好结果。

以分做平方和的，即2^{32}和1之和，它可被$641=25^2+4^2$整除。故另一因子，我简单地称做b，一定也是两个平方的和。设$b=pp+qq$，于是$2^{32}+1=(25^2+4^2)(pp+qq)$；那么

$$2^{32}+1=(25p+4q)^2+(25q-4p)^2.$$

而同时有

$$2^{32}+1=(25p-4q)^2+(25q+4p)^2$$

于是$2^{3^2}+1$至少可用两种方法分为两个平方的和。由此可知我们可以先验地求出双重分拆，因$p=2556$，$q=409$，故

$$2^{32}+1=65536^2+1^2=622664^2+20449^2$$

至于每个可分为两个素数之和的数可分拆为尽可能多的素数之和这一论断，可由你先前写信向我提到的你的观察，即"每一偶数是两个素数的和"①来说明和证实。事实上，设给定的n为偶数，则它是两个素数之和，又因为$n-2$也是两素数的和，所以n一定是三个素数之和，同理也是四个素数之和，如此继续。但如果n是一奇数，则它一定是三个素数的和，因为$n-1$是两个素数之和，于是它可分拆为尽可能多的素数之和。无论如何"每个数都是两个素数之和"这一定理我认为是相当正确的，虽然我并不能证明这一点②。

（李家宏 译　朱尧辰 校）

---

① 引号为欧拉所加，但非哥德巴赫原话。

② 欧拉似乎从未试图证明这一定理，但在一封写于1752年5月16日的给哥德巴赫的信中，他提到了一个附加定理（好像也是由哥德巴赫提出的）：每个形如$4n+2$的偶数等于两个形如$4m+1$的素数之和；例如$14=1+13$，$22=5+17$，$30=1+29=13+17$。请参阅上面提到的他们之间的书信集pp. 364～365。

48. 欧拉:《代数指南》及其他

欧拉也是近代数论的开拓者。他从费马的工作中曾汲取许多研究数论的灵感,并获得了一系列深入的成果。欧拉 1770 年发表的《代表指南》(Vollständige Anleitung zur Algebra, Saint Petersburg),实际上是 18 世纪最重要的数论著作。

48.1. $n=3,4$ 情形的费马大定理

欧拉被费马的猜想——当 n 为大于 2 的整数时,$x^n+y^n=z^n$ 无正整数解——深深吸引。1738 年,他对 $n=4$ 的情形证明了这一猜想,1753 年,又给出了 $n=3$ 情形的证明。欧拉的证明使用了所谓"无穷递降法",这方法最先由费马本人提出,费马的朋友 B.F. 贝西事实上已用这种方法证明过 $n=4$ 情形的费马猜想。这种方法首先假定原问题有正整数解,然后说明可由这组解得到更小的正整数解。如此继续。因为这个寻找更小的解的过程不可能无限地进行下去,这样就引出了矛盾。

欧拉关于 $n=4$ 情形的证明最先发表于 Commentarri Academiae Scientiarum Petropolitanae 10. (1747)。1770 年出版的《代数指南》也包含有一个 $n=4$ 情形的证明,在该书最后一节中同时可以找到欧拉对 $n=3$ 情形的证明详述,以下我们就选录《代数指南》中的有关部分,转译自 J. Hewlett 的英译本:Elements of Algebra, pp. 405～413, pp. 450～454(5th ed. Longman, London, 1840).

定理 1 两个四次方数的和 a^4+b^4 不可能是一平方数,除非这两个四次方数的一个消失。

证明: 为便于证明,把定理作如下改动:我将证明,假如 a^4

$+b^4$ 是一平方数，则不管 a 和 b 有多大，总能逐步找到更小的 a 和 b，直至最后找到符合这种条件的最小的整数。因为实际上不存在这样的最小的整数，使其四次方的和为一平方数，所以我们必然会推出在最大的数中也不存在这样的数。

设 a^4+b^4 是一平方数，且 a 与 b 互素。若它们不互素，可用除法使它们归结为互素。设 a 是奇数；则 b 必为偶数，因为这两个数一定是一奇一偶的，让我们写做：

$$a^2=p^2-q^2, \qquad b^2=2pq$$

这里 p 与 q 互素，一奇一偶。但若 $a^2=p^2-q^2$，则 p 一定是奇数，因为不然 p^2-q^2 就不会是平方数。故 p 是奇数，q 是偶数。因 $2pq$ 也一定是平方数，而 p 和 $2q$ 是互素的，所以 p 和 $2q$ 都是平方数。由于 p^2-q^2 为平方数，必须有

$$p=m^2+n^2 \text{ 和 } \qquad q=2mn$$

这里 m 和 n 又是互素的，且一奇一偶。但由于 $2q$ 是平方数，$4mn$ 或者说 mn 就是平方数，故 m 和 n 是平方数。因此若设

$$m=x^2, \qquad n=y^2$$

则我们将有

$$p=m^2+n^2=x^4+y^4$$

它一定等于一个平方数。从此得到，若 a^4+b^4 是一平方数，则 x^4+y^4 也是一平方数，但显然 x 和 y 要比 a 和 b 小得多。同理我们又会从四次方数 x^4+y^4 得到更小的四次方数，使其和是平方数，我们就逐步得到了整数中最小的四次方数。但因不存在使其和为平方数的两个最小的四次方数，所以很明显，也不存在非常大的这样的数。若在某个四次方数对中有一项为零，则其余所有四次方数对中都有一项消失，所以这里得不到新的结果。

推论 1　因两个四次方数的和不是平方数，所以就更不可能是四次方数。

推论 2　尽管该证明只涉及到整数的情况，但它也表明了我们找不到两个四次方的分数使其和为平方。事实上，若$(a^4/m^4)+(b^4/n^4)$是一平方，则 $a^4n^4+b^4m^4$（它是整数的和）也将是一平方，但

我们已证明这是不可能的。

推论 3　由同一证明过程我们可断定：不存在数 p 和 q，使 p，$2q$ 和 p^2-q^2 是平方数；如果这样的数 $p \cdot q$ 存在，则有 $a=\sqrt{p^2-q^2}$ 且 $b=\sqrt{2pq}$，即存在 a 和 b，使 a^4+b^4 为平方数。

推论 4　假设 $p=x^2$ 且 $2q=4y^2$，那么有 $p^2-q^2=x^4-4y^4$，于是 x^4-4y^4 决不可能是平方数。同样，$4x^4-y^4$ 也不可能是平方数；因为不然 $16x^4-4y^4$ 将是平方数，而 $16x^4$ 是一个四次方数，于是就归结到前一个情形。

推论 5　由此也得出 $ab(a^2+b^2)$ 决不是平方数。因若不然由于因子 a,b,a^2+b^2 是互素的，因而它们就必须都是平方数，但这不可能。

推论 6　同样地，不存在互素的数 a 和 b，使 $2ab(a^2-b^2)$ 为一平方数。这是从推论 3 即不存在 p 和 q 使 $p,2q,p^2-q^2$ 为平方数推得的。所有上述结论对非互素的整数也是成立的，且由推论 2，它们对分数也成立。

……

定理 2　不可能找到两个立方数，使其和或差是立方数。

首先考察以下事实：如果两个立方的和不是一个立方，那么两个立方的差也不是。实际上，如果 $x^3+y^3=z^3$ 是不可能的，那么 $z^3-y^3=x^3$ 也不可能。现 z^3-y^3 是两个立方的差；故如果一个命题成立，另一个同样成立。因此，若我们证明了和或者差中一种情况不成立，就足以证明该定理；而完成这个证明需要以下一系列的推理。

一、我们可以认为 x 和 y 是互素的；因为若他们有公因子，则它们的立方和也能被这公因子的立方整除。比如，设 $x=2a$，且 $y=2b$，则我们有 $x^3+y^3=8a^3+8b^3$；现在如果这个式子是一个立方，那么 a^3+b^3 就也是一个立方。

二、既然 x 和 y 没有公因子，那么它们两个要么同为奇数，要么一奇一偶。在第一种情况，z 是偶数，在另一种情况是奇数。所以，在 x、y、z 这三个数中，总是有一个是偶数，而另两个是奇数；

于是我们的证明只要考虑 x 和 y 都是奇数的情况就足够了：这是因为我们既可以证明对于和的问题的不可能性，也可以证明对于差的问题的不可能性，而当一个根为负时，和的情况就变成差的情况。

三、若 x 和 y 是奇数，显然它们的和与它们的差都是偶数，故设 $\frac{1}{2}(x+y)=p$，及 $\frac{1}{2}(x-y)=q$，于是我们有 $x=p+q$ 及 $y=p-q$；所以得知 p 和 q 这两个数中定有一个为偶数，而另一个为奇数。我们现在把 $(p+q)^3=x^3$ 和 $(p-q)^3=y^3$ 相加，得到 $x^3+y^3=2p^3+6pq^2=2p(p^2+3q^2)$；故只需证明积 $2p(p^2+3q^2)$ 不可能是立方数；又如果将此证明用于差的情况，则我们有 $x^3-y^3=6p^2+2q^3=2q(q^2+3p^2)$，若把 p 和 q 互换就得到完全一样的表达式。所以只要证明表达式 $2p(p^2+3q^2)$ 不可能为立方数就够了。由此必将有结论：和与差都不能是立方数。

四、若 $2p(p^2+3q^2)$ 是一立方数，那么它应是一偶数，于是它可以被 8 除。所以，此式的八分之一即 $\frac{1}{4}p(p^2+3q^3)$ 就一定是整数。我们知道，p 和 q 一个是偶数，另一个是奇数；故 p^2+3q^2 一定是一奇数，它不能被 4 整除，所以 4 整除 p，或者说 $p/4$ 一定是整数。

五、但为了使 $\frac{1}{4}p(p^2+3q^2)$ 为立方数，它的每个因子，除非有公因子，就一定分别都是立方数；因为如果两个互素的因子的积是立方数，那么每个因子一定是立方数；如果这两个因子有公因子，则情况就不同了，需要特殊考虑。故问题是要知道因子 p 和 p^2+3q^2 是否无公因子。为了判断此事就一定要考虑到，如果这些因子有公因子，那么 p^2 和 p^2+3q^2 将有相同的公因子；它们的差，即 $3q^2$ 将与 p^2 有相同的公因子。因 p 与 q 互素，所以 p^2 与 $3q^2$ 除了 3 以外不会有别的公因子，这就是 p 可被 3 整除时的情况。

六、我们现在有两种情况要考察：一个是 p 和 p^2+3q^2 没有公因子，这总是发生在 p 不能被 3 整除时；另一种情况是当这些因

子有公因子，即当 p 可被 3 整除时（因为此时这两个数都能被 3 整除）。我们必须仔细地区分这两种情况，因为每种情况都需要特别的证明。

七、第一种情况。设 p 不能被 3 除，则两个因子 $p/4$ 和 p^2+3q^2 互素；所以它们都必是立方数。为了使 p^2+3q^2 为立方数，就像我们以前所见的，我们只需设 $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$，及 $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$，即可得到 $p=t^3-9tu^2=t(t^2-9u^2)$，及 $q=3t^2u-3u^3=3u(t^2-u^2)$。因 q 是奇数，故 u 一定也是奇数，所以 t 是偶数，因为否则 t^2-u^2 将是偶数。

八、在把 p^2+3q^2 化为立方数，且找到 $p=t(t^2-9u^2)=t(t+3u)(t-3u)$ 以后，还要求 $p/4$ 为一立方数，所以 $2p$ 也应是立方数；或者换个说法，要求式子 $2t(t+3u)(t-3u)$ 是一个立方。但是必须注意到 t 是偶数，且不能被 3 整除，但我们已清楚地假设不是这种情形；所以三个因子 $2t, t+3u, t-3u$ 是互素的，而且每一个都各自为一立方数。于是，我们若令 $t+3u=f^3$，及 $t-3u=q^3$，我们将有 $2t=f^3+q^3$。所以，若 $2t$ 为立方数，我们将有两个立方数 f^3 和 q^3，它们的和为一立方数，并且它们显然要比最初假设的 x^3 和 y^3 小得多。事实上，因我们开始时已设 $x=p+q, y=p-q, p.q$ 又是由字母 t,u 决定的，所以 x 和 y 一定比 t 和 n 大得多。

九、于是，如果在较大的数中可以找到我们要求的这样两个立方数。则我们也会在小得多的数中找到两个立方数，它们的和为一立方数。用同样的方法，我们总会得到更小的立方数。现在已非常明确的是在较小的数当中没有这样的立方数，于是得到，在较大的数中也没有这样的立方数。这一结果论也将在第二种情况中得到证实。

十、第二种情况，现在让我们假设 p 可被 3 整除，而 q 不能，并设 $p=3r$；我们的表达式将变为$\frac{3}{4}r(qr^2+3q^2)$，或$\frac{9}{4}r(3r^2+q^2)$；这两个因子是互素的，这是因为 $3r^2+q^2$ 既不能被 2 也不能被 3 整除，而 r 一定也象 p 一样是偶数；于是这两个因子一定都是立方

数。

十一、现在用我们前面的方法变换第二个因子 $3r^2+q^2$ 或 q^2+3r^2,得到 $q=t(t^2-9u^2)$,$r=3u(t^2-u^2)$;必须注意的是,因 q 是奇数,故 t 必同样为奇数,因而 u 必定是偶数。

十二、但 $\frac{9}{4}r$ 一定也是立方数;或者乘以立方 $\frac{8}{27}$,我们得知 $\frac{2}{3}r$,即 $2u(t^2-u^2)=2u(t+u)(t-u)$ 为一立方数;且因这三个因子互素,故每个必定都是立方数。于是设 $t+u=f^3$,$t-u=q^3$,我们有 $2u=f^3-q^3$;也就是说,若 $2u$ 是立方数,则 f^3-q^3 一定为立方数。所以我们将会有两个立方数 f^3,和 q^3 它们比先前的其差为立方数的两个数要小得多。这将使我们能够找到两个其和为立方数的立方数;因为为了得到 $f^3=h^3+q^3$,即等于两个立方数之和的立方数,我们只须令 $f^3-q^3=h^3$。这样,前面说的结论就被完全证明了;这是因为我们不能在较大的数中找到两个立方数,其和或差为立方数,而这又是依据前面考察过的结论。"在较小的数中找不到这样的立方和"得来的。

48.2. 二次剩余的互反定理

二次剩余的互反定理,即二次互反律,被高斯誉为"算术的宝石",它首先是由欧拉发现的。欧拉虽未能给出其证明,但正如他本人预言的那样,二次互反律的研究成为19世纪数论的重要课题并引出了"许多伟大的结果"。

这里摘录欧拉的文章《平方数除以素数的报告》(Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos, Opuscula analytica, Saint Petersburg, 1783—85),是欧拉去世那年发表的,其中总结了欧拉过去关于二次剩余理论的工作,并加进了一些新的结果,最后就以现在称作"二次互反律"的公式结束。原文亦载 Euler:Opera omnia I. vol. 3. pp. 497～512. 以下是转译自 D. J. Struik:A Source Book in Math. pp. 41～46.

平方数除以素数的报告①

1. 假设。若数 a,b,c,d 等等的平方，即 a^2,b^2,c^2,d^2 等等，被任意的素数 p 除，则我们用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 等等来记它们的余数（或剩余）。

2. 推论 1. 因平方 aa 除以 P 余数为 α，设商为 A，则 $aa=AP+\alpha$，故 $aa-\alpha$ 可被 P 除尽，同样 $bb-\beta,cc-\gamma,dd-\delta$ 将被同一除数 P 除尽。

3. 推论 2. 平方数 $(a+P)^2,(a+2P)^2,(a+3P)^2,\cdots$ 或一般地 $(a+nP)^2$ 如果被所给的 P 除，则余数也是 α。由此可以清楚地看出，那些大数的平方和小数的平方被 P 除的余数相同。

4. 推论 3. 因平方数 $(P-a)^2$ 被 P 除时有与平方数 a^2 同样的余数，显然，(若 $a>\frac{1}{2}P$，则 $P-a<\frac{1}{2}P$)，我们可从小于除数 P 的一半的平方数得到所有不同的剩余。

5. 推论 4. 因此，若我们想求所有被所给的因子 P 除得到的剩余，只要考虑那些不超过 P 的一半的根的平方就足够了。

6. 推论 5. 若除数 $P=2P+1$，且用它除所有的平方数 1,4,9,16,25 等等，则得到的不同的剩余不会超过 p 个，且都从 $1,2,3,\cdots,p$ 的平方的剩余得到。而 $p+1,p+2,p+3$ 等的平方的剩余与上面的剩余相同，不过次序相反。

7. 附注. 显然，若两个平方数 p^2 和 $(p+1)^2$ 被 $2p+1$ 除，因为它们的差可以被 $2p+1$ 除尽，所以有相同的余数。因此，一般地，若任意两个数的差 $M-N$ 可被 $2p+1$ 整除，则 M 和 N 被 $2p+1$ 除必有相同的余数。同样，因为 $(p+2)^2-(p-1)^2=3(2p+1)$，而 $(p+2)^2,(p-1)^2$ 本身为平方数，所以它们也一定有相同的余数。

---

① 这篇文章所论述的是二次剩余理论，实际上它的基础已在欧拉《费马定理，即"每一数，不管是整数或分数，都是四个或更少的平方数的和"的证明》(Demonstrationes theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum, Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae 5. 1754 155, publ, 1760)一文中有所体现。

并且一般地，平方数$(p+n+1)^2$将与平方数$(p-n)^2$有相同的剩余。故明显地剩余不超过p个，至于这些剩余是各自不同的还是有一些是相同的则不能确定；我们承认，到目前为止，对所有不同类型的因子，两种情况都会发生。不过，若除数$2p+1$是素数，则所有的剩余都互不相同，对此下面我要加以证明。

8. 定理 1 若除数$P=2p+1$是一素数，且用它来除所有不大于p^2的平方数1，4，9，16，…则所有这样得到的剩余都互不相同，且它们的个数为p。

证明： 设a和b为任意两个小于或（退一步说）为不大于p的数。我们要证如果它们的平方a^2和b^2被素数$2p+1$所除，则余数一定是不同的。实际上，假如它们有相同的余数，则差$aa-bb$将能被$2p+1$整除，于是因$2p+1$是素数，在$aa-bb=(a+b)(a-b)$中一个因子将被$2p+1$除尽。但因$a<p$且$b<p$，或者退一步说它们都不大于p，$a+b$与$a-b$的绝对值都必定比$2p+1$小，所以两个因子哪个也不能被$2p+1$除尽。由此明显得知，所有根不大于p的平方数，当被素数$2p+1$所除时，一定有互不相同的余数。

……

12. 附注．我把那些小于$2p+1$，又不在剩余之列的数叫作非剩余[①]，其个数总等于剩余的个数。正确研究剩余和非剩余的差别是很有用的。为此目的，我写出几个较小的素除数的剩余和非剩余。

除数 3，$p=1$	除数 5，$p=2$	除数 7，$p=3$
平方数 1	平方数 1，4	平方数 1，4，9
剩余 1	剩余 1，4	剩余 1，4，2
非剩余 2	非剩余 2，3	非剩余 3，5，6

除数 19，$p=9$

平方数 1，4，9，16，25，36，49，64，81

① 前面并没有详细阐述这一概念，现在这里引入，并且以后还由它推出定理 4 和定理 5。

剩余 1,4,9,16,6,17,11,7,5

非剩余 2,3,8,10,12,13,14,15,18

我们将首先发现，对任何素除数的剩余和非剩余的那些应好好研究的值得注意的性质。看来它会给数论带来很多有趣的结果。

13. **定理 2** 如果在从除数 P 得来的剩余序列中有两个是 α 和 β，则如果它们的积 $\alpha\beta$ 小于除数 P，就也出现在剩余序列中，但如果这个积大于 P，则我们用 $\alpha\beta-P$ 或 $\alpha\beta-2P$，或一般地 $\alpha\beta-nP$ 来代替 $\alpha\beta$，直到其小于 P 时，就会发现它也是在剩余序列中。

证明： 设 α 和 β 为平方数 aa 和 bb 除以 P 得到的余数，则我们有

$$aa=AP+\alpha \text{ 和 } bb=BP+\beta$$

所以

$$aabb=ABP^2+(A\beta+B\alpha)P+\alpha\beta$$

于是，$aabb$ 被 P 除得余数 $\alpha\beta$，或者，若 $\alpha\beta$ 大于 P，则我们所要的余数一定是 $\alpha\beta$ 除以 P 所得到的余数，即它可能是 $\alpha\beta-P$，也可能是 $\alpha\beta-2P$，或者是 $\alpha\beta-3P$，一般地讲，是小于 P 的 $\alpha\beta-nP$。

……

18. **定理 3** 如果在由除数 P 得到剩余序列中有两个剩余 α 和 β，则 $(\alpha+nP)/\beta$ 也是剩余，这里 n 要大到足以使 $(\alpha+n\beta)/\beta$ 为一整数。这总是可以做到的。

证明： 设 aa 和 bb 为平方数，它们在除以 P 后得到余数 α 和 β，则我们有：

$$aa=AP+\alpha \text{ 和 } bb=BP+\beta$$

我们现在要找 C，使 $C=(a+mp)/b$ 是一个整数，则

$$cc=\frac{aa+2amP+mmPP}{bb}=\frac{\alpha+(A+2am+mmP)P}{\beta+\beta P}$$

是一整数。因分子也有余数 α，而分母有余数 β，故显然若 cc 除以 P，剩余将被化归为所要求的形式。实际上，为简洁起见，设 $A+$

$2a$[①] $m+mmP=D$，则 $cc=(\alpha+DP)/(\beta+BP)$；于是若 $(\alpha+np)/\beta=\nu$，则需证明 $cc=CP+\nu$，从而平方数 cc 除以 P 的余数 $=\nu$。但 $\alpha=\beta\nu-nP$，这样可以写作

$$CC=\frac{\beta\gamma+(D-n)P}{\beta+BP}=CP+\gamma$$

由此得到

$$(D-n)P=(\beta C+\gamma B+BCP)P$$

或

$$D-n=\beta C+\gamma B+BCP$$

这正是为得到整数所需要的 P 的系数之间的关系。

……

23. **定理 4** 若除数 P 是 $4q+3$ 形式的数，则 -1 或 $P-1$ 一定是非剩余。

证明： 若把 P 写作 $P=2p+1$，则 $p=2q+1$，是奇数。于是所有余数的总数是奇数。假如 -1 出现在剩余序列中，则对每个剩余 α，相应地 $-\alpha$ 也为剩余，且剩余序列可写出如下：

$$+1,+\alpha,+\beta,+\gamma,+\delta,\text{等等}$$
$$-1,-\alpha,-\beta,-\gamma,-\delta,\text{等等}$$

这样，剩余的个数是偶数了。但是因为它一定是奇数，所以 -1 或 $P-1$ 不可能在剩余序列中出现；因而属于非剩余系列。

……

30. **定理 5** 若除数 P 是 $4q+1$ 形式的素数，则 -1 或 $P-1$ 一定是剩余[②]。

……

附注 3. 只要除数是 $4q+1$ 形式的素数，则 -1 就是剩余，但

---

① 原文误为 α。

② 这个定理的证明采用与定理 4 相同的间接证法，但要把每个剩余与它们的倒数（此处数 α 的倒数是指满足同余式 $\alpha\beta\equiv1(\mathrm{mod}P)$ 的整数 β。）配对比较。在给出五个推论后，在附注 1 中指出了 α 和它的倒数 $(1+np)/\alpha$ 的重要性，并对 3 到 29 的所有素除数，列出了这些配对组。欧拉写道，这一事实给出了费马的定理"每个 $4q+1$ 形式的素数都是两个平方数的和"的一个简单证明。附注 2 列出了 $4q+1$ 型的除数和它的剩余及其倒数的表，-1 包括在所有情况当中，然后他在附注 3 中总结出结论。

当另一素数 S 出现在素除数的这种表达式中时，却不能证明 S 就是剩余。我们可以把这个定理写作：

如果素除数的形式为 $4ns+(2x+1)^2$，其中 S 为一素数，则 $+S$ 和 $-S$ 是剩余。另一个类似的定理是：

如果素除数的形式为 $4ns-(2x+1)^2$，其中 S 为一素数，则 S 为剩余，而 $-S$ 为非剩余。

相反的情况，即 $-S$ 为剩余，$+S$ 为非剩余的情况不能一般地界定。然而一些特殊情形可以这样表述：

如果	则素因子一定是
{−2 是剩余 +2 是非剩余	$P=8n+3$
{−3 是剩余 +3 是非剩余	$P=12n+7$
等等， 一直到 ±23	$P=92n+3,23,27,\cdots,87$。

考察了上面的例子后得到下述定理：

若素因子形式为 $4ns-4z-1$，其中 S 为一素数，则除掉所有 $4ns-(2x+1)^2$ 形式的值外，$-S$ 为剩余，而 $+S$ 是非剩余。

除以上定理外，我们还要加上下面的定理：

若素除数形式为 $4ns+4z+1$，其中 S 为一素数，则除去所有 $4ns+(2x+1)^2$ 形式的值外，$+S$ 和 $-S$ 都是非剩余。

我加上这些定理为的是让愿意深入思考的人去寻找其证明，因为无疑这将给数论增添许多伟大的结果。

结论[①] 从现在起需要寻找其证明的这最后的四个定理可以紧凑地归纳为：

---

① 欧拉总结的这一定理后来经勒让德和高斯的工作以“二次剩余的互反定理”即“二次互反律”而闻名于世。这一定理已含在欧拉较早的一篇论文(Theoremata circa divisores numerorum in hac forma paa＋qbb Contentorum, Comm. Acad. Sci. petropolitanae 14. 1744/46, publ. 1751, pp. 151～181)中，但并没有完全展开。克罗内克在 1875 年指出了这一点并评价了欧拉的这个定理在互反定理的历史发展中的重要性。

设 S 为某个素数。仅让奇数的平方 1,9,25,49,等等被 $4S$ 所除,则其余数都可以表示成 $4q+1$ 的形式。将这些余数用字母 α 来表示,而不是余数的 $4q+1$ 形式的数用字母 A 来表示。那么我们有:

若除数是下列形式的素数	则
$4nS+\alpha$	$+S$ 是剩余,$-S$ 是剩余
$4nS-\alpha$	$+S$ 是剩余,$-S$ 是非剩余
$4nS+A$	$+S$ 是非剩余,$-S$ 是非剩余
$4nS-A$	$+S$ 是非剩余,$-S$ 是剩余

(李家宏 译　朱尧辰 校)

49. 高斯:《算术研究》及其他

高斯在哥廷根读书时就开始了数论研究,可以说数论正是经高斯之手而被赋予了"数学的王后"这顶桂冠。高斯 24 岁时出版了《算术研究》(Disquisitiones Arithmeticae, Göttingen, 1801),全书共分七章:一般同余论;一次同余;幂剩余;二次同余;二次型;应用;分圆问题。这是一部划时代的著作,它奠定了近代数论的基础。

49.1. 论数的同余

同余式研究可以追溯到古代,但高斯在《算术研究》中首先用近代的严格观点给出了系统处理。同余记号也是在该书中首先创用。以下选录《算术研究》第一章——一般同余论,转译自 D.E. Smith:A Source Book in Math. pp. 107~111,《算术研究》原文亦载 F. Gauss:Werke I. Göttingen,1870。

第1章 关于数的同余的一般理论

同余数、模、剩余和非剩余

1

如果数 a 整除数 b 和 c 的差,那么 b 和 c 被称做对于 a 同余;不然,称为不同余。我们把 a 叫做模。在前一情形,数 b 和 c 中每一个都称为另一个的剩余,但在后一情形则称为非剩余。

这些概念可应用于所有正的和负的整数[①],但不能用于小数。例如,-9 和 $+16$ 对于模 5 同余;-7 是 $+15$ 对于模 11 的剩余,但是 $+15$ 对于模 3 的非剩余。现在,因为每个数都整除零,所以每个

① 显然,模总是绝对地取的,也就是说,不带任何符号。——原注

数应当看做对于所有的模与自身同余。

2

如果 k 表示一个非确定的整数,那么一个给定的数 a 对于模 m 的所有剩余都被包含在公式 $a+km$ 之中。除了任何人都很容易一眼看出其正确性外,我们将要给出的一些简易的命题都可以很快以此观点证明。

我们今后用符号≡来表示两个数同余,并且在必要时用圆括号添上模。例如,$-16\equiv 9(\bmod 5)$,$-7\equiv 15(\bmod 11)$[①]。

3

定理 如果给定 m 个连续整数

$$a,a+1,a+2,\cdots,a+m-1$$

以及另一整数 A,那么前面那些数中有一个对于模 m 与此数 A 同余;并且实际上只存在一个这样的数。

例如,如果$\frac{a-A}{m}$是整数,那么我们有 $a\equiv A$;但若它是小数,则令 k 是接近于它的最大整数(或者,若上面的小数是负的,则取 k 为不计符号接近于它的最小整数)。于是 $A+km$ 落在 a 和 $a+m$ 之间。因而就是所要的数。现在显然所有的商$\frac{a-A}{m}$,$\frac{a+1-A}{m}$,$\frac{a+2-A}{m}$,等等,均落在 $k-1$ 和 $k+1$ 之间,因而不可能有一个以上整数。

最小剩余

4

于是每个数不仅在序列 $0,1,2,\cdots,m-1$ 中,而且在序列 $0,-1,-2,\cdots,-(m-1)$ 中也有剩余。我们称它们为最小剩余。现在显然除非 0 是它的剩余,不然总有一正一负两个剩余。如果它们有

① 考虑到相等与同余之间存在极大的类似,我们采用这个符号。由于同样的原因,勒让德(A. M. Legendre,)在一篇论文(我们后文常引用它)中保留等号用于同余。我们担心若跟随他的这种记法难免引起混淆。——原注

不同的大小(magnitude)[1],那么其中之一将小于$\frac{m}{2}$;如果它们大小相同,那么不计符号它们都等于$\frac{m}{2}$。由此显见任何数都有大小不超过模的一半的剩余。这个剩余叫做绝对极小。

例如,对于模 5,-13 有正的最小剩余 2,它同时也是绝对极小;而-3 是负的最小剩余。对于模 7,$+5$ 的正的最小剩余就是它本身,而-2是其负的最小剩余,同时是绝对极小。

同余的基本性质

5

从刚才建立的概念我们可以导出下列同余数的显然性质:

对于复合模同余的数必然对于复合模的任一因子也同余。

如果几个数对于同一个模与同一个数同余,那么它们互相也(对于同一个模)同余。

下面我们把出现的模理解为是相同的。

互相同余的数有相同的最小剩余,互不同余的数有不同的最小剩余。

6

如果数 A,B,C,等等及数 a,b,c,等等对于任意的一个模一一同余,亦即

$$A\equiv a,B\equiv b,\text{等等},$$

那么我们有

$$A+B+C+\text{等等}\equiv a+b+c+\text{等等}。$$

如果 $A\equiv a$ 且 $B\equiv b$,那么我们有 $A-B\equiv a-b$。

7

如果 $A\equiv a$,那么也有 $kA\equiv ka$。

若 k 是正数,则它只是上节命题当 $A=B=C=$等等及 $a=b=c=$等等的特殊情形。若 k 是负数,则 $-k$ 是正数,于是 $-kA\equiv$

① 用现代术语,即绝对值。

$-ka$,因而 $kA\equiv ka$。

如果 $A\equiv a, B\equiv b$,那么 $AB\equiv ab$。因为 $AB\equiv Ab\equiv ba$。

8

如果数 A, B, C, 等等与数 a, b, c, 等等一一同余, 亦即 $A\equiv a$, $B\equiv b$, 等等, 那么每组数之积也同余, 亦即 ABC 等等 $\equiv abc$ 等等。

由前节可知 $AB\equiv ab$,同理 $ABC\equiv abc$,同样地考虑更多因子之积,即得所要结果。

如果我们令所有数 A,B,C,等等,相等,对应地所有数 a,b,c,等等,也相等,那么我们得定理:

如果 $A\equiv a$,且 k 是正整数,那么 $A^k\equiv a^k$。

9

设 X 是不定元 x 的下列形式的函数:

$$Ax^a+Bx^b+Cx^c+\cdots$$

其中 A,B,C,等等,表示任何整数,而 a,b,c,等等,是非负整数,现若令不定元 x 取对于任意给定的模同余的值,那么所得函数 X 的值也同余。

令 f 和 g 是 x 的两个互相同余的值。那么由前节知 $f^a\equiv g^a$ 及 $Af^a\equiv Ag^a$;同样 $Bf^b\equiv Bg^b$,等等。因此

$Af^a+Bf^b+cf^c+$等等$\equiv Ag^a+Bg^b+Cg^c+$等等。　　(证完)

还容易看出怎样把这个定理扩充到多个不定元的函数。

10

因此,如果所有连续整数都被用来代换 x,并且函数 X 的值都归结为最小剩余,那么这些剩余将组成一个序列,它的每一项都在一个 m 项的区间中重复(m 是模);或者,换言之,这个序列是由一个 m 项的周期无限地重复而形成。例如,令 $X=x^3-8x+6$ 及 $m=5$。那么当 $x=0,1,2,3$,等等,X 的值给出正的最小剩余 1,4,3,4,3,1,4,等等,其中最初五个数即 1,4,3,4,3 无终止地重复。此外,如果反向延续这个序列,亦即令 x 取负值,那么同样的周期将反序出现。于是显然与组成周期的项不同的数不可能在这个序列

中出现。

11

于是，在这个例子中 X 既不能$\equiv 0$ 也不能$\equiv 2 \pmod 5$，并且还不可能$=0$ 或$=2$。由此得知方程 $x^3-8x+6=0$ 及 $x^3-8x+4=0$ 不可能有整数解，从而如我们所知，也不可能有有理数解。显然，一般地下面命题也正确：如果 X 是未知元 x 的形如

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\cdots+N$$

的函数，其中 A,B,C，等等是整数，n 是正整数（已知所有代数方程都可以化为这个形式），那么若对于某些特殊的模同余式 $X\equiv 0$ 不可能满足，则方程 $X=0$ 没有有理根，这个判别准则在此是用自然的方式给出的，在第Ⅷ节中我们将以更长的篇幅加以研究。

……

一些应用

12

通常在算术中考虑的许多定理都依赖于在此节所给出的定理；例如，关于检验一个数被 9,11 或其他数整除的法则。对于模 9,10 的所有的幂都同余于 1。因此，如果一个数是 $a+10b+100c+$ 等等的形式，那么对于模 9，它具有与 $a+b+c+$ 等等相同的最小剩余。由此显然可见，一个给定的十进制表示的数，将其各个数字不计它们的数位相加，得到的和必定与该数有相同的最小剩余；因而，若这个数字和能被 9 整除，则该数可被 9 整除，反过来也成立。同样的结论对于除数是 3 也正确。因为对于模 11，$100\equiv 1$，所以一般地，我们有 $10^{2k}\equiv 1$ 及 $10^{2k+1}\equiv 10\equiv -1$。于是，一个 $a+10b+100c+$ 等等形式的数对于模 11，将有与 $a-b+c-$ 等等相同的最小剩余；因而我们已知的法则立即导出来。依据同样的原理，所有类似的法则都容易推出来。

前面的考察也为通常检验算术运算所依据的那些法则提供了基本原理。当然，当我们需要从一些给定的数通过加、减、乘或乘方去求另一些数时，这个评注也是可用的：我们只须将这些给定的数

用它们对于一个任意的模的最小剩余来代替(通常可取模 9 或 11;因为如我们刚才看到的,在十进制中对于这些模的剩余是非常容易求出的)。这样算出的数应当与从给定的数算出的数同余,另一方面,如果不是这样,那么我们推测计算中潜藏着错误。

现因这些结果及其他类似的性质都是非常熟知的,所以我们不想把它们作为进一步研究的目标。

49.2. 二次互反律的第三个证明

《算术研究》第四章包含了同余理论的中心结果——二次互反律的证明。二次互反律,高斯称其为“基本定理”。如本书[48]所见,它最先为欧拉发现。1885 年勒让德(A. M. Legendre,1752～1833)独立地陈述了这一定理并给出了一个证明。“二次互反律”这个名称也是属于勒让德。但勒让德的证明是不成立的。事实上,他的证明暗中假定了在某个算术级数中存在无穷多个素数,而这一事实在半个世纪后才被狄利克雷首先证明。这样,高斯在《算术研究》中给出的二次互反律证明,乃是历史上第一个严格的证明。据考高斯早在 1796 年已发现这一定律的一个证明。在《算术研究》出版后的 17 年里,他又发表了其他四个证明,加上在他未发表的文稿中找到的另外两个证明,高斯先后给出了二次互反律的八个证明。以下我们选录高斯发表的第三个证明,高斯和其他人都认为这是他八个证明中最直接、最机巧的证明,原文载 Commentationes Societatis Regioe Scientiarum Göttingensis, vol. 16. Göttingen, 1808 和 Gauss: Werke Ⅱ. pp. 1～8,ötting-en, 1876,这里转译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. pp. 112～118。

1. 高等算术问题常常呈现值得注意的、很少在更一般的分析学中出现的特性,并且增强了算术主题的优美性。同时分析的研究

仅是在算术主题的基本原理(它们在一定程度上打开了通向真理之路)被完全掌握之后才导致新的真理的发现;相反地,在算术中最优美的定理常常是或多或少由于意外地碰上好运气而经验地发现,同时它们的证明是如此深深地嵌在黑暗之中,使得所有的尝试都被困倒,最机敏的探究也遭到失败。另外,乍看似乎性质相差很远的算术真理之间的联系是如此地紧密,以致于人们并非不常有好运气(用完全意外的方法和相当不同的探究)去找到一个人们极其想要得到并且不计代价地寻找的真理的证明。这些真理常常具有这样的特性,它们可以通过许多不同的途经达到,并且第一个被发现的途迳不总是最短的。因此,一个人在无结果地深思一个真理后能够用迂回的方法证明它、并且最后找到了它的最简单而又最自然的证法,那是极其令人高兴的。

2. 由于它本质上含有整个二次剩余理论而使我们在《Disquisitiones Arithmetica》的第 4 章中称之为基本定理的那个定理,在我们上节谈到过的问题中占有显要的位置。我们应当把勒让德看作这个非常优美的定理的发明人,虽然以前著名的几何学家欧拉和拉格朗日(J. L. Lagrange)已发现了它的特殊情形。我不想在此停留去列举这些提供证明的人所作的尝试,对此感兴趣的人可以去读上面提到的著作。我本人所作的全部尝试足以证实我上节中的论断的正确性。我于 1795 年独立地发现了这个定理,那时候我对于我将在高等算术中能达到什么目的全然无知,因而也没有从该主题的文献中得到哪怕是极微小的帮助。在整整一年的时间内,这个定理困扰着我,激起我极大的努力,直至我最终得到在上述著作的第 4 章中给出的那个证明。后来我又偶然碰上基于完全不同原理的另外三个证明。其中一个已经在该书第 5 章中给出,另外两个,它们的机巧性比不上头一个,我准备以后发表。虽然这些证明在严密性方面没有任何问题,但它们是由相去很远的出发点导出的(也许第一个是例外,但它是通过困难的论证和超负荷的大量运算完成的)。我要毫不犹豫地说,直到现在为止一个自然的证明也没有产生。我让权威们去评判,下面这个我最近非常幸运地发现的

证明是否值得用这个词来形容①。

3. 定理② 设 p 是正素数，k 是任何不被 p 整除的数。还设 A 表示数集

$$1,2,3,\cdots,\frac{(p-1)}{2},$$

B 表示数集

$$\left(\frac{p+1}{2}\right),\left(\frac{p+3}{2}\right),\cdots,p-1。$$

我们确定 k 与集 A 中的数的乘积对于模 p 的最小正剩余。它们是互异的，并且一部分属于 A，一部分属于 B。如果用 μ 表示属于 B 的剩余的个数，那么依据 μ 是奇或偶，决定 k 是 p 的二次剩余或二次非剩余。

证明 设 $a,a',a'',\cdots$ 是属于集合 A 的剩余，$b,b',b'',\cdots$ 是属于集合 B 的剩余。那么显然下面这些差 $p-b,p-b',p-b'',\cdots$ 将不等于 $a,a',a'',\cdots$ 中任一数，并且这两组数合在一起构成了集合 A。因此我们有

$$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)$$
$$=a\cdot a'\cdot a''\cdot\cdots\cdot(p-b)(p-b')(p-b'')\cdots。$$

---

① 由于高斯在引进他的第三个证明、甚至在正式叙述定理本身时都没有给出任何数学背景（这些是在他的第一个证明中给出的），这里补充一些对于真正理解定理必需的信息。

依据同余式 $x^2\equiv p(\bmod q)$ 有或没有解 x，整数 p 被称做与 p 互素的整数 q 的二次剩余或二次非剩余。这两种情形都可用符号分别写作 p^Rq 及 p^Nq. 如果 p 和 r 都是 q 的剩余或都是 q 的非剩余，那么我们就说它们对于 q 有相同的二次特征。在这种理解下，基本定理可用语言叙述如下：如果 p 和 q 是任意不同的奇素数，那么 p 对于 q 的二次特征与 q 对于 p 的二次特征相同，除非 p 和 q 都是 $4n-1$ 形式的数，在这种情形它们有相反的二次特征。

p 对于 q 的二次特征可以用勒让德符号 $(\frac{p}{q})$ 表示，依据 p^Rq 或 p^Nq 这个符号取值 $+1$ 或 -1。使用这个符号我们可将定理解析地叙述为

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$ —— 原注

② 这个定理现在称做高斯引理，而且数 μ 称做特征数。——原注

右边的积对于模 p 显然

$$\equiv(-1)^{\mu}aa'a''\cdots bb'b''\cdots\equiv(-1)^{\mu}k\cdot 2k\cdot 3k\cdot\cdots\cdot k\frac{p-1}{2}$$

$$\equiv(-1)^{\mu}k^{(\frac{p-1}{2})}1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\frac{p-1}{2}。$$

因此

$$1\equiv(-1)^{\mu}k^{(\frac{p-1}{2})},$$

这就是 $k^{\frac{p-1}{2}}\equiv\pm 1$,其中符号选取依照 μ 是偶或奇。于是立得定理[①]。

4. 引进下列方便的记号可以使下面的讨论大为缩短。用符号 (k,p)[②]表示乘积

$$k,2k,3k,\cdots,k\frac{p-1}{2}$$

中其对于模 p 的最小正剩余超过 $p/2$ 的数的个数。另外,如果 x 不是整数,那么用符号$[x]$表示小于 x 的最大整数,于是 $x-[x]$总是 0 与 1 之间的正数。我们实际上可建立下列诸关系式:

Ⅰ. $[x]+[-x]=-1$。

Ⅱ. $[x]+h=[x+h]$,其中 h 是整数。

Ⅲ. $[x]+[h-x]=h-1$。

Ⅳ. 如果 $x-[x]$是小于½的小数,那么有$[2x]-2[x]=0$。另一方面,如果 $x-[x]$大于½,那么$[2x]-2[x]=1$。

Ⅴ. 如果 h 的最小正剩余(模 p)小于 $p/2$,那么$[2h/p]-2[h/p]=0$。但如果它大于 $p/2$,那么$[2h/p]-2[h/p]=1$。

Ⅵ. 由此可推出

$$(k,p)=[\frac{2k}{p}]+[\frac{4k}{p}]+[\frac{6k}{p}]+\cdots+[\frac{(p-1)k}{p}]$$
$$-2[\frac{k}{p}]-2[\frac{2k}{p}]-2[\frac{3k}{p}]-\cdots-2[\frac{k(p-1)/2}{p}]。$$

---

① 这由下列著名的欧拉判别法得到:依据 k 是或否 p 的二次剩余,有 $k^{\frac{p-1}{2}}\equiv\pm 1$。——原注

② 符号(k,p)代替了前节中的特征数 μ。——原注

Ⅶ. 从Ⅵ和Ⅰ我们不难得到

$$(k,p)+(-k,p)=\frac{p-1}{2}。$$

由此可以推出,依据 p 是 $4n+1$ 形的或 $4n+3$ 形的数,$-k$ 与 k 对于 p 的二次特征相同或相反。显然,-1 在第一种情形是 p 的剩余,在第二种情形是 p 的非剩余。

Ⅷ. 我们把Ⅵ中的公式转换如下:由Ⅲ我们有

$$\left[\frac{(p-1)k}{p}\right]=k-1-\left[\frac{k}{p}\right],\left[\frac{(p-3)k}{p}\right]=k-1-\left[\frac{3k}{p}\right],$$

$$\left[\frac{(p-5)k}{p}\right]=k-1-\left[\frac{5k}{p}\right],\cdots$$

当我们将这些代换用于上面级数的最后 $\frac{p\mp 1}{4}$ 项时,我们有:

第一,当 p 是 $4n+1$ 形的数,

$$\begin{aligned}(k,p)=&\frac{(k-1)(p-1)}{4}\\&-2\left\{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\left[\frac{5k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{k(p-3)/2}{p}\right]\right\}\\&-\left\{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{2k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{k(p-1)/2}{p}\right]\right\}。\end{aligned}$$

第二,当 p 是 $4n+3$ 形的数,

$$\begin{aligned}(k,p)=&\frac{(k-1)(p+1)}{4}\\&-2\left\{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\left[\frac{5k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{k(p-1)/2}{p}\right]\right\}\\&-\left\{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{2k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{k(p-1)/2}{p}\right]\right\}。\end{aligned}$$

Ⅸ. 在特殊情形 $k=+2$,从上面公式①推出 $(2,p)=(p\mp 1)/4$,其中依 p 是 $4n+1$ 或 $4n+3$ 的形式的数分别取负号或正号。因此当 p 是形如 $8n+1$ 或 $8n+7$ 的数时 $(2,p)$ 是偶数,因而 $2Rp$;另一方面,当 p 是形如 $8n+3$ 或 $8n+5$ 的数时,$(2,p)$ 为奇数,故 $2Np$。

---

① 此时因为方括号中的数都小于 1,所以花括号中每项都为零。——原注

5. 定理 设 x 是正的非整数,它的倍数 $x,2x,3x,\cdots,nx$ 中没有一个整数;令 $[nx]=h$,于是易推知 x 的倒数的倍数 $\frac{1}{x},\frac{2}{x},\frac{3}{x},\cdots,\frac{h}{x}$ 中也没有整数。那么我们有

$$[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]+\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\left[\frac{3}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{h}{x}\right]=nh$$

证明 在级数 $[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]$(我们令它等于 Ω)中,从第一项起到第 $\left[\frac{1}{x}\right]$ 项止每项显然都是零,紧接着直到第 $\left[\frac{2}{x}\right]$ 项止各项都等于 1,然后直到第 $\left[\frac{3}{x}\right]$ 项各项都等于 2,等等。于是我们有

$$\begin{aligned}\Omega &=0\times\left[\frac{1}{x}\right]+1\times\left\{\left[\frac{2}{x}\right]-\left[\frac{1}{x}\right]\right\}+2\times\left\{\left[\frac{3}{x}\right]-\left[\frac{2}{x}\right]\right\}+\\&\quad 3\times\left\{\left[\frac{4}{x}\right]-\left[\frac{3}{x}\right]\right\}+\cdots\\&\quad+(h-1)\left\{\left[\frac{h}{x}\right]-\left[\frac{h-1}{x}\right]\right\}+h\left\{n-\left[\frac{h}{x}\right]\right\}\\&=hn-\left[\frac{1}{x}\right]-\left[\frac{2}{x}\right]-\left[\frac{3}{x}\right]-\cdots-\left[\frac{h}{x}\right]。\end{aligned}$$

(证完)

6. 定理 如果 k 和 p 是互素的正奇数,那么我们有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{2k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{k(p-1)/2}{p}\right]\\&+\left[\frac{p}{k}\right]+\left[\frac{2p}{k}\right]+\left[\frac{3p}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{p(k-1)/2}{k}\right]\\&=\frac{(k-1)(p-1)}{4}\end{aligned}$$

证明 设 $k<p$,则我们有 $\frac{k(p-1)/2}{p}<\frac{k}{2}$ 但 $>\frac{k-1}{2}$,因此

$$\left[\frac{k(p-1)/2}{p}\right]=\frac{k-1}{2}。$$

由此显然可见,若在前节定理中令

$$\frac{k}{p}=x, \frac{p-1}{2}=n, \frac{k-1}{2}=h$$

则可立即由它推出本定理。

可类似地证明，若 k 是与 p 互素的偶数，则有

$$\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{2k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{k(p-1)/2}{p}\right]$$
$$+\left[\frac{p}{k}\right]+\left[\frac{2p}{k}\right]+\left[\frac{3p}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{kp/2}{k}\right]=k\,\frac{p-1}{4}$$

但我们不去证明这个命题，因为它对于我们的目的不是必须的。

7. 现在把上面最后那个定理与第 4 节的命题Ⅷ组合起来就可推出主要定理。因为，如果我们设 k 和 p 是任何不同的正素数①，且令

$$(k,p)+\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{2k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{k(p-1)/2}{p}\right]=L,$$

$$(p,k)+\left[\frac{p}{k}\right]+\left[\frac{2p}{k}\right]+\left[\frac{3p}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{p(k-1)/2}{p}\right]=M,$$

那么从第 4 节的Ⅷ可知 L 和 M 总是偶数。于是由第 6 节的定理推出

$$L+M=(k,p)+(p,k)+\frac{(k-1)(p-1)}{4}。$$

因而，当 $(k-1)(p-1)/4$ 是偶数时，若素数 k 或 p 中的一个或两个是 $4n+1$ 形式，则 (p,k) 和 (k,p) 或同为偶数或同为奇数。反之，当 $(k-1)(p-1)/4$ 是奇数时，若 k 和 p 都是 $4n+3$ 形式，则数 (k,p) 和 (p,k) 必定一偶一奇。在第一种情形，k 对于 p 的关系及 p 对于 k 的关系（即关于一数对于另一数的二次特征）是相同的；在第二种情形，它们是相反的。（证完）

（朱尧辰 译　徐广善 校）

---

① 其中 k 和 p 还必须不等于 2。——原注

50. 库默尔：论理想数

E. E. 库默尔(Kummer,1810～1893)生于索劳(Sorau,今波兰境内),卒于柏林,1842～1855 和 1855～1884 年期间先后任布雷斯劳大学与柏林大学数学教授。库默尔对数学的多个分支作出了有价值的贡献,其中最突出的成就是理想数理论的创立。

库默尔为证明费马大定理的巨大努力导致他引进了复数的理想素因子概念,借助它能使在算术基本定理(即每个整数都可唯一地表成素数的乘积)不成立的域中恢复唯一因子分解。库默尔的工作后被戴德金(J. W. R. Dedekind)推广为更一般的理想理论,开辟了代数数论这一具有广阔前景的崭新领域,并深刻影响了代数学的发展。理想数的应用使费马大定理本身的研究也取得了空前进展(库默尔本人就证明了费马大定理对直到 100 的每个 n 成立)。

以下选录库默尔 1847 年发表于克勒尔(Crelle)的《纯粹与应用数学杂志》(Journal für die reine und angewandte Mathematik)上的有关论文(vol. 35. pp. 319～326),转译自 D. E. Smith:A Source Book in Math. pp. 119～126.

关于复数理论

1845 年 3 月在柏林皇家科学院(Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin)的报告的摘要

我已成功地完成并简化了这样的一些复数的理论,它们由高次单位根所组成,并且如我们所知,在割圆问题以及幂剩余和高次型的研究中起着重要作用;我是通过引进一类特殊的虚数因子(我

将它称做理想复数)而做到的,对此我要冒昧地做一些说明。

如果 α 是方程 $\alpha^\lambda=1$ 的一个虚根,λ 是素数,而 a,a_1,a_2 等是整数,那么 $f(\alpha)=a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$是一个复整数。这样的复数或者可以分解为同样类型的复因子之积,或者这样的分解不可能。在第一种情形,该数是复合数;在第二种情形,它迄今被称做复素数。但是,我发现,虽然 $f(\alpha)$不可能用任何方式分解复因子,但它仍然不具备复素数的真正品格,因为,相当普遍地,它缺乏素数的首要的也是最重要的性质,即两个素数之积不可能被其他素数整除。相反地,这种数 $f(\alpha)$虽然不能分解复因子,但却具有复合数的性质;不过此时的因子不是通常的而是理想的复数。对于引进这样的理想复数,有着简单的、基本的动机,正如同将虚数公式引进代数和分析以使有理整函数分解为它的最简单因子即线性因子那样。此外,它也是高斯首次引进 $a+b\sqrt{-1}$形式的复数以研究双二次剩余时所急于寻找的东西(因为所有 $4m+1$ 形的这种素因子都显示出复合数的性质)。

为了保证复数的正确的(通常是理想的)素因子定义的合理性,必须利用复数的素因子的那些性质,它们在每种情况下都成立,并且与真实的分解是否发生这种偶然性完全无关:这正如在几何中那样,如果即使在两圆不相交的情况下也有公共弦问题,那么我们就去寻找这些理想的公共弦的真实定义,它对两圆的所有位置都成立。存在着几个这样的复数的不变性质,它们可以用来作为理想素因子的定义并且本质上总导致相同的结果;在其中我们选取最简单而又最一般的一个。

如果 p 是一个 $m\lambda+1$ 形式的素数,那么它在许多情形下可以表示为下列 $\lambda-1$ 个复因子之积:$p=f(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\cdots f(\alpha^{\lambda-1})$;但是,当分解为真实复素因子是不可能的时候,则让理想数来使之可能。如果 $f(\alpha)$是一个真实复数,并且是 p 的素因子,那么它具有下列性质:如果代替方程 $\alpha^\lambda=1$ 的根,用同余式 $\xi^\lambda\equiv1(\bmod p)$的一个确定的根代入,那么 $f(\xi)\equiv0(\bmod p)$。因此若素因子 $f(\alpha)$含在复数 $\Phi(\alpha)$中,则也有 $\Phi(\xi)\equiv0(\bmod p)$;而且反过来,若 $\Phi(\xi)\equiv0$

$(\mathrm{mod}\,p)$且 p 可分解为 $\lambda-1$ 个复素因子之积，则 $\Phi(\alpha)$含有素因子 $f(\alpha)$。现在 $\Phi(\xi)\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$这个性质总之是与 p 分解素因子的可能性无关的；又因为若 $\Phi(\xi)\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$，则复数 $\Phi(\alpha)$必含有 p 的从属于 $\alpha=\zeta$ 的理想素因子，因而可将这个性质用作定义，于是 p 的 $\lambda-1$ 个复素因子每个都可用一个同余式代替。只须要证明，这些复素因子，不管是真实的或者仅是理想的，都对复数给出相同的确定的特征。但是，在此处所给出的方法中我们不用同余关系作为理想素因子的定义，因为它们不足以表示一个复数的几个相等的理想素因子，而且由于过份限制，它们仅能产生 $m\lambda-1$ 形的实素数的理想素因子。

复数的每个素因子也是每个实素数 q 的素因子，并且理想素因子的性质特别地与 q 对于模 λ 所属的指数有关。设此指数是 f，那么 $q^f\equiv1(\mathrm{mod}\,\lambda)$，且 $\lambda-1=e\cdot f$。这种素数 q 决不可能分解为多于 e 个复素因子，并且若此分解真实可行，则这些复素因子可表示为 e 个周期的线性函数（每个周期又都是 f 项之和）。我用 $\eta,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{e-1}$记这些方程 $\alpha^\lambda=1$ 的根的周期；并且实际上是按照这样的顺序：当把 α 变换成 α^γ，此处 γ 是 λ 的一个元根，那么一个周期就变成下一个。如我们所知，这些周期是一个 e 次方程的 e 个根；并且这个方程被看成是关于模 q 的同余式时总有 e 个实同余根，我把它们记作 $u,u_1,u_2,\cdots u_{e-1}$，且其顺序与周期的顺序相对应，对于它们，除了 e 次同余式外，还可应用其他容易找到的同余式。现在若由周期构造出一个复数 $c'\eta+c_1'\eta_1+c_2'\eta_2+\cdots+c'_{e-1}\eta_{e-1}$，我们将它简记为 $\Phi(\eta)$，那么在属于指数 f 的那些素数 q 中总存在这样的一个，它可写成下面形式

$$q=\Phi(\eta)\Phi(\eta_1)\Phi(\eta_2)\cdots\Phi(\eta_{e-1})$$

并且其中 e 个因子不能作进一步的分解。如果这些周期用与它们相应的同余根来代替，此处每个周期可以任意地指派与一个确定的同余根相对应，那么这 e 个素因子之一总是关于模 q 同余于零。现在，如果任何复数 $f(\alpha)$含有素因子 $\Phi(\eta)$，那么它对于 $\eta=u_k$，$\eta_1=u_{k+1}$，$\eta_2=u_{k+2}$，等等总是会有关于模 q 同余于零的性质。这个

性质(它恰好蕴含 f 个不同的同余关系式，对它作进一步说明将把话题引得太远)是不变的，即使对这些素数 q 不允许真实地分解为 e 个复素因子也是如此。因此它可用来作为复素因子的定义；但它有一个缺点，就是不能表示一个复数的相等的理想素因子。

我所选取的理想复素因子的定义本质上和所描述的一样，但较简单且更一般，它是基于这样的事实，如我所单独证明的，我们总可以找到一个由周期造出的复数 $\Psi(\eta)$，具有这样的性质：乘积 $\Psi(\eta)\Psi(\eta_1)\Psi(\eta_2)\cdots\Psi(\eta_{e-1})$(它是一个整数)能被 q 但不能被 q^2 整除。这个复数 $\Psi(\eta)$ 总是具有上面所说的性质，也就是说，如果对于周期用对应的同余根去代换，则它关于模 q 同余于零，于是当 $\eta=u,\eta_1=u_1,\eta_2=u_2$，等等，有 $\Psi(\eta)\equiv 0(\mathrm{mod}q)$。我现在令 $\Psi(\eta_1)\cdot\Psi(\eta_2)\cdots\Psi(\eta_{e-1})=\Psi(\eta)$，并用下列方式定义理想素数：

如果 $f(\alpha)$ 具有使 $f(\alpha)\Psi(\eta_r)$ 被 q 整除的性质，那么我们将此表述为 $f(\alpha)$ 含有 q 的属于 $u=\eta_r$ 的理想素因子。进一步，如果 $f(\alpha)$ 具有使 $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu$ 被 q^μ 整除但 $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^{\mu+1}$ 不能被 $q^{\mu+1}$ 整除的性质，则我们就说 $f(\alpha)$ 恰好 μ 次含有 q 的属于 $u=\eta_r$ 的理想素因子。

如果我们在此就这个定义与上面描述过的由同余关系给出的结果之间的联系和一致性作进一步发挥，将会使话题扯得太远；我只简要地提一下，$f(\alpha)\Psi(\eta_\gamma)$ 被 q 整除这个关系完全等价于 f 个不同的同余关系，而 $f(\alpha)(\Psi(\eta_\gamma))^\mu$ 被 q^μ 整除这个关系始终可以用 uf 个同余关系整个地代替。我已使之完善并且要在此宣布其主要定理的理想复数的整个理论证实了我所给出的定义及采用的术语的合理性。这些主要定理如下：

两个或多个复数之积的理想素因子恰好就是所有因子的理想素因子的全体。

如果一个复数(它是一些因子之积)含有 q 的所有 e 个理想素因子，那么它也能被 q 本身整除；此外，如果它不含有这 e 个理想素因子中的某一个，则它不能被 q 整除。

如果一个复数(它是乘积的形式)含有 q 的所有 e 个理想素因

子，并且每个理想素因子至少含有 μ 次，那么它能被 q^{μ} 整除。

如果 $f(\alpha)$恰好含有 q 的 m 个理想素因子，它们可以全部不相同，或者是部分地或全部都相同，那么范数 $Nf(\alpha)=f(\alpha)f(\alpha^2)\cdots f(\alpha^{\lambda-1})$恰含因子 q^{mf}。

每个复数只含有有限的、个数确定的理想素因子。

两个恰好具有相同理想素因子的复数只差一个复数单位，它可以作为一个因子。

如果一个复数含有另一个复数的所有理想素因子，那么这个复数能被另一复数整除；并且从被除数的理想素因子中去掉除数的理想素因子正好就是商所含有的理想素因子。

由这些定理可以推知，引进理想素因子后，复数计算就与整数及其实整素因子计算完全相同。因此，我在《Breslauer Programm zur Jubelfeier der Universität Königsberg》(第 18 页)中所做的下列抱怨之辞的依据就一扫而光了：

“实整数可以分解素因子，并且对同一个数其素因子始终是同一的这个特性不能使复数也具备，看来是一件巨大的憾事；如果现在这个想要的性质是复数理论的一个部分(虽然它的实现迄今仍被巨大的困难缠绕着)，那么问题就会容易地解决，并将带来成功的结论。”

因此，我们看到理想素因子揭示了复数的内部性质，使它们自身面貌显而易见，并且展示了它们内部的清晰结构。特别地，如果一个复数只是由形式 $a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$给出，那么我们很少能对它作出什么断言，除非我们已经应用它的理想素因子(在这种情形我们总可以用直接的方法求出它们)确定出它的最简单的定性性质以作为所有进一步的算术研究的基础。

如我已经指出的，复数的理想因子是作为真实复数的因子出现的，因此理想素因子与适当选取的其他因子相乘其乘积始终应当给出真实复数。组合理想因子以得到真实复数的问题是极有意义的，因为它对于数论的一些最重要的部分有着本质性的关系，我将把此问题作为我已发现的一些结果的推论。与此问题有关的两

个最重要的结果如下：

总是存在有限的确定个数的理想复乘数，它们对于把所有可能的理想复数归结为真实复数是必要而充分的[①]。

每个理想复数都有下列性质：它的一个确定的整数次幂给出一个真实复数。

我现在由这两个定理出发作一些更细致的考察。两个理想复数若用同一个理想数去乘而得到真实复数，我就称它们等价或称为是同一类的，因为对于真实的和理想的复数的这个研究等同于某一组 $\lambda-1$ 个变量的 $\lambda-1$ 次的型的分类；狄利克雷(G. L. Dirichlet)已经获得与此分类有关的主要结果但尚未发表，因此我不能确切地知道他的分类原则是否与由复数理论得到的结果相一致。例如，两变量但行列式是一个素数 λ 的二次型的理论就与这些研究紧密地交织在一起，并且在这种情形我们的分类与高斯的结果相一致，但与勒让德(A. M. Legendre)的结果则否。同样的考察也使二次型的高斯分类及"真等价与假等价"(Aequivalentia propria et impropria)之间的差别的正确基础极其明白地显示出来，而后者，无可讳言，在他的著作《Disquisitiones arithmeticae》中总是不确切地表达出来。例如，若把两个型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 和 $ax^2-2bxy+cy^2$，或者 $ax^2+2bxy+cy^2$ 和 $cx^2+2bxy+ay^2$ 看作是属于不同的类(在上面所引的书中就是这样做的)，那么同时可以发现实际上它们并无本质差别；而另一方面，如果在很大程度上出于问题的自身性质还是要让高斯分类出现，那么我们就被迫把两个仅是外表互异的型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 和 $ax^2-2bxy+cy^2$ 看作只是两个新的但本质互异的数论概念的代表。但这实际上并不比属于同一个数的两个不同的理想素因子多出什么东西。两变量二次型的整个理论可以认为是 $x+y\sqrt{D}$ 形式的复数的理论，因而必然导致到同一类型的理想复数。而后者可以按照对于将它们归结为 $x+$

① 对于这个重要的定理，一个虽然远不够一般但形式完全不一样的证明可在下列论文中找到：L. Kronecker, De unitatibus complexis, Berlin, 1845。——原注

$y\sqrt{D}$形的真实复数是必要且充分的那些理想乘数把自身分类。由于这与高斯的分类是一致的，因而理想复数构成了它的正确基础。

理想复数的一般性研究提供了对高斯那本著作中的非常困难的一节《型的复合》(De compositione formarum)的非常好的类似，并且高斯对二次型所证明了的主要结果(见该书第 337 页及其后)对于一般的理想复数的组合也是成立的，于是对于每个理想数的类都有另一个数与之从属，当它们相乘时就给出真实复数(此处真实复数是主类(Classis principalis)的类似物)。类似地，存在这样一些数，它们自乘时得到真实复数(即 Classis principalis)，因而这些类是对偶的(ancipites)；特别，真实复数本身总是对偶类(Classis anceps)。如果我们取一个理想复数并且求它的各次幂，那么依据前面所说的第二个定理我们将会得到它的一个幂是真实复数；如果 h 是使$(f(d))^h$ 成为一个真实复数的最小整数，那么 $f(\alpha)$，$(f(\alpha))^2$，$(f(\alpha))^3$，…，$(f(\alpha))^h$ 完全全属于不同的类。现在适当选取 $f(\alpha)$，就可以使这些数遍历所有存在的类；如果不是这种情形，那么容易证明类数无论如何总是 h 的倍数。在复数的这个领域我还没有作深一些的研究；特别是我没有着手研究精确的类数，因为我听说狄利克雷已经求出这个数，他应用的原理与他在其著名的二次型研究中所使用的是类似的。我只想对理想复数的特征作一个附加说明，亦即由前面所说的第二个定理，它们始终可以被看作并且表示为真实复数的确定的根，这就是说，它们总可以取形式 $\sqrt[h]{\Phi(\alpha)}$，其中 $\Phi(\alpha)$是一个真实复数，h 是整数。

在我已作的这个复数理论的不同应用中，我只想提一下它对割圆问题的应用，以结束我在前面引述的《Programm》中已宣布的结果。如果我们令

$$(\alpha,x)=x+\alpha x^{g}+\alpha^{2}x^{g^{2}}+\cdots+\alpha^{p-2}x^{g^{p-2}}$$

其中 $\alpha^{\lambda}=1$，$x^{p}=1$，$p=m\lambda+1$，而 g 是素数 p 的一个元根，那么我们知道$(\alpha,x)^{\lambda}$ 是一个与 x 无关的复数，并且可以由方程 $\alpha^{\lambda}=1$ 的

根生成。在我引述的《Programm》中，我已在 p 可以分解为 $\lambda-1$ 个真实复素因子的假设下求出了这些数的下列表达式，其中一个是 $f(\alpha)$：

$$(\alpha,x)^{\lambda}=\pm\alpha^{h}f^{m_1}(\alpha)\cdot f^{m_2}(\alpha^2)\cdot f^{m_3}(\alpha^3)\cdots f^{m_{\lambda-1}}(\alpha^{\lambda-1})$$

其中幂指数 m_1,m_2,m_3 等是这样地确定的：一般地 m_k 为正，小于 λ 且 $km_k\equiv1(\bmod\lambda)$。实际上同样的简单表达式在完全一般的情形也成立，因为容易证明，即使当 $f(\alpha)$ 不是 p 的真实因子而仅是其理想素因子时也成立。但在后一情形，为了使 $(\alpha,x)^{\lambda}$ 的表达式保持住它对于真实复数的形式，我们只需把理想数 $f(\alpha)$ 表示为一个真实复数的根，或者应用一种用于表示一个具有给定理想素因子的真实复数的方法（虽然是非直接的）。

（朱尧辰 译　徐广善 校）

51. 黎曼:论黎曼ζ函数

欧拉最先将分析方法引入数论研究。他在 1737 年导出的恒等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}[1/(1-\frac{1}{p^s})]$($n$ 取遍所有正整数,s 取遍所有素数),在分析与数论之间架起了桥梁。在 19 世纪,解析数论主要由于狄利克雷和黎曼等人的工作而奠定了蓬勃发展的基础。

黎曼(G. F. B. Riemann)1826 年出生于德国丹南贝格(Dannenberg)一个乡村牧师家庭;1846 年入哥廷根大学,不久成为高斯的学生;1847 年的柏林之行使他有机会结识狄利克雷、雅可比、施泰纳(J. Steiner)、爱森斯坦(F. G. M. Eisenstein)等数学家;1859 年继狄利克雷任哥廷根大学数学教授。黎曼一生体弱多病,1866 年卒于意大利北部休养地马焦雷湖畔。黎曼发表的著作数量不多,但思想极为深刻,使他成为对现代数学影响最大的数学家之一。

在数论领域,黎曼公开发表的唯一一篇论文《论不大于一个给定值的素数个数》(Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monats, Berlin Akad, nov, 1859),开创了解析数论的新时期。正是在这篇论文中,黎曼将上述欧拉恒等式推广到 s 为复变量的情形,并记左边的级数为 $\zeta(s)$,即现在所称的黎曼 ζ 函数。黎曼指出了研究复变函数 $\zeta(s)$ 的性质(尤其是零点分布)与研究素数性质之间的联系。从此,黎曼 ζ 函数不仅成为解析数论的重要基石,同时推动了复变函数论的发展。在同一篇文章中,黎曼还提出了一个猜想:$\zeta(s)$ 的复零点全部位于直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上,这就是黎曼猜想,

至今尚未得到证明。随着近来费马大定理的获证，黎曼猜想作为最著名、最困难的未决数学问题的地位更显突出。

以下摘录黎曼的这篇论文，转译自 G. Birkhoff：A Source Book in Classical Analysis，pp. 95～98.

在这个研究中我们的出发点是欧拉(L. Euler)的考察结果①

$$\Pi(1-p^{-s})^{-1}=\Sigma\, 1/n^s$$

其中乘积取在所有素数 p 上；而和是取在所有(正)整数之上。我用 $\zeta(s)$ 表示这个复变量 s 的函数，在收敛的情形下它由上面的两个表达式表示。它们仅当 s 的实部超过 1($\mathrm{Re}\{s\}>1$)时收敛。但我们容易找到一个始终有效的函数表达式。应用方程②

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx=\Gamma(s)/n^s$$

我们首先得到

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^\infty (x^{s-1}/(e^x-1))dx$$

如果我们现在考虑积分

$$\int ((-x)^{s-1}/(e^x-1))dx$$

其中积分线路由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 按正向绕过一个除 0 外不含被积函数的间断点的区域，那么容易给出它等于

$$(e^{-i\pi s}-e^{i\pi s})\int_0^\infty (x^{s-1}/(e^x-1))dx$$

这里取定的多值函数 $(-x)^{s-1}=e^{(s-1)\log(-x)}$ 中，$\log(-x)$ 是对于负的 x 为实值的那一支，因此我们有

$$2\sin\pi s\Gamma(s)\zeta(s)=i\int_\infty^\infty ((-x)^{s-1}/(e^x-1))dx$$

这就是我们前面要找的表达式。

---

① 式子左边黎曼原文中的连乘积部分已被简化。——原注

② 公式中的 $\Gamma(s)$ 在黎曼原文中写作 $\Pi(s-1)$，因为 $\Gamma(s)=\Pi(s-1)$，而且现在伽玛函数比阶乘函数 $\Pi(s)$ 更为人们熟知。——原注

现在这个方程给出了函数 $\zeta(s)$ 对每个任意复数 s 的值，并表明了它是单值的，且对除 $s=1$ 外的所有有限的 s 取有限值；它还表明当 s 是负偶数时 $\zeta(s)$ 为零[①]。

如果 s 的实部是负的，那么积分线路也可以取作按负方向（而不是正方向）绕过含有所有其他复数的区域，这是因为此时对于模为无穷大的自变量的值被积函数是无穷小。在这个区域内被积函数仅当 x 为 $\pm 2\pi i$ 的倍数时才不连续，因而这个积分等于按负向绕这些点取的积分之和。但围绕 $2n\pi i$ 所取的积分等于 $(-2n\pi i)^{s-1}\cdot(-2\pi i)$；因此我们有

$$2\sin\pi s\Gamma(s)\zeta(s)=(2\pi)^s\Sigma n^{s-1}((-i)^{s-1}+i^{s-1}),$$

换言之，应用伽玛函数 $\Gamma(s)$ 的熟知的性质，也可将 $\zeta(s)$ 和 $\zeta(1-s)$ 间的关系表达如下：当 s 变换为 $1-s$ 时 $\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ 仍然不变。

函数的这个性质使我们可以在级数的一般项 $1/n^s$ 中用积分 $\Gamma(s/2)$ 代替 $\Gamma(s)$，由此得到函数 $\zeta(s)$ 的一个非常方便的表达式。事实上，我们有

$$\frac{1}{n^s}\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}=\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{(s/2)-1}dx$$

因此，若令 $\Psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$，我们有

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)=\int_0^\infty \Psi(x)x^{(s/2)-1}dx$$

或者，因为 $2\Psi(x)+1=x^{-1/2}(2\Psi(1/x)+L)$[②]，故有

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)=\int_1^\infty \Psi(x)x^{(s/2)-1}dx+\int_0^1\Psi(1/x)x^{(s-3)/2}dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1(x^{(s-3)/2}-x^{(s/2)-1})dx$$

---

① $\zeta(s)$ 的这个性质是应用这个函数的第二个形式 $2\zeta(s)=\pi i\Gamma(1-s)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(-x)^{s-1}/(e^x-1)dx$ 得到的，并且要注意 $1/(e^x-1)+½$ 关于 x 的幂级数只含有奇次幂。——原注

② Jacobi, C. G. J., Nova Fundamenta, 184(Werke, I,235). ——原注

$$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \Psi(x)(x^{(s/2)-1}+x^{(-1-s)/2})dx$$

现令 $s=\frac{1}{2}+it$ 及 $\Gamma(s+1)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)=\xi(t)$，则有

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^\infty \Psi(x)x^{-3/4}\cos((t\log x)/2)dx$$

或者

$$\xi(t)=4\int_1^\infty \frac{d(x^{3/2}\Psi'(x))}{dx}x^{-1/4}\cos((t\log x)/2)dx$$

这个函数对于 t 的所有的有限值都是有限的，并且可以展开为 t^2 的快速收敛的幂级数。因为当 Re（s）>1 时 $\log\zeta$（s）$=-\sum\log(1-p^{-s})$仍是有限的，并且对于 ξ（t）的其他因子的对数也是如此，所以仅当 t 的虚部落在 $i/2$ 和 $-i/2$ 之间时函数 $\xi(t)$ 才可能为零。ξ（t）$=0$ 的实部落在 0 和 T 之间的根的个数等于…（T/2π）log（T/2π）$-$T/2π；这是因为按正向围绕所有的虚部在 $i/2$ 和 $-i/2$ 之间而实部在 0 和 T 之间的点 t 所取的积分 $\int d\log\xi(t)$ 等于Tlog(T/2π)$-$T(但相差一个阶为 1/T 的部分)，而这个积分等于方程 $\xi(t)=0$ 在上述区域中根的个数乘以 $2\pi i$。确实，我们在这个界限内发现很多那样的实根，并且非常可能方程 $\xi(t)=0$ 的所有根都是实的①。确实值得找它的严格证明；但是作了一些不成功的尝试后，我暂时把这个研究放在一边，因为看来它对于我的研究的直接目标并非必需的。

如果我们用一般性记号 α 表示方程 ξ（α）$=0$ 的根，那么 $\log\xi$（t)可以表示为 $\Sigma\log(1-t^2/\alpha^2)+\log\xi(0)$；这是因为，由于 $\xi(t)=0$ 的根 t 的密度仅仅如同 $\log t/2\pi$ 那样随 t 增加，因而上面的表达式收敛，并且当 t 为无穷时它仅如 $t\log t$ 那样地变为无穷；于是它与 $\log\xi(t)$相差一个 t^2 的函数，这个函数对于有限的 t 保持有

① 因为 $s=\frac{1}{2}+it$，所以这就是著名的"黎曼猜想"：$\zeta(s)=0$ 的所有的根都在直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$上。看来黎曼本人没有意识到它极大的重要性。——原注

限且连续，而且被 t^2 除后当 t 趋于无穷时趋于零。因此，这个差是一个常数，其值可由令 $t=0$ 来确定。

应用这些工具现在可以来确定小于 x 的素数的个数。

如果 x 不是素数，则用 $F(x)$ 表示这个数；如果 x 是素数，则令它超过这个数 $\frac{1}{2}$，于是对于 $F(x)$ 是跳跃的点 x 有 $F(x)=(F(x^+)+F(x^-))/2$，如果在公式

$$\log\zeta(s)=\Sigma\log(1-p^{-s})=\Sigma p^{-s}+\frac{1}{2}\Sigma p^{-2s}-\frac{1}{3}\Sigma p^{-3s}+\cdots$$

中用 $s\int_p^\infty x^{-s-1}dx$ 代替 p^{-s}，用 $s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}dx$ 代替 p^{-2s}，我们可得

$$(\log\zeta(s))/s=\int_1^\infty f(x)x^{-s-1}dx,$$

其中 $f(x)=F(x)+\frac{1}{2}F(x^{1/2})+\frac{1}{3}F(x^{1/3})+\cdots$

[黎曼在此用了三页的篇幅非常仔细地继续研究了表示 $F(x)$ 即小于 x 的素数的个数的定积分。然后他接着讨论如下：]

如果我们限定 $\overset{\alpha}{\Sigma}$ 是有限多项求和，那么我们得到 $f(x)$ 的表达式的导数，或者说，除相差一个当 x 增加时下降很快的余项

$$\frac{1}{\log x}-2\sum^{\alpha}\frac{\cos(\alpha\log x)x^{-1/2}}{\log x}$$

外，关于“素数密度＋素数平方的密度的一半＋素数立方的密度的三分之一＋…”的近似表达式。

因此已知的近似公式 $F(x)=\mathrm{li}(x)$ 仅准确到一个阶为 $x^{1/2}$ 的项，并且有时给出太大的值……。

实际上，如果我们将 $\mathrm{li}(x)$ 和 $F(x)$ 加以比较（这个工作是高斯和哥尔德施密特（Goldschmidt）首先开始做的），并且扩充到 $x=3000000$，那么当 $x>100000$ 时后者已经保持小于 $\mathrm{li}(x)$，并且实际上这个差随 x 逐步增加（虽有许多摆动）。

[黎曼用几个预言 $\mathrm{li}(x)-F(x)$ 的变化的问题结束全文]

（朱尧辰 译　徐广善 校）

52. 埃尔米特:论 e 的超越性

埃尔米特(C. Hermite,1822～1901),生于法国洛林地区的迪约兹(Dieuze),卒于巴黎。1869 年起任巴黎综合工科大学分析学教授,他同时还是巴黎大学名誉教授和巴黎科学院院士。埃尔米特是 19 世纪最著名的函数论专家之一。他在数学史上最为人知的成就是证明了 e 的超越性。众所周知,从古希腊时代起,数学家们就接触到了超越数,例如与古典化圆为方问题密切相关的数 π 的特征始终是激发人们兴趣的源泉。然而超越数的存在性直到 1844 年才被刘维尔(J. Liouville)证明,从而肯定了代数数与超越数划分的正确性。刘维尔已证明了 e 不可能是有理系数二次方程的根。1873 年,埃尔米特发表了证明 e 的超越性的论文《论指数函数》(Sur la fonction exponentielle, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 77,(1873),Paris, pp. 18～24,226～233,285～293.)。几年后(1882)林德曼(F. Lindemann)依据埃尔米特的模式又证明了 π 的超越性,并最终否定解决了化圆为方问题。在 20 世纪,对超越数的研究已形成为现代数论中一个十分活跃的分支——超越数论。

埃尔米特的论文较长,大体上分为三个部分,前两部分给出了 e 的超越性的两个不同的证明,但正如埃尔米特自己所说,其中第二个证明最为严密。以下摘录该文第二部分的主要内容,转译自 D. E. Smith:A Source Book in Math. pp. 99～106.

……但是,作为更一般的情形,我们取

$$F(z)=(z-z_0)^{\mu_0}(z-z_1)^{\mu_1}\cdots(z-z_n)^{\mu_n}$$

而不管这些指数取什么样的整数值,对恒等式

$$\frac{d[e^{-z}F(z)]}{dz}=e^{-z}[F'(z)-F(z)]$$

两边积分得到

$$e^{-z}F(z)=\int e^{-z}F'(z)dz-\int e^{-z}F(z)dz$$

由此可知

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)dz=\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F'(z)dz^{①}$$

现在公式

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{\mu_0}{z-z_0}+\frac{\mu_1}{z-z_1}+\cdots+\frac{\mu_n}{z-z_n}$$

产生出下列的分解

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)dz=\mu_0\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}F(z)dz}{z-z_0}+\mu_1\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}F(z)dz}{z-z_1}\cdots$$
$$+\mu_n\int_{z_0}^{z}\frac{e^{-z}F(z)dz}{z-z_n},\cdots$$

我们将证明，总是可以确定两个 n 次整多项式 $\Theta(z)$ 和 $\Theta_1(z)$，使下列关系式成立

$$\int\frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz$$
$$=\int\frac{e^{-z}F(z)\Theta_1(z)}{f(z)}dz-e^{-z}-e^{-z}F(z)\Theta(z)^{②}$$

此处 ζ 表示根 $z_0,z_1,\cdots,z_n$ 之一，…并且进一步，若用记号 $\Theta(z,\zeta)$ 代替 $\Theta(z)$ 以强调 ζ 的存在，我们有

$$\Theta(z,\zeta)=z^n+\Theta_1(\zeta)z^{n-2}+\Theta_2(\zeta)z^{n-3}+\cdots+\Theta_n(\zeta)^{③}$$

由此推知对多项式 $\Theta_1(z)$ 有公式

---

① 此处 Z 表示根 $z_0,z_1,\cdots,z_n$ 之一。——原注

② $f(z)=(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_n)$，这个式子的证明细节见原文，此处省略。——原注

③ 在原文中证明了 $\Theta_i(\zeta)$ 是 ζ 的 i 次多项式，其系数是整系数的、有根 $z_0,z_1,\cdots,z_n$ 的整函数。不要把 $i=1$ 时的 $\Theta_i(\zeta)$ 与上面和 $\Theta(z)$ 一起提到的那个 $\Theta_1(z)$ 相混淆。——原注

$$\frac{\Theta_1(z)}{f(z)}=\frac{\mu_0\Theta(z_0,\zeta)}{z-z_0}+\frac{\mu_1\Theta(z_1,\zeta)}{z-z_1}+\cdots+\frac{\mu_n\Theta(z_n,\zeta)}{z-z_n}$$

…只须在关系式

$$\int\frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz=\int\frac{e^{-z}F(z)\Theta_1(z)dz}{f(z)}-e^{-z}F(z)\Theta(z)$$

中取积分限为 z_0 与 Z 之间，我们就得到方程

$$\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz=\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}F(z)\Theta_1(z)}{f(z)}dz$$

$$=\mu_0\Theta(z_0,\zeta)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}F(z)}{z-z_0}dz+\mu_1\Theta(z_1,\zeta)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}F(z)}{z-z_1}dz+\cdots$$

$$+\mu_n\Theta(z_n,\zeta)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}F(z)}{z-z_n}dz$$

特别，我们在

$$\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_n=m$$

的情形使用这个方程；此时若我们记

$$m\Theta(z_i,z_k)=(ik)$$

并且若令 ζ 逐次等于 $z_0,z_1,\cdots,z_n$，那么上面的关系式显然成为

$$\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^{m+1}(z)}{z-z_i}dz=(i0)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_0}dz$$

$$+(i1)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_1}dz+\cdots$$

$$+(in)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_n}dz$$

其中 $i=0,1,2\cdots,n$。但对于一般情形，我们还必须证明下列定理。

设 Δ 和 δ 分别是行列式

$$\begin{vmatrix}\Theta(z_0,z_0) & \Theta(z_1,z_0) & \cdots & \Theta(z_n,z_0)\\ \Theta(z_0,z_1) & \Theta(z_1,z_1) & \cdots & \Theta(z_n,z_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Theta(z_0,z_n) & \Theta(z_1,z_n) & \cdots & \Theta(z_n,z_n)\end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \cdots & z_n^2 \\ z_0^n & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}$$

那么 $\Delta=\delta^2$①.

现在令

$$\varepsilon_m=\frac{1}{1\cdot 2\cdots m}\int_{z_0}^{Z} e^{-z}f^m(z)dz$$

$$\varepsilon_m^i=\frac{1}{1\cdot 2\cdots (m-1)}\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^m(z)}{z-z_i}dz$$

上面证明过的关系式

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}f^m(z)dz=m\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^m(z)}{z-z_0}dz+m\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^m(z)}{z-z_1}dz+\cdots$$
$$+m\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^m(z)}{z-z_n}dz$$

即可简写为

$$\varepsilon_m=\varepsilon_m^0+\varepsilon_m^1+\cdots+\varepsilon_m^n$$

并且若在关系式

$$\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^{m+1}(z)}{z-\zeta}dz=m\Theta(z_0,\zeta)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^m(z)}{z-z_0}dz$$
$$+m\Theta(z_1,\zeta)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^m(z)}{z-z_1}dz+\cdots$$
$$+m\Theta(z_n,\zeta)\int_{z_0}^{Z}\frac{e^{-z}f^m(z)}{z-z_m}dz$$

中逐次令 ζ 等于 $z_0,z_1,\cdots,z_n$,则可给出下列的代换式

$$\varepsilon_{m+1}^0=\Theta(z_0,z_0)\varepsilon_m^0+\Theta(z_1,z_0)\varepsilon_m^1+\cdots+\Theta(z_n,z_0)\varepsilon_m^n$$
$$\varepsilon_{m+1}^1=\Theta(z_0,z_1)\varepsilon_m^0+\Theta(z_1,z_1)\varepsilon_m^1+\cdots+\Theta(z_n,z_1)\varepsilon_m^n$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_{m+1}^n=\Theta(z_0,z_n)\varepsilon_m^0+\Theta(z_1,z_n)\varepsilon_m^1+\cdots+\Theta(z_n,z_n)\varepsilon_m^n$$

---

① 原文给出了这个结果的简短的证明。——原注

我们将它们记作 S_m。

现在如果我们依次建立代换式 $S_1, S_2, \cdots, S_{m-1}$，那么我们从这些代换最终得到通过 $\epsilon_1^0, \epsilon_1^1, \cdots, \epsilon_1^n$ 给出的 $\epsilon_m^0, \epsilon_m^1, \cdots, \epsilon_m^n$ 的表达式，我们将它们写成下列形式：

$$\epsilon_m^0 = A_0\epsilon_1^0 + A_1\epsilon_1^1 + \cdots + A_n\epsilon_1^n$$

$$\epsilon_m^1 = B_0\epsilon_1^0 + B_1\epsilon_1^1 + \cdots + B_n\epsilon_1^n$$

$$\cdots\cdots$$

$$\epsilon_m^n = L_0\epsilon_1^0 + L_1\epsilon_1^1 + \cdots + L_n\epsilon_1^n,$$

并且这个新代换式的行列式等于所有中间步骤代换的行列式之积，即 $\delta^{2(m-1)}$。我们还要以一些值代替 $\epsilon_1^0, \epsilon_1^1, \cdots, \epsilon_1^n$，使我们得到这些量 ϵ_m^i 的适合我们目的表达形式。我们将会看到这些值是容易得到的。

为此目的我们应用一般公式

$$\int e^{-z} F(z)dz = -e^{-z} r(z)$$

其中取

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-\zeta}$$

亦即

$$F(z) = \begin{array}{r|r|l} z^n + \zeta & z^{n-1} + \zeta^2 & z^{n-2} + \cdots \\ + p_1 & + p_1\zeta & \\ & + p_1^2 & \end{array}$$

易见 $r(z)$ 是一个与 $\Theta(z,\zeta)$ 完全类似的 z 和 ζ 的整表达式，并且若将它记作 $\Phi(z,\zeta)$，则我们有

$$\Phi(z,\zeta) = z^n + \varphi_1(\zeta)z^{n-1} + \varphi_2(\zeta)z^{n-2} + \cdots + \varphi_n(\zeta)$$

其中 $\varphi_i(\zeta)$ 是 ζ 的 i 次多项式，且 ζ^i 的系数等于 1，…，并且 $\Phi(z,\zeta)$ 与 $\Theta(z,\zeta)$ 形式的类似表明行列式

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0,z_0) & \Phi(z_1,z_0) & \cdots & \Phi(z_n,z_0) \\ \Phi(z_0,z_1) & \Phi(z_1,z_1) & \cdots & \Phi(z_n,z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi(z_0,z_n) & \Phi(z_1,z_n) & \cdots & \Phi(z_n,z_n) \end{vmatrix}$$

也等于 δ^2。其次，我们从关系式

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f(z)}{z-\zeta} dz = e^{-z_0}\Phi(z_0,\zeta) - e^{-Z}\Phi(Z,\zeta)$$

其中取 $\zeta = z_i$，可得所要的值

$$\varepsilon_1^i = e^{-z_0}\Phi(z_0,z_i) - e^{-Z}\Phi(Z,z_i)$$

于是我们有下面给出的 ε_m^i 的表达式。

令

$$\mathfrak{A} = A_0\Phi(Z,z_0) + A_1\Phi(Z,z_1) + \cdots + A_n\Phi(Z,z_n)$$

$$\mathfrak{B} = B_0\Phi(Z,z_0) + B_1\Phi(Z,z_1) + \cdots + B_n\Phi(Z,z_n)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{L} = L_0\Phi(Z,z_0) + L_1\Phi(Z,z_1) + \cdots + L_n\Phi(Z,z_n)$$

并设 $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \cdots, \mathfrak{L}_0$ 是在其中令 $Z = z_0$ 所得到的值；我们有

$$\varepsilon_m^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{-Z}\mathfrak{A}$$

$$\varepsilon_m^1 = e^{-z_0}\mathfrak{B}_0 - e^{-Z}\mathfrak{B}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_m^n = e^{-z_0}\mathfrak{L}_0 - e^{-Z}\mathfrak{L}$$

在这些公式里 Z 表示量 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 中任何一个；如果我们想要表述当 $Z = z_k$ 时的结果，我们要予先约定，一边的系数 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots \mathfrak{L}$ 及另一边的量 $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \cdots, \varepsilon_m^n$ 在此时分别表示为 $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \cdots, \mathfrak{L}_k$ 及 η_k^0，$\eta_k^1, \cdots, \eta_k^n$，于是我们得到方程

$$\eta_k^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{-z_k}\mathfrak{A}_k$$

$$\eta_k^1 = e^{-z_0}\mathfrak{B}_0 - e^{-z_k}\mathfrak{B}_k$$

$$\cdots\cdots$$

$$\eta_k^n = e^{-z_0}\mathfrak{L}_0 - e^{-z_k}\mathfrak{L}_k$$

这把我们引向我们曾提过的形如

$$e^{z_0}N_0+e^{z_1}N_1+\cdots+e^{z_n}N_n=0$$

（其中指数 $z_0,z_1,\cdots,z_n$ 及系数 $N_0,N_1,\cdots,N_n$ 被假定为整数）的关系式的不可能性的第二个证明。

首先注意对于 m 的充分大的值 ϵ_m^i 可以变得小于任何给定的数。因为，指数函数 e^{-z} 总是正的，因而如我们所知有

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)dz=F(\xi)\int_{z_0}^{Z} e^{-z}dz=F(\xi)(e^{-z_0}-e^{-Z})$$

其中 $F(z)$ 可以是任何函数，而 ξ 是在积分限 z_0 和 Z 之间的某个数。现在令

$$F(z)=\frac{f^m(z)}{z-z_i}$$

那么可得表达式

$$\epsilon_m^i=\frac{f^{m-1}(\xi)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{f(\xi)}{\xi-z_i}(e^{-z_0}-e^{-Z})$$

这证明了我们上面提到的性质。现在我们由方程

$$\eta_1^0=e^{-z_0}\mathfrak{A}_0-e^{-z_1}\mathfrak{A}_1$$

$$\eta_2^0=e^{-z_0}\mathfrak{A}_0-e^{-z_2}\mathfrak{A}_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\eta_n^0=e^{-z_0}\mathfrak{A}_0-e^{-z_n}\mathfrak{A}_n$$

得到下列关系式

$$\begin{aligned}&e^{z_1}\eta_1^0N_1+e^{z_2}\eta_2^0N_2+\cdots+e^{z_n}\eta_n^0N_n\\&\quad=e^{-z_0}(e^{z_1}N_1+e^{z_2}N_2+\cdots+e^{z_n}N_n)\mathfrak{A}_0\\&\quad-(\mathfrak{A}_1N_1+\mathfrak{A}_2N_2+\cdots+\mathfrak{A}_nN_n)\end{aligned}$$

如果引进条件

$$e^{z_0}N_0+e^{z_1}N_1+\cdots+e^{z_n}N_n=0$$

那么刚才得到的关系式变成

$$\begin{aligned}&e^{z_1}\eta_1^0N_1+e^{z_2}\eta_2^0N_2+\cdots+e^{z_n}\eta_n^0N_n\\&\qquad=-(\mathfrak{A}_0N_0+\mathfrak{A}_1N_1+\cdots+\mathfrak{A}_nN_n)\end{aligned}$$

但是，在 $z_0,z_1,\cdots,z_n$ 为整数的假定下，量 $\Theta(z_i,z_k)$，$\Phi(z_i,z_k)$，因而 $\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_n$ 也都是整数，于是我们得到一个整数

$$\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n N_n$$

当 m 增加时，它随着 $\eta_1^0, \eta_1^1, \cdots, \eta_1^n$ 无限制地减少；由此可知对 m 的某个值及所有更大的值有

$$\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n N_n = 0$$

并且类似地得到下列诸关系式：

$$\mathfrak{B}_0 N_0 + \mathfrak{B}_1 N_1 + \cdots + \mathfrak{B}_n N_n = 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{L}_0 N_0 + \mathfrak{L}_1 N_1 + \cdots + \mathfrak{L}_n N_n = 0$$

关系式

$$e^{z_0} N_0 + e^{z_1} N_1 + \cdots + e^{z_n} N_n = 0$$

要求行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{A}_1 & \cdots & \mathfrak{A}_n \\ \mathfrak{B}_0 & \mathfrak{B}_1 & \cdots & \mathfrak{B}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{L}_1 & \cdots & \mathfrak{L}_n \end{vmatrix}$$

等于零。但由于 $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \cdots, \mathfrak{L}_0$ 的表达式，可推出 Δ 是另外两个行列式

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_0 & L_1 & \cdots & L_n \end{vmatrix}$$

及

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \cdots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \cdots & \Phi(z_n, z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \cdots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

之积，它们中第一个等于 $\delta^{2(m-1)}$，第二个为 δ^2。于是我们有 $\Delta = \delta^{2m}$，

并且可以用相当严密的方法证明刚才所假定的关系式是不可能的[1]，因而数 e 不可能属于代数无理数。

（朱尧辰 译 徐广善 校）

① 可以证明

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \cdots & z_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0^n & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{vmatrix} = \pm(z_n-z_{n-1})(z_n-z_{n-2})\cdots(z_n-z_0)(z_{n-1}-z_{n-2})\cdots(z_1-z_0)$$

从而 δ 不为零(因为我们当然始终假定指数 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 互异)。—原注

53. 阿达玛:素数定理证明

阿达玛(J. Hadamard, 1865～1963)生于法国凡尔赛,卒于巴黎。早年在巴黎高等师范学校学习,先后任波尔多理学院、巴黎大学、法兰西学院和巴黎综合工科大学教授,巴黎科学院院士。阿达玛的数学贡献涉及解析数论、解析函数论、偏微分方程论、数理逻辑等多个方面,这里介绍他有关素数分布的卓越工作。

以$\pi(x)$表示不大于x的素数个数,对于函数$\pi(x)$,欧拉、勒让德和高斯等人都猜测有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\log x}=1$成立,这就是素数定理,是解析数论的中心课题之一。1896年,阿达玛按照黎曼的思想,应用整函数理论以及证明当$\mathrm{Re}(z)=1$时$\zeta(z)\neq 0$这一决定性事实,终于证明了素数定理。几乎同时,比利时数学家瓦莱普桑(C. J. de la Vallée Poussin)也获得了素数定理的证明。阿达玛-瓦莱普桑素数定理为19世纪的解析数论画了一个漂亮的句号。以下摘录阿达玛1896年论文的内容,转译自G. Birkhoff: A Source Book in Classical Analysis, pp. 98～103,阿达玛的原文Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)\cdots$,见Bull. Soc. Math. France, 24 (1896), pp. 199～220,亦载Hadamard: Oeuvres, 1. pp. 189～210。

1. 当s的实部$\mathrm{Re}(s)$大于1,黎曼ζ-函数$\zeta(s)$由方程

$$\log\zeta(s)=-\sum_{p}\log\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right) \tag{1}$$

定义,其中p表示相继素数;对数是纳皮尔(Napier)对数(即自然对数)。除了点$s=1$是单极点外,它在全平面上解析。它对任何实部$\mathrm{Re}(s)$超过1的s值不为零,因为此时方程(1)的右边有界。但它

有无穷多个实部在 0 和 1 之间的复零点。斯蒂尔杰斯(T. J. Stieltjes)曾证明这些零点有$\frac{1}{2}+ti$(此处 t 是实数)的形式①,这与黎曼猜想一致;但他的证明从未发表,并且甚至从未有人证明这个函数在直线 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上没有零点。

我打算证明这最后一个结论。

2. 首先设 s 通过下降的实值趋于 1,$\zeta(s)$的对数,或者除了一个有界量外,级数

$$S=\sum_{p} 1/p^{s} \tag{2}$$

与 $-\log(s-1)$一样无限地增加。

现用 $s+ti$ 代替 s,并想象某个数 $1+ti$ 是 $\zeta(s)$的零点。那么 $\log(s+it)$的实部,亦即(除了一个有界量外)和

$$P=\sum_{p}(1/p^{s})\cdot\cos(t\log p) \tag{3}$$

必定通过负值象 $\log(s-1)$那样地无限增大,亦即象 $-S$ 当 s 趋于 1(t 保持不变)时那样地无限增加。

3. 姑且认为这是正确的,令 α 是一个小角;在不同的素数中让我们区分两种情形:

(i) 对某些 k 满足下列双重不等式的素数:

$$\frac{(2b+1)\pi-\alpha}{t}\leqslant\log p\leqslant\frac{(2k-1)\pi+\alpha}{t} \tag{4}$$

用 S'_n 和 P'_n 表示级数(2)和(3)的最初 n 项之和 S_n 和 P_n 中对应于上述第一类素数的那些项的部分和。

(ii) 其余的素数,亦即对任何 k 值不满足双重不等式(4)的素数,它们在和 S_n 和 P_n 中给出的部分和是 S''_n 和 P''_n。

考虑比 $\rho_n=S'_n/S_n$,它落在 0 和 1 之间;当 n 无限增加时,这个比或者有极限,或者有界摆动。如果 $\zeta(1+ti)$是零,那么这个极限或摆动的界限将随 s 趋于 1。换言之,如果 ρ 是一个小于 1 的数,那

① 推测这个"证明"并未完成。——原注

么对每个比 1 略微超过一点的实值将对应地有一个 n 使

$$\rho_n > \rho \tag{5}$$

实际上，显然我们可以写出下列代数不等式：

$$P'_n \geqslant -S'_n \geqslant -\rho_n S_n$$

$$P''_n \geqslant -S''_n \cos\alpha \geqslant -(1-\rho_n) S_n \cos\alpha$$

因此，如果我们有 $\rho_n \leqslant \rho$，则可推出 $P_n = -\theta S_n$，此处 $\theta = \rho + (1-\rho)\cos\alpha$ 是一个小于 1 的实常数；并且如果此式对无穷多个 n 成立，则可取极限且写出 $P \geqslant -\theta S$，这与我们在 § 2 中所作假设 $\zeta(1+ti)=0$ 矛盾。

于是方程 $S(1+ti)=0$ 要求 ρ_n 的极限或摆动界限随 s 趋于 1。

4. 其次，在级数(3)中变 t 为 $2t$，并令 Q 是这样得到的新级数：在级数(3)中形成和 $P'_n, P''_n, P_n = P'_n + P''_n$ 的项在此新级数中给出和 $Q'_n, Q''_n, Q_n = Q'_n + Q''_n$，而且此时我们有

$$Q'_n \geqslant S'_n \cos 2\alpha \geqslant \rho_n S_n \cos 2\alpha$$

$$Q''_n \geqslant S''_n \geqslant -(1-\rho_n) S_n$$

因而

$$Q_n \geqslant S_n(\rho_n \cos 2\alpha - (1-\rho_n))$$

因此，如果不等式(5)对所有充分大的 n 成立，则有 $Q \geqslant \theta' S$，其中 θ' 表示数 $\rho\cos 2\alpha - (1-\rho)$，此数当取 $1 > \rho > 1/(1+\cos 2\alpha)$ 时是正的。

现在这就给出 $Q \geqslant \theta' S$，因而 Q 将通过正值无限制地增加，所以常数 $1+2ti$ 将是 $\zeta(s)$ 的一个奇点，但我们知道实际并非如此。

于是假设 $\zeta(1+ti)=0$ 的不可能性就是显然的了。

5. 值得注意的是这个证明只应用了 $\zeta(s)$ 的简单性质；实际上，只应用了下列一些评注：

(1) 我们的函数 $\zeta(s)$ 可以展开为通项为 $a_n e^{-\lambda_n s}$ 形的级数，其中 a_n 全部为正；

(2) 这个函数在此级数的收敛横坐标线上是单值的，并且在此横坐标线上只有一个单极点。

于是每个满足这些条件的函数在收敛横坐标线上不为零。

这样，在前面的证明中，只要简化将方程(1)的右边归结为级数 S 时的记号，此证明即可同样用于 $\log\zeta(s)$ 的完全的展开式。类似地，当用某种方式把素数分为两类，第一类素数记作 p'，第二类素数记作 p''，若当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时由无穷乘积

$$f(s)=1\Big/\prod_{p'}(1-p'^{-s})\prod_{p''}(1+p''^{-s}) \tag{6}$$

表示的函数 f(s) 在界线 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上解析，则它在此界线上不为零①。

事实上，乘积

$$f(s)\zeta(s)=1\Big/\prod_{p'}(1-p'^{-s})\prod_{p''}(1-p''^{-2s})$$

的对数是由通项为 $a_n e^{-\lambda_n s}$（系数为正）的级数表示的，因而这个积满足上面指出的条件。

例如，施廖密赫(Schlömilch)函数

$$\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}=\prod_p(1+(-1)^{(p+1)/2}p^{-s})^{-1} \tag{7}$$

就是这种情形。

6. 更一般地，我们要将上面的命题扩充到狄利克雷(P. G. L. Dirichlet)引入数论中的级数，我们首先要回忆一下它的主要性质，并作几点补充。

这些……是周期形式的级数 $\Sigma a_n n^{-s}$，其系数 a_n 从 k 重复到 k。胡尔维奇(A. Hurwitz)②和卡恩(Cahen)③研究过的 k 个函数

$$\xi_1(s)=1^{-s}+(k+1)^{-s}+(2k+1)^{-s}+\cdots$$

$$\xi_2(s)=2^{-s}+(k+2)^{-s}+(2k+2)^{-s}+\cdots$$

……

$$\xi_k(s)=k^{-s}+(2k)^{-s}+(3k)^{-s}+\cdots$$

的线性组合显然属于这种级数。这些函数在全平面上单值，仅有单

---

① 也许要除去 $s=1$；但下文不出现这种情形。（此处及以后的脚注全部是阿达玛原文所有）——原注

② 见 Zeits. für Math. Phys.，27(1882)，86～102. ——原注

③ 见他的博士论文(1894)及 Ann. de L'Éc. Norm. Sup.，(3)，11. ——原注

极点 $s=1$ 而且对应的留数是 $1/k$，这可由表达式

$$\xi_r(s)=(i/2\pi)\Gamma(1-s)\int(-x)^{s-1}(e^{(k-r)x}/(e^{kx}-1))dx \quad (8)$$

推出，此处积分是沿围道 C：由 $+\infty$ 出发，按逆时针方向绕过原点一周后再回到出发点，并且 $-x$（其中 x 为正实数）在围道第一部分上有幅角 $-\pi$，在第二部分上有幅角 $+\pi$。

上面公式中的积分是 s 的整函数，并且我在论文《论整函数的性质》[1]中所给的一般性定理可使我们确定它的型。为做此事，我们可以将围道划分为两部分，例如，一部分 C'，由点 $x=1$ 出发，绕原点一周后回到原处；另一部分 C''，由两条从 1 到 $+\infty$ 的"线段"组成。在这两个路径上所取的积分互相不等，第一个积分与积分

$$\int_1^{\infty}x^{s-1}(e^{(k-r)x}/(e^{kx}-1))dx \quad (9)$$

相差一个指数因子 $e^{-i\pi s}$，第二个积分则与此积分相差因子 $e^{i\pi s}$。现在积分(9)中 s^n 的系数为

$$\frac{1}{n!}\int_1^{\infty}(\log x)^n\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\frac{dx}{x}$$

它至多具有与函数

$$Q(s)=\int_1^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

中相应系数相同的阶（因 r 是非常大的整数），而 $Q(s)$ 的研究可归结于伽玛函数 $\Gamma(s)$，并且对于大的 s 它的阶与 $\Gamma(x)$ 的相同，因为对于在 C' 上所取的积分，其中 s^n 的系数为

$$\frac{1}{n!}\int_{C'}(\log x)^n\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}dx$$

它的阶至多为 $K^n/n!$，其中 K 表示 $\log x$ 在问题中的围道上的极大模。因此我们看到所考虑的整函数的型是 1，于是这个函数在半径为 R 的圆内的零点个数有阶 $R\log R$。

7. 如果 s 被换为 $1-s$，那么函数 ξ 的新值可以借助于胡尔维

---

① 见 J. de math. (ed. Jordan), (4), 11(1893). ——原注

奇建立的关系式[①]，通过旧值表示出来，我们将它写成下形[②]：

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)}\sum_{l=1}^{k}\sigma^{lr}\xi_{\lambda}(s)$$

$$=(\frac{2\pi}{k})^{s-1}(e^{i(s-1)\pi/2}\xi_{k-r}(1-s)+e^{-i(s-1)\pi/2}\xi_{r}(1-s)) \quad (10)$$

$$(r=1,2,\cdots,k)$$

其中 σ 表示 $e^{2\pi i/k}$。

8. 为了定义他的级数，狄利克雷[③]从 k 的素因子分解出发：

$$k=2^{\lambda}p^{\omega}p'^{\omega'}\cdots\ (\lambda\geqslant 0;\omega,\omega',\cdots>0) \quad (11)$$

并且对于每个与 k 互素的整数 n，求出由下列同余式定义的对应的一组指数 $\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\cdots$

$$\left.\begin{aligned} &n\equiv(-1)^{\alpha}5^{\beta} && (\bmod 2^{\lambda})\\ &n\equiv g^{\gamma} && (\bmod p^{\omega})\\ &n\equiv g'^{\gamma'} && (\bmod p'^{\omega'})\\ &\cdots && \cdots \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

其中 $g,g',\cdots$ 是对于模 $p^{\omega},p'^{\omega'},\cdots$ 的原根。于是，数 α 和 β 分别由模 a 和模 b 唯一确定，此处当 $\lambda=0$ 及 1 时 a 和 b 均为 1；当 $\lambda\geqslant 2$ 时，$a=2,b=\frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda})$。类似地，数 $\gamma,\gamma'\cdots$ 也分别模 $c=\varphi(p^{\omega})$，模 $c'=\varphi(p'^{\omega'}),\cdots$ 唯一地确定，此处 $\varphi(k)$ 是著名的欧拉函数，表示不大于 k 且与 k 互素的正整数的个数。

反过来，我们可以从关于指数 $\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\cdots$ 的知识推断出数 n（对于模 k）。换言之，对于与 k 互素且模 k 互不同余的 $\varphi(k)$ 个 n 的值一一对应地存在 $abcc'\cdots=\varphi(k)$ 组分别对于模 $a,b,c,c'\cdots$ 互不同余的 $\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\cdots$ 的值。

分别用 $\theta,\eta,\omega,\omega'\cdots$ 表示 a 次，b 次，c 次，c' 次，$\cdots$ 单位根，换言之，令

① 见 Zeits. für Math. Phys., 27(1882), 43. ——原注

② 见前面所引卡恩的博士论文，Nos. 43, 53. ——原注

③ 见 Abh. Akad. Wiss. Berlin(1837). ——原注

$$\theta=\pm 1, \eta=e^{2i\pi/b}, \omega=e^{2\pi i\tau/c}, \omega'={}^{2\pi i\tau'/c'}, \cdots, \tag{13}$$

由此狄里克莱引进函数

$$\Psi_\nu(n)=\begin{cases}0 & \text{若 } n \text{ 不与 } k \text{ 互素}\\ \theta^\alpha\eta^\beta\omega^\gamma\omega'^{\gamma'}\cdots & \text{若 } n \text{ 与 } k \text{ 互素}\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\cdots$是 n 的指数(下标 ν 是为了区分与单位根 $\theta,\eta,\omega,\omega'\cdots$的不同的选取可能相对应的 $\varphi(k)$个函数)。

然后他定义级数(在上述意义下是周期的)

$$L_\nu(s)=\sum\Psi_\nu(n)/n^s=\sum_{r=1}\xi_1(s)\Psi_\nu(r),\quad \nu=1,2,\cdots,\varphi(h) \tag{14}$$

它等于无穷乘积

$$L_\nu(s)=1/\prod(1-q^{-s}\Psi_\nu(q)) \tag{15}$$

其中 q 遍历所有素数。

级数 L_ν 分为三类:第一类含有单个级数 L_1,它对应于 $\theta=\eta=\omega=\omega'=\cdots=1$;第二类含有其中数 $\theta,\eta,\cdots$等于+1 或-1 的所有 L-级数(但除去 L_1);第三类乃是对应于这种情形的级数:这些单位根中至少有一个是复数。最后一类级数是成对共轭的;由 $\theta,\eta,\omega,\omega',\cdots$得到的级数 $L_\nu v(s)=\Sigma\xi_r(s)\Psi_\nu(r)$ 共轭于由根 $1/\theta,1/\eta,1/\omega,1/\omega',\cdots$得到的级数 $L_\nu(s)=\Sigma\xi_r(s)/\Psi_\nu(r)$。

级数 L_1 以单极点 $s=1$ 作为其仅有的奇异性。其余的 L 级数 L_ν 在整个平面解析(因为在点 $s=1$ 的留数之和 $k^{-1}\Sigma\Psi_\nu(r)$是零)。狄利克雷证明他们当 $s=1$ 全不为零。

9. 由一般性的关系(10),胡尔维奇能够断定当将 s 换成 $1-s$(与 ζ 函数情形一样),第二类中的某些级数仍变成它们自身(但相差一个常数因子)。

这个命题是下列李普希茨(R. Lipschitz)定理[①]的特殊情形:在下列条件下,将 s 换为 $1-s$ 时,级数 $L_\nu(s)$变为它的共轭(但相差一个与在 ζ-函数的公式中遇到的相类似的指数三角因子):

---

① 见 J. reine ang. Math., 105(1861),127~157. ——原注

1. $\lambda\geqslant3$，μ 为奇数；

2. $\tau\neq p-1$，若 $\omega=1$；τ 不被 p 整除，若 $\omega>1$；

3. $\tau'\neq p'-1$，若 $\omega'=1$；τ' 不被 p' 整除，若 $\omega'>1$；

……

这个……关于 $L_\nu(s)$ 的零点分布的定理给出重要的信息。因为这个函数没有实部超过 1 的复零点。而且它也没有实部为负数的复零点。所以它的复零点都包括在与 $\zeta(s)$ 的复零点所在的同样的带形内。它们与 $\zeta(s)$ 的零点一样，是关于直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 对称地分布的，这是因为对于每个零点 α 对应地存在一个零点 α' 使 α 和 $1-\alpha'$ 是复数共轭。

然而，这个结论在李普希茨关系不能应用的情形仍未证明；但这些情形可以通过下列的评注而归结到其到情形：

(1) 如果有一个单位根，例如，ω 等于 1，那么我们有

$$L_\nu(s)=(1-\Psi'_\nu(p)p^{-s})L'_\nu(s)$$

其中已用 L_ν' 表示设由数 k 中去掉因子 p^ω 后所产生的相应的级数。当指数 $\lambda=1$ 时，同样对于因子 2 也成立。

(2) 如果整数 τ 被 p^h 整除，那么可以先用 p^h 去除整数 k，然后写出相应的级数，注意 p^ω 的原根 q 也是 $p^{\omega-h}$ 的原根，当 μ 是偶数以及当 $\lambda=2,\theta=1$ 时，同样对于因子 2 也成立。

(3) 若对表达式 $(\theta,\Psi;e^{2\pi ir/2^\lambda})$ 取值 $e^{2\pi ir/4}+e^{-2\pi ir/4}$，则作者的推理对 $\lambda=2,Q=-1$ 也有效[1]。

因此我们对所有 L_ν 级数建立了结论。由此我们可以发展 L_ν 的零点分布理论，它与冯・芒哥德(H. von Mangoldt)的结果[2]类似。对此我们仅需注意，这位作者的工作除基于对于 $\zeta(s)$ 和 L_ν 级数所共有的性质外，还在于当点 s 跑过直线 $\mathrm{Re}(s)=a>1$ 时 $\zeta(s)$ 的幅角保持有界。现在函数 L_ν 也具有这个性质，因此我们可以完

① 见 J. reine ang. Math.，105(1861)，公式(9). 李普希茨用 Ψ 记我们这儿的 ν. ——原注

② 见 J. reine ang. Math.，114(1862)。——原注

成皮尔茨(Piltz)[1]在这方面所做的分析。

10. 狄利克雷用来证明他的定理的基本方程是

$$\sum_{\nu}\frac{\log L_{\nu}(s)}{\Psi_{\nu}(m)}=\varphi(k)\left(\sum q^{-s}+\frac{1}{2}\sum{}' q^{-2s}+\frac{1}{3}\sum{}'' q^{-3s}+\cdots\right)\quad(16)$$

其中 m 是任一与 k 互素的整数,和号 $\sum$,$\sum'$,$\sum''$,等等,分别表示在这样一些素数上求和:$q\equiv m(\bmod k)$,$q^2\equiv m(\bmod k)$,等等。对于 $m=1$ 它给出

$$\log\prod_{\nu}L_{\nu}(s)=\varphi(k)\left(\sum q^{-s}+\frac{1}{2}\sum{}' q^{-2s}+\frac{1}{3}\sum{}'' q^{-3s}+\cdots\right)$$

因函数 $\prod L_{\nu}(s)$满足§5中列出的那些条件,所以狄利克雷级数在直线 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上没有零点。

(朱尧辰 译 徐广善 校)

① 见 Habilitationsschrift, Jena, 1884. ——原注

代　数

54. 吉拉尔:论代数基本定理

文艺复兴时期数学家们对代数方程解法的探求,引导了方程论方面一些基本事实和定理的发现,其中应首先提到的也许就是所谓代数基本定理(即 n 次方程恰有 n 个根)。卡尔达诺已认识到一个三次方程能有三个根、一个四次方程能有四个根等等;德国学者洛特(P. Rothe)在 1608 年指出了一个 n 次方程至多能有 n 个根,但一般认为最先明确陈述代数定理的数学家是吉拉尔(Albert Girard, 1595～1632)。吉拉尔出生于法国洛林,但长期在荷兰生活与工作,曾编辑出版斯蒂文的著作,本人亦有数学,建筑学等多种著述传世。1629 年发表《代数学新发现》(L'invention nouvelle en l'algèbre, Amsterdam, 1629; ed. by D. Bierens de Haan Muré, Leiden, 1884),该书是以斯蒂文的《算术》(Arithmetique, 1585)为基础撰成,但包含了许多新结果。其中首次阐明负数的几何意义,同时对方程的复数根作了认真处理,这使他领悟到代数基本定理,虽然未能给出证明。以下选译该书有关部分,转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 81～87.

因为后面的定理需要使用某些新的术语,我们从定义开始。

定义 I　只有一个项等于一个数,这样的方程叫简单方程;否则就叫复合方程或混合方程。

说明 例如 x^2 等于 49,或 $12x$ 等于 24。因此当一项等于另一项,方程就是简单方程。但若含有两个以上的项,方程就是复合或混合方程,例如 x^2 等于 $6x+40$,或类似的方程①。

定义Ⅱ 当一项与另一项②比较,称第一项为主项(subject),或前项(autecedent);称另一项为谓项(predicate),或后项(consequent).

[吉拉尔举例:在 $3x^2-4x=70$ 中,$3x^2-4x$ 是主项,70 是谓项。]

定义Ⅲ 包含所有的项而无空缺的方程叫完全方程。

定义Ⅳ 一个混合方程,如未包含所有可能的项,就叫不完全方程。

[例:$x^6=11x^5+13x^4-7x^3+6x^2+9x-31$ 是完全方程,而 $x^4=5x^2+36$ 则是不完全方程。]

定义Ⅴ 仅有一个缺项的混合方程叫几乎完全方程;有二个缺项的混合方程叫缺二完全方程(complette à deux pres);类似地可以有缺三完全方程,等等。

定义Ⅵ 各项的指数③两两互素的方程叫基本(primitive)方程。

[例:$x^4=6x^3-13x+16$ 是基本方程。]

定义Ⅶ 各项的指数具有公因数的方程叫导出(dérivative)方程④。

[例:$x^6=7x^4-9x^2+12$ 和 $x^3=17$ 是导出方程。]

---

① 吉拉尔写作:"1②等于 49,或 12①等于 24";"1②等于 6①+40",系沿用斯蒂文的符号,本译文将②、①等改作现代记法 x^2,x。

② 吉拉尔将单项式与多项式统称为 quantity,意即"项",需视具体场合区分之。

③ 吉拉尔原著沿用斯蒂文的术语,称"指数"为 denominator,"系数"为 number,"项"为 quantity 等,本译文不一一注释。

④ 这也是来源于斯蒂文的概念。斯蒂文在《算术》一书中将多项式分为两类,一类为 $ax+b$,px^2+qx+r,bx^3+mx+n 等称为基本多项式;另一类为 px^4+qx^2+r,bx^6+mx^2+n 等可通过以 x 的幂代替 x 而从基本多项式得到,则称为导出多项式。斯蒂文将 ax^2+b,cx^3+d 等归为导出多项式,吉拉尔从之。

定义Ⅷ 在混合方程中，称最高次项为最大项或上端(haute extrémité)；称低一次项为第一混合项；再低一次项为第二混合项，依此类推；称 x^0 为尾项或下端(basse extrémité)。

[例：若 $x^9=3x^8-10x^6+4x+12$，则 x^9 是最大项，$3x^8$ 是第一混合项，$10x^6$ 是第三混合项，$4x$ 是第八混合项，12 是尾项。]

定义Ⅸ 混合方程可以有三种排序。第一种称为前序(priorité)，这时以代数数[①] 为主项(部分未知)，以尾项为谓项(仅有的已知量)；第二种称为替换(alternative)序，其中偶次项与奇次项分开并使上端符号为＋而不是－；第三种称为后(postériorité)序，其中上端符号为＋，系数为 1。

定义Ⅹ 在方程的替换序中，最大项或上端的系数只能是 1，符号为＋，所有指数为奇数的项列在方程的一边，指数为偶数的项列在另一边，也就是说一边的项为主项，另一边的项为谓项。当所考虑的方程重新排列时，替换序可以帮助我们找出原来的符号。

[例：方程 $x^7=4x^6+14x^5-56x^4-49x^3+196x^2+36x-144$，按替换序排列为 $x^7-14x^5+49x^3-36x=4x^6-56x^4+196x^2-144$]

定义XI 给定了若干个数，称所有这些数的和为第一组和；两两乘积之和为第二组和；每三个数的乘积之和为第三组和，依此类推，直到最后一组和即所有数的乘积。因此，给定多少个数就有多少组和。

[例：设有数 2，4，5，则这些数的第一组和为 11，第二组和为 8＋10＋20＝38，第三组和为 40；设有数 2，－3，1，3，则各组和为 3，－7，－27，－18；设这些数是 1，2，3，4，－1，－1，－2，则各组和为 6，－14，－56，49，196，－36，－144[②]。]

定义XII 将若干个单位排列两边，中间放置其它数字。我们

---

① 吉拉尔将 x，x^2 等称为“代数数”，意指来源于代数的数。

② Struik 指出最后一个例子有错，各组和应为 6，0，－42，21，84，20，－48。但根据下文(定理 1 说明)吉拉尔在这里似应给出数 1，2，3，4，－1，－2，－3，各组和则应为 4，－14，－56，49，196，－36，－144。这样“6”仅是“4”之笔误。

通过加法来得到这个可以称为开方三角形的图形：顶上的单位表示简单的算术数，其他则表示代数数[1]；然后称 1,1 为 x 排，1,2,1 为 x^2 排，1,3,3,1 为 x^3 排，依此类推，以至无穷[2]。

定理Ⅰ 若已知一些数，则每一组和中积的个数可以通过开方三角形求出：即通过该三角形中与这些数个数相应的排来求出。

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

[例：若给出 4 个数，取三角形中的第 4 排，即 1,4,6,4,1。第一个 1 是最大项的单位，4 是第一组和的项数，6 则是两两乘积的个数，等等。]

定理Ⅱ 除了不完全方程[3]，一切代数方程解的个数等于其最高次项的指数，并且解的第一组和等于第一混合项的系数，第二组和等于第二混合项的系数，第三组和等于第三混合项的系数，等等，最后组和则等于尾项。这里正负号应与按替换序排列的方程中所见相符。

说明 设已知一完全方程 $x^4=4x^3+7x^2-34x-24$，其最高次项指数为 4，这意味着方程有 4 个确定的解，不多也不少，它们是 1,2,−3,4；这里第一混合项系数为 4，第二混合项系数为 7，等等。然而为了使分析更完善，我们还必须考虑方程按替换序排列(即 $x^4-7x^2-24=4x^3-34x$)时的符号。此时各带符号系数(按相应项的次序排列)将是 4，−7，−34，−24，它们分别等于由 4 个解形成的 4 组和。

另设 $x^4=4x^3-6x^2+4x-1$，按替换序排列为 $x^4+6x^2+1=4x^3+4x$，各带符号系数按替换序排列为 4,6,4,1，它们是由 4 个解 1,1,1,1 形成的各组和。其他情形类同(这里请注意，当解是简单单位数时，由它们形成的各组和就是开方三角形中最高次项对

---

① 算术数即普通数，关于"代数数"，见前注。

② 比即"帕斯卡三角形"，吉拉尔是从斯蒂文著作中知道"开方三角形"的，关于帕斯卡三角，参见本书[55]，帕斯卡："论算术三角"。

③ 吉拉尔在紧接的"说明"中，实际上论述了怎样取消这一限制，从而使他陈述的定理具有一般性。

应排的数字)。类似地,对定义 **X** 中的方程

$$x^7=4x^6+14x^5-56x^4-49x^3+196x^2+36x-144$$

有 7 个解,即 1,2,3,4,-1,-2,-3,如定义 X 和 XI 中所讨论的那样。

至于不完全方程,它们并不总有那么多解。尽管如此,我们可以对那些不可能存在的解作适当的解释,并根据方程的缺项与不完全来说明这种不可能性的根源。例如 $x^3=7x-6$,这里我们仍然有 3 个解,即 1,2,-3。所有这样的不完全方程都可以改写成完全方程的形式:$x^3=0x^2+7x-6$,使我们能像上述那样找出方程所有的根。例如方程 $x^3=167x-26$,写成完全形式为 $x^3=0x^2+167x-26$,按替换序排列为 $x^3-167x=0x^2-26$,各带符号系数(按相应项的次序排列)将是 0,-167,-26,因此我们必须找出三个能形成这样一些组和的数来,也就是说:它们的和为 0,两两乘积之和为-167,同时所有这三个数的积为-26,现在假设我们已找到这三个数中的一个,比方说-13,正如我们上面所做的那样,那么因为这三个数之积是-26,另两个数的积应为 2,又因为这三个数之和为 0,其中一个数是-13,则另两个数之和应为 13。这样问题就被归结为:求两个数,它们的和为 13,积为 2。注意我们说的是两个数,因此将得到一方程,其主要项是 $x^2\cdots$,按替换序排列为 $x^2+2=13x$。恢复成通常次序就有 $x^2=13x-2$,答数为 $6\frac{1}{2}+\sqrt{40\frac{1}{4}}$,以及$6\frac{1}{2}-\sqrt{40\frac{1}{4}}$,与-13 一起就是所求的三个解。

同样,若 $x^4=4x-3$,则四组和为 0,0,4,3,结果得到 4 个解:

$$1$$
$$1$$
$$-1+\sqrt{-2}$$
$$-1-\sqrt{-2}$$

(注意最后两数之积是 3). 所以我们必须记住:如果有人问到研究不可能解的目的是什么,我的回答是有三方面目的:首先是为了确

保法则的一般性；其次是为了论证不存在其它解；最后是为了应用。用处是明显的，因为它可以帮助我们求出与斯蒂文《算术》中第71问题情形5相类似的方程的解[①] ……。

通过这一方法你将发现，迄今还没有人能求出这些方程的所有的解。

（李文林 译）

---

① 参阅 The Principal Works of Simon Stevin, Ⅱ B (Swets-Zeitlinger, Amsterdam, 1958), p. 648。斯蒂文在第71问题中讨论了三次方程的一般理论。

55. 帕斯卡:《论算术三角》

帕斯卡(Blaise Pascal)并不是所谓"帕斯卡三角形"的最早发现者。中世纪中国和阿拉伯数学家早就知道这样的数字三角形(贾宪《黄帝九章算经细草》,约1050;萨马瓦尔[al-Samaw'al]《眩惑》,约1150,等)。欧洲在帕斯卡之前亦已有人构造过类似三角形(如阿皮安[P. Apian],1527;斯蒂菲尔[M. Stifel],1544,等)。帕斯卡的功绩在于他发现了"算术三角"的许多性质及它们在组合分析、概率论、二项展开等许多方面的有价值的应用,这使他的名字在西方文献中仍然与这种三角形联系在一起。

帕斯卡《论算术三角》一书约完成于1654年,但在他去世以后才出版(Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités, sur la même manière, Paris,1665),该书正文包括算术三角形的构造、关于算术三角形性质的19条"推论",随后是一些应用短篇。以下摘录这本小册子的大部分正文及二项展开方面的应用(关于概率应用的论述从略),转译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. pp. 67～79,原著亦载 L. Brunschvicg and P. Boutroux(eds): Oeuvres de Blaise Pascal, Ⅲ ,Hachette,Paris,1909.

关于算术三角的论文

定义

定义**算术三角**为结构如下的图形:

从任意点 G 画两条互相垂直的线 GV，$G\zeta$[①]，从 G 开始，在每条线上划分许多相等且连续[②] 的部分，叫做 1，2，3，4 等等；这些数字就是直线上分割的指标[③]。

然后我将每条线上第一个分点用一直线连起，形成一个以它为底边的三角形。

同样我再把第二分点用一直线连结起来形成以它为底的三角形。

像这样将有相同指标的分点连接起来，形成许多的三角形及底边。

过每一分点作边的平行线，它们互相交叉形成一些小方块，叫它做格。

在两条平行线间的格从左到右叫做同一平行行的格，如格 G，σ，π 等或 φ，Ψ，θ 等。

从上到下的两条平行线间的格叫做同一垂直行的格，如 G，φ，A，D 等或 σ，Ψ，B 等。

那些同底的斜方向上的格子叫做同底格，如：D，B，θ，λ，或 A，Ψ，π。

在同底上距底的两个端点距离相同的格子叫做是互反的。比如 E 和 R，还有 B 和 θ。之所以这样叫是因为其中一个格子的平行行指标是另一个格子的垂直行指标，这在下面的例子中看得很明显，E 在第二垂直行及第四平行行上，与它互反的 R 在第二平行行及对应的第四垂直行上，容易验证那些指标互反对应相等的格子在同一底上且距两端点的距离相等。

同样容易证明不管任何格子的垂直行指标加上它的平行行指标总比它的底指标大 1。

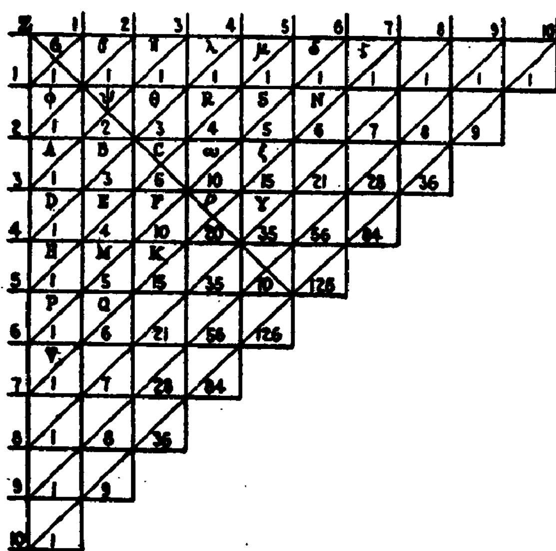
比如，F 格在第三垂直行和第四平行行，及第六底上；行指标

---

① 法文版错误地用 ξ 来代替 ζ。

② 帕斯卡原用“连续的”(continues)和“相邻的”(contigues)两个词互相替代地表达一概念，这里按原词原意译出。

③ 法文本用词为“指数”(exposans)。



算术三角

的和 3+4 比底指标 6 大 1。这由算术三角的两边被分做相等数量的部分这一事实得到，它理解起来要比证明容易。

以上陈述相当于说每一底比上一底多一格，且格的数量与指标的数量相同。这样，第二底 $\varphi\sigma$ 有两个格，第三底 $A\Psi\pi$ 有三个格，等等。

每格的数字由以下方法得到：

在直角上的第一格的数字是任意的；但它一旦确定，所有其他数都被确定下来；因此此数叫做算术三角的“初始数”。其他每个数都是由下面规则确定的：

每格的数字等于它垂直行上前面一格的数字加上它平行行上前面一格的数字。所以 F 格（即 F 格的数）等于 C 格加上 E 格，其他格的情况与此类似。

从这些事实得到几个结果，下面是一些主要的，其中初始数为 1；但其得到的结论对其他的情况也适用。

推论 1 在每一算术三角中，第一平行行的所有格及第一垂

直行的所有格都等于初始数。

因从算术三角的构成得知，每格等于它垂直行的前一格加上它平行行的前一格，现第一平行行上的格子在垂直行方向上前面并没有格子，同样对第一垂直行上的格子来说，平行行方向上前面也没有格子；所以它们互相相等，也就等于初始的第一个数字。

故 φ 等于 G＋零，即 φ 等于 G。

同样 A 等于 φ＋零，即 φ。

同样 σ 等于 G＋零，π 等于 σ＋零。

其他数同理。

推论 2　在每一算术三角中每一格等于它前一平行行中由其所在的垂直行到第一垂直行的所有数字的和。

考虑任一格 ω：我断言它等于 $R+\theta+\Psi+\varphi$，它们是上面的平行行中从 ω 的垂直行到第一垂直行的所有格的和。

这从这些格子的定义（特别是它们是如何形成的）可以明显看出。

因 ω 等于 $R+\underbrace{C}$

$\theta+\underbrace{B}$

$\Psi+\underbrace{A}$

φ，由前所述，A 与 φ 相等。

故 ω 等于 $R+\theta+\Psi+\varphi$。

推论 3　在每一算术三角中，每一格等于它前一垂直行中由其所在的平行行到第一平行行的所有格的和。

考虑任一格 C：我断言它等于 $B+\Psi+\sigma$，它们是上面的垂直行中从格 C 的平行行到第一平行行的所有格子的和。

这同样由格的定义得出。

因 C 等于 $B+\underbrace{\theta}$

$\Psi+\underbrace{\pi}$

σ，由推论 1，π 等于 σ。

故 C 等于 $B+\Psi+\sigma$。

推论 4 在每一算术三角中，每格减去 1 等于那些在它的垂直行和平行行内的（不包括边界在内的）所有格子的和。

考虑任一格 ξ：我断言 $\xi - g$[①] 等于 $R+\theta+\Psi+\varphi+\lambda+\pi+\sigma+G$，它们是在行 $\xi\omega CBA$ 和行 $\xi S\mu$ 内的不包括边界格的所有格之和。

同样由定义得到此结论。

因 ξ 等于 $\lambda+R+\underbrace{\omega}$

$$\pi+\theta+\underbrace{C}$$

$$\sigma+\Psi+\underbrace{B}$$

$$G+\varphi+\underbrace{A}$$

$$G$$

故有 ξ 等于 $\lambda+R+\pi+\theta+\sigma+\Psi+G+\varphi+G$

注意——我曾说过“每格减去 1”，因 1 是初始数；但如果初始数是另一数，则必须说“每格减去开始一格的数。”

推论 5 在每个算术三角中，每一格都与它互反的格相等。

在第二底 $\varphi\sigma$ 上，很明显两个互反的格 φ，σ 彼此相等且等于 G。

在第三底 $A\Psi\pi$ 上，同样可以看出互反的格 π，A 是彼此相等的且等于 G

在第四底上，可见两端的 D，λ 彼此相等且等于 G。

对在它们中间的两个数，也是明显相等的，因 B 等于 $A+\Psi$，θ 等于 $\Psi+\pi$，而我已指出 $\pi+\Psi$ 等于 $A+\Psi$；故得上面结论，等等。

这样，我们可以指出在所有其他的底上的互反格都是相等的，因为在底端的格都等于 G，而其他的格总可以由它前面底上的格子得到其数字，而前面底上的格子也是彼此互反的。

推论 6 在任意算术三角中，一平行行与同它有相同指标的垂直行上的格子对应相等。

---

① g 似乎应是 1，这里指初始数。

因为它们是由彼此互反的格组成的。

故第二垂直行 $\sigma\Psi BEMQ$ 是与第二平行行 $\varphi\Psi\theta RSN$ 完全相等的。

推论 7 在任何算术三角中，每个底上格子的数字之和是前一底上格子数字之和的两倍。

考虑任一底 $DB\theta\lambda$，我断言它格子的数字之和是前一底 $A\Psi\pi$ 上格子的数字之和的二倍。

因底端的格……	$\underbrace{D}$,	$\underbrace{\lambda}$,
等于底端的格……	A,	π,
而每个其他的格……	$\underbrace{B\quad,}$	$\underbrace{\theta\quad,}$
等于另一个底上两个格数字的和，	$A+\Psi$,	$\Psi+\pi$

故 $D+\lambda+B+\theta$ 等于 $2A+2\Psi+2\pi$.

对其他底的情况可以同样地证明。

推论 8 在任何算术三角中，每一底上数字之和构成一列几何级数[①]，这一几何级数从 1 开始，顺序与底的指标一致。

第一底的和是 1。

第二底的和是第一底的二倍，即 2。

第三底的和为第二底的和的二倍，即 4。

如此以至无穷。

注——如果初始数不是 1，比如 3，结论也是成立的；不过形成的几何级数不是从 1 开始的 1,2,4,8,16 等等，而是另一个从初始数 3 开始的几何级数:3,6,12,24,48 等等。

推论 9 在任一算术三角中，每一底减 1 等于前面所有底的和。

因这是双倍(几何)级数的一个特点。

注——如果初始数不是 1，则必须说:“每一底减去初始数”。

推论 10 在任意算术三角中，在一底上从一端开始的任意多的连续格子的和等于前一底上相同数量的格子之和再加上前一底

① 原著所用的词“双倍级数”指级差为 2 的几何级数。

上少一个格的格子数量之和。

取底 $D\lambda$ 上任意多的格子的和，比如前三格 $D+B+\theta$。

我断言它等于前一底上的前三格 $A+\Psi+\pi$，再加上前两格 $A+\Psi$

$$\text{因}\quad \underbrace{D\quad.}_{\text{等于}\ A.}\qquad \underbrace{B\quad.}_{A+\Psi}\qquad \underbrace{\theta\quad.}_{\Psi+\pi}$$

故 $D+B+\theta$ 等于 $2A+2\Psi+\pi$。

定义 定义那些被直角的平分线斜着穿过的格子，如 G,Ψ,C,ρ 等等为“分划格”。

推论 11 每一分划格都是它平行行或垂直行上前一格的两倍。

考虑一分划格 C，我断言它是 θ 的两倍，也是 B 的两倍。

因 C 等于 $\theta+B$，而 θ 等于 B(由推论 5)。

注——所有这些推论都是有关在算术三角中所遇到的等量问题的，现在我们要考虑与比例有关的问题；对它们来说，下面的定理是基本的。

推论 12 在任意算术三角中，在同底上的两个毗邻的格子，上面的格与下面的格的比等于从上面格到此底的顶格的格数与从下面的格到底端的格数的比，那两个格子都包括在其中。

考虑同底上任意两相邻的格 E,C，我断言：

$\underbrace{E}$	比 $\underbrace{C}$	等于 2	比 3
下面的	上面的	因从 E 到底端有两个格，即 E,H；	因以 C 到项端有三个格，即 C,R,μ

虽然这一定理有无限多种情况，我将给出一个很短的证明，首先假定两个前提。

引理 1 在第二底上此定理显然成立；因很明显 φ 比 σ 等于 1 比 1。

引理 2 如在某一底上有此比例，则在下一底上一定也有此比例。

从以上引理可见此比例在所有底上都成立：因从引理 1 得在第二底上成立；于是由引理 2，在第三底上也成立，于是在第四底上也成立，如此以至无穷。

那么下面仅须证明引理 2 是确实成立的。如在任意底上有此比例，不妨说在第四底 $D\lambda$ 上，D 比 B 等于 1 比 3，B 比 θ 等于 2 比 2，θ 比 λ 等于 3 比 1 等。我就说在下一底 $H\mu$ 上也有此比例，比如 E 比 C 等于 2 比 3。于是

由假设，D 比 B 等于 1 比 3。

于是 $\underbrace{D+B}_{E}$ 比 B 等于 $\underbrace{1+3}_{4}$ 比 3

即 E 比 B 等于 4 比 3

同理由假设 B 比 θ 等于 2 比 2

于是 $\underbrace{B+\theta}_{C}$ 比 B 等于 2+2 比 4[①]

即 C 比 B 等于 4 比 2

而 B 比 E 等于 3 比 4。

由合比定理，C 比 E 等于 3 比 2，即所求证。

同理可证剩下的所有情况，因这一证明仅建立在此比例在前一底上成立，且每一格等于它前面的格加上上面的格这一在所有情况下均成立的假定上。

……[②]

算术三角的应用[③]

求和二项式和差二项式[④] 的次数

如果求一项为 A，另一项为 1 的二项式的幂，如四次幂，即 $A+1$ 的四次方，则看算术三角的第五底，即指标为 4+1 的底。这一

---

① 英译本为 4，实际上是 2。

② 接下去是推论 13～19，本译文从略，举例说，若记第 l 平行行，第 k 垂直行的格为 P_l^k，使 $P_l^k=\frac{(k+l-2)!}{(k-1)!\ (l-1)!}$，则其中推论 17 相当于说：$\sum_{i=1}^{k} P_l^i : \sum_{j=1}^{l} P_j^k = k : l$，例如 $(B+\Psi+\sigma):(B+A)=3:2$.

③ 帕斯卡在正文后加有若干讨论算术三角形应用的短论，这里仅选其一。

④ 帕斯卡用“差二项式”(apotome)表示两项差的二项式。

底上的格子是1,4,6,4,1;第一个数——1是A^4的系的数;第二个数——4是A的低一次的幂即A^3的系数;底的下一个数6是再低一次的幂的系数,即A^2的系数;下一个数4是A的便低一次的幂——A的系数;底的最后一个数1为常数。这样我们得到:$1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$,即和二项式$A+1$的四次(平方的平方)幂。故若A(可代表任何数)是1,和二项式$A+1$变成2,则此幂$1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$变为$1.1^4+4.1^3+6.1^2+4.1+1$。

就是说,1乘以A(即单位)的四次幂是	……	1
四乘1的立方是	……	4
六乘1的平方是	……	6
四乘单位,即	……	4
加1	……	1
加起来的和是	……	16

而事实上,2的四次幂确为16。

如果A是另一个数,如4,这样和二项式$A+1$就是5,那么它的四次幂

$1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$照此法将是:

$$1.4^4+4.4^3+6.4^2+4.4+1$$

即:一倍的4的四次幂,即	……	256
4的立方的四倍,即	……	256
4的平方的六倍	……	96
4的四倍	……	16
加1	……	1
和	……	625

得到5的四次方:而事实上5的四次幂确为625。

其他的例子依同理可以验证。

如果要求和二项式$A+2$的四次幂,写下相同的表示式$1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$,然后把2的前四个幂2,4,8,16写在除去第一个之外的底的每个数字下面,

$$1A^4+4A^3+6A^2+4A^1+1$$
$$\quad\quad 2 \quad\quad 4 \quad\quad 8 \quad\quad 16$$

然后把相应的数相乘。

$$\begin{array}{r} 1A^4+4A^3+6A^2+4A^1+1 \\ 2 \quad\quad 4 \quad\quad 8 \quad\quad 16 \\ \hline 1A^4+8A^3+24A^2+32A^1+16 \end{array}$$

这样就得到和二项式 $A+2$ 的四次幂;如果 A 是 1,则这个四次幂如下:

A 的四次幂的一倍是,	……	1
1 的立方的八倍	……	8
$24,1^2$	……	24
32,1	……	32
加	……	16
和为	……	81

即 3 的四次幂,而事实上 81 是 3 的四次方。

如果 A 是 2,那么 $A+2$ 是 4,则它的四次幂将是

A(或 2)的四次幂的一倍,即	……	16
$8,2^3$	……	64
$24,2^2$	……	96
32,2	……	64
加 2 的四次幂	……	16
和		256

即为 4 的四次幂。

同样可求 $A+3$ 的四次方,同样写下:

$$A^4+4A^3+6A^2+4A+1$$

在下面写上数字

$$\begin{array}{rrrrr} & 3 & 9 & 27 & 81 \\ \hline 1A^4 & +12A^3 & +54A^2 & +108A & +81 \end{array}$$

即 3 的前四个幂乘以相应的数字得到 $A+3$ 的四次幂。

如此以至无穷，如果要求五次方，即用平方——立方来代替四次方，则写下第六底的数字然后就像在第五底的情况下我描述的那样，对其他次幂的情况同样处理。

差二项式 $A-1$，$A-2$，等的幂也可同样求得。方法完全类似，不同的只是符号问题，符号"+"和"−"交替出现，第一项总是带"+"号的。

于是 $A-1$ 的四次幂可以用此方法求得。$A+1$ 的四次幂根据前述的方法是 $1A^4+4A^3+6A^2+4A+1$。于是依所述的方法改变符号，我们得到 $1A-4A^3+6A^2-4A+1$。这样 $A-2$ 的立方也同样得到。因为 $A+2$ 的立方依前面的法则是 $A^3+6A^2+12A+8$，于是改变符号得到 $A-2$ 的立方 $A^3-6A^2+12A-8$。如此以至无穷。

我不想给出所有的证明了，一方面有些人〔如埃里冈(Hérigone)〕已研究过这些问题，另外，这些证明也过于简单。

（李家宏 译　欧阳绛 校）

56. 牛顿:论二项定理

牛顿是最先将二项定理推广到负数幂与有理数幂情形的数学家。牛顿二项定理的原始推导记录在他1664～1665年间的一本读书笔记中,但迟至1676年才在致皇家学会秘书奥尔登堡(H. Oldenburg)的两封信中正式公布这项发现。这两封信是为了答复奥尔登堡转达的莱布尼茨的有关询问而写,其中《前信》(epistola prior,1676年6月13日)陈述了任意幂指数的二项定理。由于莱布尼茨要求进一步说明定理的来源,牛顿又在《后信》(epistola posterior,1676年10月24日)中追述了自己发现二项定理的思路。原信较长,还包括与流数论有关的字谜,这里仅摘录关于二项定理的部分,译自H. W. Turnbull(ed.):The Correspondence of Issac Newton, vol. I. pp. 32～41, pp. 130～149, Cambridge University Press, 1959.

1. 1676年6月13日的信

最尊敬的阁下:

在最近您转寄给我的莱布尼茨先生一封信的摘录中,他出于谦虚,将目前引起讨论的无穷级数理论归功于我们的同胞。尽管如此,我毫不怀疑,正如莱布尼茨本人声明的那样,他不仅发现了把任意量化为这类级数的方法,而且创造了各种简明公式,可能与我们自己的发现相仿,如果不是更好的话。不过,由于他很想了解英国人在这一领域的工作,而我本人若干年前曾钻研过这一理论,所以我将自己得到的一些结果寄给您,以满足(至少是部分地满足)他的要求。

分数可通过除法化为无穷级数;根式可通过开方根化为无穷

级数，这种符号运算的进行，就像通常十进数情形一样。这就是无穷级数方法的基础，但下述定理可以大大简化开方根的运算：

$$(P+PQ)^{m/n}=p^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots$$

此处 $P+PQ$ 表示要求其根或任意次幂或幂的根的量；P 表示该量的首项，Q 则是与首项相除后的余项，m/n 是 $P+PQ$ 的幂指数，不论其是整数还是分数、正数还是负数。分析学家们习惯于把 aa，aaa，…记作 a^2，a^3，…，因此我也将 $\sqrt{a}$，$\sqrt{a^3}$，$\sqrt{c:a^5}$ 等记作 $a^{1/2}$，$a^{1/3}$，$a^{5/3}$；将 $1/a$，$1/aa$，$1/a^3$ 记作 a^{-1}，a^{-2}，a^{-3}。同样地，

记 $\dfrac{aa}{\sqrt{c:(a^3+bbx)}}$ 为 $aa\times(a^3+bbx)^{-1/3}$，

记 $\dfrac{aab}{\sqrt{c:\{(a^3+bbx)(a^3+bbx)\}}}$ 为 $aab\times(a^3+bbx)^{-2/3}$。

在最后例子中，若设 $(a^3+bbx)^{-2/3}$ 为法则中之 $(P+PQ)^{m/n}$，则 $P=a^3$，$Q=bbx/a^3$，$m=-2$，$n=3$。在计算过程中要求的各商项用 A，B，C，D 等来表示，即首项 $P^{m/n}$ 记作 A；第二项 m/nAQ 记作 B；等等。对其余情形，我们将通过例子来说明上述法则的使用。

例 1

$$\sqrt{(c^2+x^2)}\text{ 或 }(c^2+x)^{\frac{1}{2}}=c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}+\cdots$$

在这个例子中，$P=c^2$，$Q=x^2/c^2$，$m=1$，$n=2$，$A(=P^{m/n}=(cc)^{\frac{1}{2}})=c$，$B(=(m/n)AQ)=x^2/2c$，$C\left(=\dfrac{m-n}{2n}BQ\right)=-\dfrac{x^4}{8c^3}$；等等。

例 2

$\sqrt[5]{(c^5+c^4x-x^5)}$，也即是

$$(c^5+c^4x-x^5)^{\frac{1}{5}}=c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}+\frac{-2c^8x^2+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}+\cdots$$

这是显然的，如果在上述法则中取 $m=1$，$n=5$，$P=c^5$，以及 $Q=(c^4x-x^5)/c^5$。也可以取 P 为 $-x^5$，Q 为 $(c^4x+c^5)/(-x)^5$，则结果

将得到

$$\sqrt[5]{(c^5+c^4x-x^5)}=-x+\frac{c^4x+c^5}{5x^4}+\frac{2c^8x^2+4c^9x+2c^{10}}{25x^9}+\cdots$$

若 x 很小,选择第一法;若 x 很大,则用第二法。……

2. 1676 年 10 月 24 日的信

最尊敬的阁下:

拜读了莱布尼茨和契恩豪斯(Tschirnhaus)两位杰出人物的来信,欣喜万分。莱布尼茨得到的收敛级数方法确实很漂亮,即使作者没写过其他任何东西,此项工作也足显其天才了。另外,该信通篇都使人感到作者名不虚传,也使我们期待他做出极伟大的工作。为达到同一目的而采取的多种途径,尤令人高兴,因为我以为我已经知道了三种获得这些级数的方法,很少再有另辟新径的希望了。我所知的方法有一种以前已介绍过;这里补充说明另一种方法,我最初就是用此法发现了这些级数,而这是在我知道现在使用的除法和开方法之前。这方法的解释同时可以说明我在前一封信开头所提出的定理的基础,这正是莱布尼茨对我的要求。

当我刚开始研究数学时,就遇到了著名的沃利斯论级数的著作。他本人通过这些级数的插值,表示圆和抛物线的面积。事实是这样的:在以 x 为公共底或轴线,纵坐标分别为

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},(1-x^2)^{\frac{1}{2}},(1-x^2)^{\frac{2}{2}},(1-x^2)^{\frac{3}{2}},(1-x^2)^{\frac{4}{2}},(1-x^2)^{\frac{5}{2}},\cdots$$

的曲线级数中,如对隔位面积即

$$x,x-\frac{1}{3}x^3,x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,$$

$$x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7,\cdots$$

可以进行插值,那么我们就能得到中间曲线的面积,其中第一条曲线就是圆 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$。为了对这些级数作插值,我注意到它们的第一项都是 x,第二项 $\frac{0}{3}x^3,\frac{1}{3}x^3,\frac{2}{3}x^3,\frac{3}{3}x^3,\cdots$,则形成算术级数,因而

这些级数头二项的插值应为 $x-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$，$x-\frac{1}{3}(\frac{3}{2}x^3)$，$x-\frac{1}{3}(\frac{5}{2}x^3)$，…。为了计算其他项的插值，我考虑到因其分母 1，3，5，7，…形成算术级数，剩下要研究的只是分子的数值系数了。然而在隔位出现的面积中，这些系数恰好是数 11 的幂，即 11^0，11^1，11^2，11^3，11^4 等中的数字，也就是说，第一个级数系数为 1；第二个级数系数为 1，1；第三个为 1，2，1；第四个为 1，3，3，1；第五个为 1，4，6，4，1 等等。我进一步考虑这样的问题：若已知这些级数的头二个数字，如何推算其余的数字，我发现若设第二个数字为 m，则其余的数字可通过将级数

$$\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}\times\cdots$$

的项依次连乘而得。例如设 $m=4$，则 $4\times\frac{1}{2}(m-1)$ 即 6 为第三项；$6\times\frac{1}{3}(m-2)$ 即 4 为第四项；$4\times\frac{1}{4}(m-3)$ 即 1 为第五项；$1\times\frac{1}{5}(m-4)$ 即 0 为第六项，在该例中级数到此终止。我应用这一法则进行级数插值，例如对圆，已知第二项是 $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$，设 $m=\frac{1}{2}$，用此法求出各项为

$$\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\text{或}-\frac{1}{8}；-\frac{1}{8}\times\left(\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\right)\text{或}+\frac{1}{16}；\frac{1}{16}\times\left(\frac{\frac{1}{2}-3}{4}\right)\text{或}-\frac{5}{128}；$$

依此类推以至无穷。这样我终于弄清了所求圆段的面积是

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^2}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{1}{128}x^9}{9}-\cdots$$

用同样推理，可类似地获得其它插值曲线如抛物线以及在级数 $(1+x^2)^{\frac{0}{2}}$，$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$，$(1+x^2)^{\frac{2}{2}}$，$(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$，…，中隔位出现的其它曲线的面积。同样的插值理论亦可应用于其它级数，以及同时空隔

两位或更多位的情形。这就是我在这方面的最新研究，若不是数周前我又重新查阅了过去的笔记，它们肯定已从我的记忆中消失了。

当我认识到上述事实后，便立即开始考虑下列诸项

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},(1-x^2)^{\frac{2}{2}},(1-x^2)^{\frac{4}{2}},(1-x^2)^{\frac{6}{2}},\cdots$$

亦即

$$1,1-x^2,1-2x^2+x^4,1-3x^2+3x^4-x^6,\cdots$$

本身也可像它们所产生的面积那样进行插值，为此只须将表示面积的项中出现的分母 1，3，5，7，…略去即可；这意味着插入量$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$或$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$或更一般地$(1-x^2)^m$诸项系数可由乘积

$$m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\cdots$$

表示，使得（例如）

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$是$1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\cdots$之值，

$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$是$1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6\cdots$之值，

$(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$是$1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\cdots$之值，

于是就得到我在上一封信开头提到的将根式展为无限级数的一般法则，并且是在我知道开方法之前。然而一旦知道了这一法则，其他一切就昭然若揭了。为了对此法进行验算，我将$1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\cdots$自乘，结果得$1-x^2$，其他项随着级数趋向无限而消失，甚至将$1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\cdots$自乘二次，同样得到$1-x^2$。这不仅证明了上述结论，同时还促使我去作相反的尝试，即这些已被确认为量$1-x^2$的根的级数，是否能通过算术途径开方得到呢？事情很顺利，以下就是求平方根的运算程序：

$$1-x^2(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\cdots$$

$$\frac{1}{0-x^2}$$

$$\frac{-x^2+\frac{1}{4}x^4}{-\frac{1}{4}x^4}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8}{0-\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8}$$

弄清这点以后，我完全放弃了级数插值法，仅仅使用上述运算作为更自然的基础。关于用除法展开级数，也没有任何秘密，这无论如何是更容易的事情。

……

（李文林 译）

57. 韦塞尔:《方向的解析表示》

虽然从文艺复兴时代起数学家们在解方程过程中已引出了虚根,但对复数的普遍承认是在它获得可靠的几何解释之后。历史上第一个给出复数几何表示的学者是韦塞尔。

韦塞尔(C. Wessel,1745~1818)生于挪威,毕业于哥本哈根大学,长期任丹麦皇家科学院测量员。他在1797年向丹麦科学院提交了一篇论文《方向的解析表示》(Om Dizectionens Analytiske Betegning)。这篇文章的主要目的是创造几何方法来表示方向,复数的几何表示正是这一思想的产物。韦塞尔阐明了复数作为平面有向线段(平面向量)的运算法则,同时还建立了初步的三维向量论。韦塞尔的几何表示方法应该有助于人们普遍接受复数的概念,但由于他的论文是用丹麦文发表于丹麦皇家科学院论文集(1799),在1897年被译为法文前未能引起人们的重视。稍晚于韦塞尔,阿尔冈(J. R. Argand,1806)、沃伦(J. Warren,1828)和高斯(1831)等也相继独立发表了复数几何表示的研究,其中高斯的工作产生了普遍影响。

以下摘录韦塞尔论文中关于平面有向线段的解析表示部分,转译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. pp. 55~66.

方向的解析表示,一种尝试
——主要用于平面和球面多边形的解

目前我们尝试论述的问题是:怎样解析地表示方向,也就是我们怎样表示直线,才能在一个包含一条未知线和若干已知线的方程中,把未知线的长度和方向都表示出来。

为了回答这个问题，我的工作基于在我看来不容置疑的两个命题。第一个是：能够被代数运算作用的方向的变化能用它们的符号表示。第二个是：只有当方向能用代数运算改变时，它才是一个代数对象。然而，由于除了变成相反的方向，即从正的变成负的，或反过来(vice versa)之外，用目前的方法不能变成别的方向(至少，像通常解释的那样)，因而只可能指定这两个方向，对于其他方向，问题就不可解了。我猜测这就是没有人对这个问题进行研究的原因①。毫无疑问，人们认为这些运算已有了被人普遍接受的解释，不允许再做任何改变。

因此只要这种解释仅一般地涉及数量，我们并不反对。但是在某些情况下，当所论述的量的性质似乎需要这些运算的更为精确的定义，而且应用这些定义有所裨益时，进行调整就应当视为可行的。当我们从算术的分析转向几何的分析，或从抽象的数的运算转向直线的运算时，我们确实遇到一些量，它们彼此之间的关系与数之间的关系一样，但它们还有许多其他关系。如果我们现在广义地说明这些运算，而不像迄今那样将它们的应用局限于具有相同或相反方向的直线，将目前的狭义概念作某些延拓，使之不仅适用于与以前相同的情形，而且适用于数不胜数的新情况，如果我们这样随心所欲而又不违反已被普遍接受的运算法则，我们就不会违反数的第一条定律。我们只是扩展它，使之适合于所考虑的量的性质，我们考察方法的规则，它要求我们逐步使一个困难的原理变得清晰易懂。

用于几何中的运算比用于算术中的运算涵义广泛不是一个不合理的要求。人们易于承认用这种方法可能在线的方向上产生无数变化，在这样做时，我们应像以后将要证明的那样，不仅完成所有可以避免的不可能的运算——我们应当帮助解释矛盾的说法：目前可能的方法必须用不可能的方法尝试——而且要实现同一平

① Magister Gilbert 在他的获奖论文 Calculus Situs 中可能包含对于这个问题的一种说明。——原注

面上所有直线的方向都能像它们的长度那样解析地表示，而不必有新符号或新法则之忧。如果方向能够解析地表示，从而比它仅在某些特殊情形中用图形表示时更多地依赖于代数法则，那么人们无疑会习以为常，轻而易举地看到几何命题的一般效力。因此，除了应用相等（那些同向的）和相反的线的运算外，应用适于其他线的运算不仅应该允许，而且确实有利。为此我以下章节的目的是：

Ⅰ．首先，定义这种运算的法则；

Ⅱ．接着，用两个例子说明当直线在同一平面上时，法则的应用；

Ⅲ．用一种新的，非代数的运算方法定义位于不同平面上的直线的方向；

Ⅳ．用这种方法解平面和球面多边形；

Ⅴ．最后，用同样的方式推导球面三角形的普通公式。

以上是这篇论文的主题。我探索一种方法来避免不可能的运算就是对这些主题的实现，当我发现了这种方法时，我将其用于某些著名的公式中，使我确信这些公式的普遍性。尊敬的国家议员特滕斯（Tetens）先生热心地通读了初稿。正是由于这位卓越的学者的鼓励、建议与指导，文章中最初的不完善之处得以删除，使得皇家科学院出版的正是该文的精华部分。

通过代数运算由已知直线[①] 形成其他直线的方法，以及怎样标示它们的方向和符号

某些齐次量具有这样的性质，当它们放在一起，它们仅仅作为增量或减量彼此增加或减小。

还有其他在同样的情况下以无数别的方式彼此影响变化的量。直线就属于这类量。

因而一点到一平面的距离可以随着该点画出的平面外不同程度的倾斜直线以无数种方式改变。

---

① 在韦塞尔的论文中指线段，下同。

如果这条直线垂直于平面的轴，也就是，如果点的轨迹与轴成直角，那么这点在一个与已知平面平行的平面内，其轨迹不影响它与平面的距离。

如果所描述的线是非直的，即它与平面的轴成斜角，就要从距离中加上或减去一个小于该线本身的长度，有无数种增加或减小距离的方法。

如果所描述的线是直的，即距离在线上，就要加上或减去等于该线本身的长度，在第一种情形中是正的，在第二种情形中是负的。

因此，所有可以通过一点画成的直线就其对于已知点到这点外的平面的距离的作用而言，根据从距离中加上或减去该线自身长度的全部，部分或零而分为直的，非直的，或垂直的[①]。

如果一个量的值可以与其他量无关地直接给出，这个量就称为绝对的，因此我们可以在前面的定义中称距离为绝对线，增长或缩短绝对线时相对线的部分可以称为相对线的作用。

除直线外，还有其他存在这种关系的量。因此一般地阐明这些关系，将它们的一般概念体现在运算的说明中是一项很有价值的工作。但我接受了审稿人的意见，这篇文章中内容的性质及说明的清晰应使读者不必为抽象的概念所累。所以下面我仅用几何的说明。

§1

如果我们将两条直线以某种方式合并起来，就称将两条直线相加，方法是第二条线的始端连接第一条线的末端，然后从合并线的第一个点到最后一点贯穿一条直线，这条线就是合并的两线之和。

例如，若一点向前运动了 3 英尺，又往回运动 2 英尺，这两段路径之和不是前 3 英尺与后 2 英尺的组合，和是向前 1 英尺。这段

---

① 韦塞尔这里所说的“垂直”，是指与已知平面的轴相垂直、而与该平面平行的直线；他所说的“直的”(direct)直线，则是指与已知平面相垂直。

由同一点描绘的路径与另两段路径的作用相同。

类似地，如果三角形的一边从 a 延伸到 b，另一边从 b 延伸至 c，第三边从 a 到 c 就称为和。我们以 $ab+bc$ 表示，这样 ac 与 $ab+bc$ 意义相同，如果 ba 与 ab 相反，表示成 $ac=ab+bc=-ba+bc$。如果所加的线是直的，这个定义与通常给出的定义完全一致。如果所加的线不是直线，我们也并不反对将一条直线称作另两条直线合并的和，因为这种类推效果相同。我也没有赋予＋这个符号非同寻常的意义，可以看出在 $ab+\frac{ba}{2}=\frac{1}{2}ab$ 这个表达式中，$\frac{ba}{2}$不是和的一部分。因此我们列出 $ab+bc=ac$，而不将 bc 视为 ac 的一部分，$ab+bc$ 仅仅是表示 ac 的符号。

§ 2

如果希望加上多于两条的直线，我们采取同样的步骤。将第一条直线的末端点与第二条直线的首端点连接起来，再将第二条直线的末端点与第三条直线的首端点连接起来，等等，如此将这些直线合并起来。然后我们从第一条直线的始点到最后一条直线的末端点连结一条直线，我们称之为这些直线的和。

选取这些线的次序无关紧要，因为在三个互成直角的平面内，无论一点在何处形成直线，这条线对于这点到这三个平面的距离的影响是相同的。因而相加的每条直线，无论它位于序列中的首位、最后还是其它位置，在对于和的末端点的位置的决定上作用相同。因此直线相加的次序也是无足轻重的。由于第一个点假定已知，最后一个点总是设为同一位置，和总是相同。

因此在这种情形中，同样可以用＋号将相加直线彼此连结起来表示和。例如，在一个四边形中，如果第一条边由 a 到 b，第二条边由 b 到 c，第三条边由 c 到 d，而第四条边由 a 到 d，那么我们可以写成 $ad=ab+bc+cd$。

§ 3

如果几个长，几个宽和几个高的和等于零，那么长的和，宽的和，高的和分别等于零。

§ 4

每种情形中都可能形成两条直线的积，一个因子与另一个因子同样通过正单位或等于单位的绝对线形成。也就是：

首先，这两个因子的方向应使它们都与正单位位于同一平面。

其次，对于长度，积比上一个因子等于另一个因子比单位。

最后，如果我们设正单位，因子和积的原点相同，那么关于积的方向，它应位于单位和因子的平面上，并且在同一侧离开一个因子的度数与另一个因子离开单位的度数相同，这样积的方向角，或它对于正单位的散度就与两个因子方向角的和相等。

§ 5

设$+1$表示正的直线单位，$+\varepsilon$表示某个垂直于正单位且原点相同的单位，那么$+1$的方向角等于$0°$，-1的方向角等于$180°$，$+\varepsilon$的方向角等于$90°$，$-\varepsilon$的方向角等于$-90°$或$270°$。根据法则，积的方向角等于因子方向角之和，我们有：$(+1)(+1)=+1$；$(+1)(-1)=-1$；$(-1)(-1)=+1$；$(+1)(+\varepsilon)=+\varepsilon$；$(+1)(-\varepsilon)=-\varepsilon$；$(-1)(+\varepsilon)=-\varepsilon$；$(-1)(-\varepsilon)=+\varepsilon$；$(+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1$；$(+\varepsilon)(-\varepsilon)=+1$；$(-\varepsilon)(-\varepsilon)=-1$

由此可见ε等于$\sqrt{-1}$，不违背普通的运算法则，积的散度得到确定。

§ 6

始于圆半径$+1$的端点的弧的余弦是半径的一部分，或者是与其相对的半径的一部分，这半径始于圆心，结束于从弧端点出发的垂线。弧的正弦是从余弦的末端点到弧的末端点所作的垂直于余弦的直线。

因此，根据§ 5，直角的正弦等于$\sqrt{-1}$。设$\sqrt{-1}=\varepsilon$，令v为任意角，$\sin v$表示长度与角v的正弦相等的直线，如果角的度量在第一个半圆结束，$\sin v$就是正的，如果在第二个半圆结束就是负的。那么由§ § 4和5得到$\varepsilon\sin v$表示角v的正弦，涉及方向和长度……

§ 7

与§§1和6一致，始自圆心且偏离绝对单位或正单位角 v 的半径等于 $\cos v+\varepsilon\sin v$。但是根据§4，两个因子，一个偏离单位角 v，另一个偏离单位角 u，它们的积偏离单位的角应为 $v+u$。因此，由§§1与6，我们可以用 $\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u)$ 表示积。

§ 8

积 $(\cos v+\varepsilon\sin v)(\cos u+\varepsilon\sin u)$，或 $\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u)$ 还可以用另一种方式表示，即通过将其和组成一个因子的每条相加线乘以其和组成另一个因子的每条相加线所产生的部分积加到和中。因此，如果我们用为人熟知的三角公式

$$\cos(v+u)=\cos v\cos u-\sin v\sin u$$

$$\sin(v+u)=\cos v\sin u+\cos u\sin v$$

我们将得到这种形式：

$$(\cos v+\varepsilon\sin v)(\cos u+\varepsilon\sin u)=\cos v\cos u-\sin v\sin u$$
$$+\varepsilon(\cos v\sin u+\cos u\sin v)$$

可以证明上述两个公式对所有情形——一个角或两个角都是锐角或钝角，正的或负的，都可以轻而易举地有效应用。因此从这两个公式推出的命题也广泛适用。

§ 9

根据§7，$\cos v+\varepsilon\sin v$ 是长度等于单位且对于 $\cos 0°$ 的散度是角 v 的圆的半径。因而 $r\cos v+r\varepsilon\sin v$ 表示长度为 r，方向角为 v 的直线。一个直角三角形的边长若增加 r 倍，则斜边也增加 r 倍，但角依然相同。然而根据§1，边的和等于斜边，因此

$$r\cos v+r\varepsilon\sin v=r(\cos v+\varepsilon\sin v)$$

所以这是与线 $\cos 0°$ 及 $\varepsilon\sin 90°$ 在同一平面内，长度为 r，偏离 $\cos 0°$ v 度的所有直线的一般表达式。

§ 10

如果 a,b,c 表示任意长度，正的或负的直线，两条非直线 $a+\varepsilon b$ 及 $c+\varepsilon d$ 与绝对单位在同一平面内，即使它们对于绝对单位的散度未知，也可以得到它们的积。我们只需将组成一个和的每一条

相加线乘以组成另一和的每一条相加线，并将这些积相加，这个和是所求的关于长度和方向的积：于是，$(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d)=ac-bd+\varepsilon(ad+bc)$.

证明　令线 $a+\varepsilon b$ 的长为 A，它对于绝对单位的散度是 v 度，令 $c+\varepsilon d$ 的长度为 C，散度为 u。那么，由 § 9，$a+\varepsilon b=A\cos v+A\varepsilon\sin v$，$c+\varepsilon d=C\cos u+C\varepsilon\sin u$。于是 $a=A\cos v$，$b=A\sin v$，$c=C\cos u$，$d=C\sin u$（§ 3）。但是根据 § 4，$(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d)=AC[\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u)]=A[\cos v\cos u-\sin v\sin u+\varepsilon(\cos v\sin u+\cos u\sin v)]$（§ 8）。因此如果我们用 ac 代替 $AC\cos v\cos u$，用 bd 代替 $AC\sin v\sin u$，等等，就推出了要证明的关系式。

于是，尽管和的加线不全是直线，我们也不必在已知法则中给出例外的法则，方程论、整函数论及它们的简单因子都基于这些已知法则，即如果两个和相乘，则和中的每一个加量必须乘以另一个和中的每一个加量。因此如果一个方程研究直线且其根为 $a+\varepsilon b$ 的形式，那么一条非直的线就当然地表示出来。如果我们想将两条不都与绝对单位位于同一平面的直线乘到一起，这个[illegible]不起作用了。这里忽略了这种直线的相乘，原因正在于此。另一种方向变化的表示方法将在后面的 § § 24～35 中继续讨论。

§ 11

除数乘以商等于被除数。因为由 § 4 中的定义可直接得到，我们不必证明这些线必须与绝对单位在相同的平面内。显然，如果被除数偏离绝对单位角 v，除数偏离角 u，那么商必偏离绝对单位角 $v-u$。

例如，假设我们要用 $B(\cos u+\varepsilon\sin u)$ 除 $A(\cos v+\varepsilon\sin v)$，商是

$$\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]$$

因为由 § 7，$\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]\times B(\cos u+\varepsilon\sin u)=A(\cos v+\varepsilon\sin v)$ 也就是，因为 $\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]$ 被除数

$B(\cos u+\varepsilon\sin u)$乘等于被除数 $A(\cos v+\varepsilon\sin v)$，那么$\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]$定然是所求的商。

§ 12

如果 a,b,c 及 d 是直线，非直线 $a+\varepsilon b$ 及 $c+\varepsilon d$ 与绝对单位在同一平面内，那么$\frac{1}{c+\varepsilon d}=\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}$，商$\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d}=(a+\varepsilon b)\frac{1}{c+\varepsilon d}=(a+\varepsilon b)\cdot\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=[ac+bd+\varepsilon(bc-ad)]:(c^2+d^2)$。

由 § 9，我们可令

$$a+\varepsilon b=A(\cos v+\varepsilon\sin v),c+\varepsilon d=C(\cos u+\varepsilon\sin u),$$

所以由 § 3

$$c-\varepsilon d=C(\cos u-\varepsilon\sin u)$$

因为由 § 10，

$$(c+\varepsilon d)(c-\varepsilon d)=c^2+d^2=C^2$$

所以由 § 10

$$\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=\frac{1}{C}(\cos u-\varepsilon\sin u)$$

或由 § 11

$$\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=\frac{1}{C}[\cos(-u)+\varepsilon\sin(-u)]=\frac{1}{c+\varepsilon d}$$

乘上 $a+\varepsilon b=A(\cos v+\varepsilon\sin v)$，由 § 11 得到

$$(a+\varepsilon b)\cdot\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=\frac{A}{C}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]=\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d}$$

此类非直的线量与直线量有这种共性，如果被除数是几个量的和，那么这些量中的每一个被除数除，得出一个商，这些商的和组成所求的商。

§ 13

若 m 是一个整数，那么 $\cos\frac{v}{m}+\varepsilon\sin\frac{v}{m}$自乘 m 次得到幂 $\cos v+\varepsilon\sin v$（§ 7），因此我们有：

$$(\cos v+\varepsilon\sin v)^{\frac{1}{m}}=\cos\frac{v}{m}+\varepsilon\sin\frac{v}{m}$$

但是根据§11

$$\cos\left(-\frac{v}{m}\right)+\varepsilon\sin\left(-\frac{v}{m}\right)=\frac{1}{\cos\frac{v}{m}+\varepsilon\sin\frac{v}{m}}$$

$$=\frac{1}{(\cos v+\varepsilon\sin v)^{\frac{1}{m}}}$$

$$=(\cos v+\varepsilon\sin v)^{-\frac{1}{m}}$$

因此，无论 m 是正数还是负数，总有

$$\cos\frac{v}{m}+\varepsilon\sin\frac{v}{m}=(\cos v+\varepsilon\sin v)^{\frac{1}{m}}$$

所以，如果 m 和 n 都是整数，我们有：

$$(\cos v+\varepsilon\sin v)^{\frac{n}{m}}=\cos\frac{n}{m}v+\varepsilon\sin\frac{n}{m}v$$

用这种方法我们发现了诸如 $\sqrt[n]{b+c\sqrt{-1}}$ 或 $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b+c\sqrt{-1}}}$ 这种表达式的值。例如 $\sqrt[3]{4\sqrt{3}+4\sqrt{-1}}$ 表示一条长为 2，与绝对单位夹角为 10°的直线。

§ 14

若两个角有相同的正弦和相同的余弦，它们的差为 0，∓4 直角或±4 直角的倍数；反之，若两角之差为 0 或±4 直角的一倍或几倍，那么它们的正弦连同余弦相等。

§ 15

若 m 为一整数，π 等于 360°，那么 $(\cos v+\varepsilon\sin v)^{\frac{1}{m}}$ 仅有下列 m 个不同的值：

$$\cos v+\varepsilon\sin v,\cos\frac{\pi+v}{m}+\varepsilon\sin\frac{\pi+v}{m},\cos\frac{2\pi+v}{m}+\varepsilon\sin\frac{2\pi+v}{m}\cdots,$$

$$\cos\frac{(m-1)\pi+v}{m}+\varepsilon\sin\frac{(m-1)\pi+v}{m}$$

π 按序列乘的数是算术级数 1，2，3，4…$m-1$。因此如果取其中两数，一个数与 1 的距离等于另一数与 $m-1$ 的距离，则每两个这样的数之和为 m，如果数目不是偶数，那么中间数将两次取作 m。所

以如果将$\frac{(m-n)\pi+v}{m}$加到$\frac{(m-u)\pi+v}{m}$上，在级数中，后者距离$\frac{\pi+v}{m}$等于$\frac{(m-n)\pi+v}{m}$距离$\frac{(m-1)\pi+v}{m}$，那么和等于$\frac{2m-u-n}{m}\pi+\frac{2v}{m}=\pi+\frac{2v}{m}$。但加上$\frac{(m-n)\pi}{m}$等价于减去$\frac{(m-n)(-\pi)}{m}$，又因为差为$\pi$，故$\frac{(m-n)(-\pi)+v}{m}$与$\frac{(m-u)\pi+v}{m}$有相同的余弦和正弦。[同样$(-\pi)$的值都由$+\pi$给出]。

然而，由于这个级数中任何两角之差总是小于π而又不等于0，这些值都不相等。如果继续这个级数也不会产生更多的值，因为新的角将是$\pi+\frac{v}{m}$，$\pi+\frac{\pi+v}{m}$，$\pi+\frac{2\pi+v}{m}$，等，根据§14，这些角的正弦和余弦与我们已得到的角的正弦和余弦相同。所有的角都属于这个级数，因为π不会被一个整数乘到分子上，m所乘的角也不会产生被v减后等于0，$\pm\pi$或$\mp\pi$倍数的角，因此这些角的余弦和正弦的m次幂不会等于$\cos v+\varepsilon\sin v$。

§16

在不知道非直的线$1+x$与绝对单位所成角度的情况下，如果x的长小于1，我们发现幂$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2+\cdots$。如果这个级数按$m$的幂排列，其值相同，并变成$1+\frac{ml}{1}+\frac{m^2l^2}{1\cdot 2}+\frac{m^3l^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$的形式，其中$l=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$，是一条直线和一条垂线之和。如果我们称直线为$a$，垂线为$b\sqrt{-1}$，那么$b$是$1+x$与$+1$所成角的最小度量，若我们令

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots=e$$

则

$$(1+x)^m\text{，或 }1+\frac{ml}{1}+\frac{m^2l^2}{1\cdot 2}+\frac{m^3l^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

可由$e^{ma+mb\sqrt{-1}}$表示，即$(1+x)^m$的长度为e^{ma}，方向角的度量为

mb,m 假设可正可负。这样位于同一平面的直线的方向还可用另一种方式表示,即求助于自然对数。如果允许的话,我将在另外的时间对这些陈述给以完整的证明。现在我已陈述了我的方案,得到直线的和,积,商及幂,接着我将给出几个例子来说明这些方法的应用。

(高 嵘 译 欧阳绛 校)

58. 高斯:代数基本定理的第一个证明

高斯(Carl Friedrich Gauss,1777~1855)出生于德国不伦瑞克市,父亲是当地的一个短工。高斯早年即表现出极高的数学天赋,这使他获得了不伦瑞克公爵的赏识与资助,于 1795 年入哥廷根大学学习,1799 年获赫尔姆斯泰特(Helmstedt)大学博士学位,1807 年开始担任哥廷根大学天文学教授兼天文台台长。从此直到去世,高斯在哥廷根度过了平静却又辉煌的学者生涯。现代数学大多数领域都刻有高斯的印记,他在天文学,电磁学,测地学等方面同样有重大贡献,而这位学者拘谨的风格还使他留下了大量未发表的结果令后人惊叹。

高斯的博士论文《每个单变量有理整函数均可分解为一次或二次实因式积的新证明》(Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse),给出了代数基本定理的第一个实质性证明。代数基本定理自 1629 年由 A · 吉拉尔提出后曾经笛卡儿、牛顿等众多学者反复陈述、应用,欧拉、拉格朗日等更力图证明而未获成功。高斯的第一个证明使用了几何论证,他后又给出了另外三个不同的严格证明。以下摘译高斯博士论文的关键部分,原文载 Carl Friedrich Gauss:Werke Ⅲ,pp. 1~31, Göttingen,1876.

13. 引理 如果 m 是一任意正整数,那么函数

$$\sin x^m - \sin m\varphi \cdot r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi \cdot r^m$$

可以被 $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$ 整除。

……

14. 引理 如果量 r 和角 φ 的确定使方程

$$r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \text{etc.} + Krr\cos 2\varphi + Lr\cos\varphi + M = 0 \quad (1)$$

$$r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \text{etc.} + Krr\sin 2\varphi + Lr\sin\varphi = 0 \quad (2)$$

存在，那么函数

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Kx^2 + Lx + M = X$$

将可被二次因子 $x^2 - 2\cos rx + r^2$ 整除，除非 $r\sin\varphi = 0$. 若 $r\sin\varphi = 0$，则同一函数可被 $x - r\cos\varphi$ 整除。

证明可以通过下列函数给出：

$$\begin{array}{lll}
\sin\varphi \cdot rx^m - & \sin m\varphi \cdot r^m x + & \sin(m-1)\varphi \cdot r^{m+1}, \\
A\sin\varphi \cdot rx^{m-1} - & A\sin(m-1)\varphi \cdot r^{m-1}x + & A\sin(m-2)\varphi \cdot r^m, \\
B\sin\varphi \cdot rx^{m-3} - & B\sin(m-2)\varphi \cdot r^{m-2}x + & B\sin(m-3)\varphi \cdot r^{m-1}, \\
\text{etc.} & \cdots\cdots & \text{etc.} \\
K\sin\varphi \cdot rx^2 - & K\sin 2\varphi \cdot r^2 x + & K\sin\varphi \cdot r^3, \\
L\sin\varphi \cdot rx - & L\sin\varphi \cdot rx & * \\
M\sin\varphi \cdot r & * \quad + & M\sin(-\varphi) \cdot r,
\end{array}$$

它们每个都可被 $x^2 - 2\cos\varphi \cdot xr + r^2$ 整除（根据第一个引理），并且它们加在一起就得到 $\sin\varphi \cdot rX + 0 + 0$. 当 $r = 0$ 时，X 可被 $x - r\cos\varphi$ 整除；当 $\sin\varphi = 0$ 时，那么

$\cos\varphi = \pm 1, \cos 2\varphi = \pm 1, \cos 3\varphi = \pm 1$，等等，并且当 $x = r\cos\varphi$，X 变为 0。

15. 前述的定理通常是借助于虚数来得出，例如可参见欧拉《无穷小分析引论》Ⅰ. p. 100。我发现值得指出的是，它也可以用同样容易的方法来证明而毋需求助于虚数。因此十分清楚，为了证明我们的定理，我们只需要证明：如果已给某个形如 $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Lx + M$ 的函数 X，那么 r 和 φ 可以用这样的方法来确定，使得方程(1)和(2)都成立。确实，由此就可推出 X 具有一个

一次或二次实因式，被它相除后可得到一个低次的实商……，我们现在就来证明这一定理。

16. 我们来考虑一个固定的无限平面(如图 1 所示的平面)，和其上一条通过固定点 C 的固定直线 GG。为了用数字来表示所有的线段，我们任取一线段作为单位长。在平面上任取一点 P，与中心 C 的距离为 r，角 $GCP=\mu$，过 P 作平面的一条垂直线段，其长度为下列表达式的值：

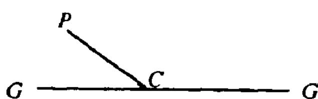


图 1

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \text{etc.} + Lr\sin\varphi$$

我将用 T 来表示这个表达式，距离 r 总取正值，而对于坐标轴另一边的点来说，角 φ 或者是增加二倍直角，或者是取负值(相当于同一回事)。此垂线的端点(对于 T 的正值，它应位于平面上方，而对于 T 的负值，则应位于平面下方，若 T 取 0 值，就位于平面上)将形成一个连续的、弯曲的曲面，它在所有的方向都无限，为简单起见，我称这曲面为**第一曲面**。用完全同样的方法，关于同样的平面、同样的中心和同样的坐标轴，我可以作另一个曲面，它在平面各点上的高度等于

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \cdots + Lr\cos\varphi + M$$

我将用 U 来表示这个表达式。这个曲面也是连续的并在所有方向都无限，它将被称为**第二曲面**，以区别于前面所说的另一个曲面。由此十分清楚，我们的全部任务就是要证明至少存在着一点，它同时落在平面、第一曲面和第二曲面上。

17. 容易明白，第一曲面部分位于平面上方，部分在平面下方，因为我们可以取离中心的距离充 分大，使得 T 中的第一项 $r^m \sin m\varphi$ 超过所有后面的项；然后若适当地选取角 φ，该项的值将可正可负。因此固定平面必与第一曲面相交。我们称它们的交线为**第一曲线**，它将由 $T=0$ 决定。同理可证平面也必与第二曲面相交，称它们的交线为**第二曲线**，其方程将为 $U=0$。两条曲线各由几个分支组成，它们可能是完全互相分离的，但每个分支自身都形成

一条连续曲线。确实，第一曲线总是所谓的可约曲线(reducible)，因为轴 GC 必须被认为是该曲线的一部分，因为对任意 r 值和 $\varphi=0$ 或 $\varphi=180°$，必有 $T=0$。不过我们宁愿把所有的分支全体看成是一条曲线(就像高等几何中通常所做的那样)。对于通过满足 $U=0$ 的点的所有的分支，情况也相同。现在，我们的问题被归结为：证明在平面上至少存在一点，在该点第一曲线的一个分支与第二曲线的一个分支相交。为此就必须更详细地研究这些曲线的性质。

18. 首先要指出的是，每条曲线都是相对于正交坐标的 m 次代数曲线。确实，如果以 C 为坐标原点，横坐标 x 的方向朝 G，纵坐标 y 的方向朝 P，那么 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，一般地对任意 n 有：

$$r^n\sin n\varphi=nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}y^3+\frac{n\cdots(n-4)}{1\cdots5}x^{n-5}y^5-\text{etc.}$$

$$r^n\cos n\varphi=x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^{n-4}y^4-\text{etc.}$$

因此 T 和 U 均由若干形如 $ax^\alpha y^\beta$ 的项组成，其中 α,β 为正整数，且它们的和的最大值为 m。另外容易看出，T 的各项均含有因子 y，因此确切地说，第一曲线是由方程 $y=0$ 的直线与一条 $m-1$ 次曲线组成。不过我们并不需要考虑这种差别。

更重要的是要弄清第一、第二曲线是否含有无限分支，它们的个数及有何特性。在距离 C 点无限远处具有方程

$$\sin m\varphi+\frac{A}{r}\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{rr}\sin(m-2)\varphi\ \text{ etc.}=0$$

的第一曲线与具有方程 $\sin m\varphi=0$ 的曲线趋于吻合。此曲线实际是 m 条相交于 C 点的直线；这些直线中的第一条就是轴 GCG'，其他直线则与该轴成 $(1/m)180°$，$(2/m)180°$，$(3/m)180°$，…交角。因此第一曲线有 $2m$ 个无限分支，它们将半径为无限的圆周分成 $2m$ 个相等的部分。这样圆周与第一分支的交点就是与坐标轴的交点；与第二分支的交点偏离坐标轴 $(2/m)180°$；与第三分支的交点偏离坐标轴 $(3/m)180°$，等等。类似地可知，第二曲线在离中心无限远处以由方程 $\cos m\varphi=0$ 表示的直线作为渐近线，该渐近线也是由 m

条在中心处以等角相交的直线组成，其中第一条直线与坐标轴 CG 成 $(1/m)90°$ 角，第二条成 $(3/m)90°$ 角，第三条成 $(5/m)90°$ 角，等等。因此第二曲线也有 $2m$ 个无限分支。它们每个都位于第一曲线的两个相邻分支之间，这样它们与半径为无限的圆周的交点分别偏离坐标轴 $(1/m)90°$，$(3/m)90°$，$(5/m)90°$，…。同样十分明了，坐标轴本身形成第一曲线的两个无限分支，即第1分支与第 $(m+1)$ 分支。图2清楚地表示了这些分支的分布状况，该图是就 $m=4$ 的情形作出的，其中第二曲线的分支以虚线表示，以区别于第一曲线

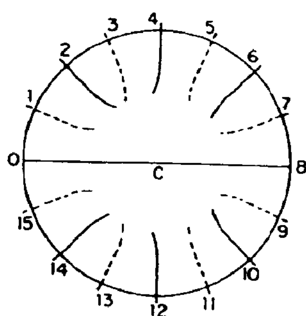


图 2

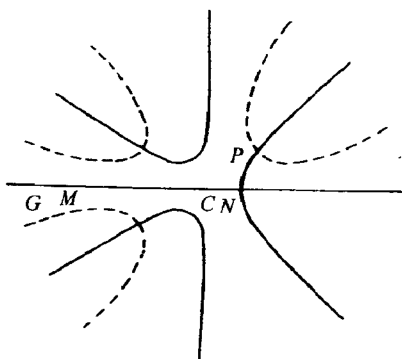


图 3

的分支。图3也是如此[①]。由于这些结果十分重要，有些读者也许会对使用无限大量感到不满，我将在下节中证明这些结果也可以不借助无限量而得到。

19. 定理 在上述条件下，我们可以作一以 C 为中心的圆，其圆周上存在 $2m$ 个点满足 $T=0$，同时存在同样多个点满足 $U=0$。这些点以这样的方式分布，使得每个第二类点恰好位于两个第一类点之间。

设所有的系数(取正值) $A,B,\cdots,K,L,M$ 之和 $=S$，又设 R 同

---

① 图3是就 $X=x^4-2xx+3x+10$ 的情形作出；这样不熟悉一般抽象研究的读者就可以通过具体的例子来了解这两种曲线是如何分布的。线段 CG 长 $=10$ $(CN=1.26255)$。——原注

时满足 $R>S\sqrt{2}$ 和 $R>1$[①]。那么在以 R 为半径的圆上定理所述条件成立。为简明起见，我们用(1)表示圆周上这样一点，它偏离圆与左半坐标轴的交点 $(1/m)45°$，因此对(1) $\varphi=(1/m)45°$。类似地用(3)表示圆周上偏离交点 $(3/m)45°$ 的一点，从而对(3)有 $\varphi=(3/m)45°$，…，这样直到点 $(8m-1)$。如果总是按同一方向进行，它将偏离交点 $[(8m-1)/m]45°$。式按相反方向进行，则它将偏离交点 $(1/m)45°$。这样在圆周上总共就有 $4m$ 个距离相等的点。因此在 $(8m-1)$ 与(1)之间必存在一点满足 $T=0$；类似地在(3)与(5)，(7)与(9)，…之间亦必各有一点满足 $T=0$，所有这些点的总数为 $2m$。同理可知在(1)与(3)，(5)与(7)，…之间各存在一点满足 $U=0$，它们的总数也是 $2m$。除了这 $4m$ 个点外，圆周上没有任何其他点满足 $T=0$ 或 $U=0$。

证明　Ⅰ．在点(1)处 $m\varphi=45°$，因此

$$T=R^{m-1}\left(R\sqrt{\frac{1}{2}}+A\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi+\text{etc.}\right.$$
$$\left.+\frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi\right)$$

其中和 $A\sin(m-1)\varphi+\left(\frac{B}{R}\right)\sin(m-2)\varphi+\text{etc.}$ 当然不可能大于 S，因此必定小于 $R\sqrt{\frac{1}{2}}$；因此 T 在该点的值必为正数。因此，当 $m\varphi$ 在 45°与 135°之间时，T 无疑总为正，也就是说从点(1)到点(3)，T 总取正值。同理可证从点(9)到点(11)，一般地说从点 $(8k+1)$ 到点 $(8k+3)$（k 为任一整数）T 亦总取正值。同样可知，T 在(5)与(7)，(13)与(15)，…，一般地说在 $(8k+5)$ 与 $(8k+7)$ 之间处处为负，因此在所有这些区间上无处为 0。但因它在点(3)取正值，在点(5)取

---

① $S>\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时，第一个条件包含了第二个条件，$S<\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时，则第二个条件包含了第一个条件。——原注

负值，故它必在(3)与(5)之间的某处为0①，同样亦必在(11)与(13)之间，等等直到$(8m-1)$与(1)之间的每个区间上某处为0，这样总共就有$2m$个使$T=0$的点。

Ⅱ. 除了这$2m$个点外，没有任何其他点具有同样的性质。这一事实可证明如下。在(1)与(3)，(5)与(7)等等之间不存在任何其他这样的点，当且仅当在从(3)到(5)，(7)到(9)等等的区间之一上至少有两个这样的点。但此时T必将在同一区间上某处达到极大或极小，因此$\frac{dT}{d\varphi}=0$。

然而

$$\frac{dT}{d\varphi}=mR^{m-2}\left(R\cos m\varphi+\frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi+\text{etc.}\right)$$

同时$\cos m\varphi$在(3)与(5)之间恒为负且[绝对值]$>\sqrt{\frac{1}{2}}$，由此可知$\frac{dT}{d\varphi}$在整个区间上取负值；同样可证它在(7)与(9)之间处处为正，在(11)与(13)之间处处为负，等等。因此在所有这些区间上它都不可能$=0$，因此我们的假设是错误的。……②

定理的这一部分，即不可能有多于$2m$个点使$T=0$，也不可能有多于$2m$个点使$U=0$，也可以这样来证明：以$T=0$和$U=0$表示两条m次曲线，那么如高等几何中所知，它们与作为二次曲线的圆不可能有多于$2m$个交点。

20. 若以同一中心作另一半径大于R的圆并用同样的方式分割之，那么在(3)与(5)之间，类似地(7)与(9)之间等等，同样亦各存在一点使$T=0$。容易看出，在两个圆周上位于(3)与(5)之间的这种点相互的距离小于大圆半径与小圆半径R之差。如作一半径

---

① 这是需要证明的，但高斯在这里却作为明显的事实而接受。

② 高斯接着用同样方法证明了：$\frac{dU}{d\varphi}$在区间(1)与(3)，(5)与(7)等等上不能为0，因此圆周上不可能有多于$2m$个点使$U=0$.

小于 R 但仍大于 $S\sqrt{2}$ 和 1 的圆，也有同样的情况。由此可知，以 R 为半径的圆周确与第一曲线的一支在(3)与(5)之间使 $T=0$ 的那一点相交；其他使 $T=0$ 的点亦是如此。同样清楚的是，该圆圆周在所有使 $U=0$ 的 $2m$ 个点上与第二曲线的一支相交。这些结论也可以表述如下：若以 C 为中心作一大小适当的圆，那么第一曲线的 $2m$ 个分支与第二曲线的同样多个分支将这样的地穿入此圆，使得第一曲线每两个相邻的分支都被第二曲线的一个分支所隔开。参看图 2，现在那里的圆已具有有限的而不是无限的大小。其中加在相互分离的分支上的数字不应与我曾为简明起见而用来表示该圆圆周上某些有限的点的数字相混淆。

21. 现在从进入该圆的分支的相对位置就可以推出如下的结论，即在圆内必定存在着第一曲线的一个分支与第二曲线的一个分支的交点。这可以通过多种方法来证明，我不知道哪一种方法比其他方法更好。下述方法似乎最为清楚：我们以 0 表示(见图 2)该圆圆周与左半坐标轴(其本身就是第一曲线的 $2m$ 个分支之一)的交点；以 1 表示其次一点，第二曲线的一支在该点穿入圆内；以 2 表示再其次一点，第一曲线的一支在该点穿入圆内，如此等等，直至 $4m-1$。因此，第一曲线的一支在以偶数表示的点上穿入圆内，而第二曲线的一支则在以奇数表示的点上穿入圆内。由高等几何可知，每一条代数曲线(或代数曲线的一部分，若它由若干不同部分组成)或者是趋向它自身，或者是在两个方向都趋于无限。因此，如果一条代数曲线进入一有限的区域，它必定会重新离开这个区域①。由此我们容易得出以下结论：每个由偶数表示的点(或简称偶数点)必定通过第一曲线的一支在圆内的部分而与另一个偶数点相联结，同样每个由奇数表示的点必定通过第二曲线的一支而

---

① 似乎可以严格证明，一条代数曲线既不会突然中断(像以方程 $y=1/\log x$ 表示的超越曲线那样)，也不会在无限多项后消失(像对数螺线那样)。据我所知，没有人对此表示怀疑。但如果有人要求的话，我可以在另外的场合给出一个不会引起任何怀疑的证明。在目前情形十分清楚的是：如果有一个分支，例如 2，不会在任何地方离开圆

与另一个奇数点相联结。虽然由于函数 X 的具体性质，两点之间的这种联结可以有很大的差别而不能被一般地确定，但容易证明，无论是什么样的联结，都必定存在着第一曲线与第二曲线的一个交点。

22. 这种相交的必然性可以用间接的方法来得到最好的证明。我们将假定所有偶数点对与所有奇数点对的联结可以这样安排，使结果不会发生第一曲线的一支与第二曲线的一支相交。因为轴本身是第一曲线的一部分，点 0 显然将与点 $2m$ 相联结，从而点 1 就不可能与轴外的点相联结，也就是说不能与任何用大于 $2m$ 的数来表示的点相联结，否则联线必与轴相交。因此若设点 1 与点 n 相联结，则 $n<2m$。通过类似推理可知若 2 与 n' 相联结，则 $n'<n$，因为否则分支 $2\cdots n'$ 必与分支 $1\cdots n$ 相交。同样点 3 必与落在 4 与 n' 之间的一点相联结，并且十分清楚，若设 3，4，5…与 n''，n'''，n''''…相联结，则 n''' 必在 5 与 n'' 之间，n'''' 必在 6 与 n''' 之间，如此等等。由此最后可以得到一点 h，它与点 $h+2$ 相联结，此时在点 $h+1$ 处进入圆内的分支必与联结点 h 与 $h+2$ 的分支相交，但因这两个分支一个属于第一曲线，另一个属于第二曲线，所以我们的假设显然是荒谬的，因此必然在某处存在着第一曲线与第二曲线的一个交点。

将此结果与以前的结果结合起来，从上述整个研究我们就获

(图 4)，那么我们可以在 0 与 2 之间进入圆，绕行整个分支(它必在圆的范围内消失)以后在 2 与 4 之间重新离开圆，且中途不会与第一曲线相遇。但这是荒谬的，因为在你进入圆的那一点，第一曲面在你上方，而在你离开圆的地方，第一曲面则在你下方。因此你必然会在某处遇到第一曲面，这应为第一曲线上的一点。——根据这样的推理以及与量的几何原理同样有效的位置几何(geometria situs)原理，就会得出如下结论：如果你在第一曲线的一支上进入圆内，那么你可以在另一点离开它而又始终留在第一曲线上。不过这不能说明此道路是在高等几何所容许的意义上的连续曲线。在这里，只需要道路是一般意义上的连续曲线就够了，也就是说，它在任何地方都不间断，而是处处连贯的。——原注

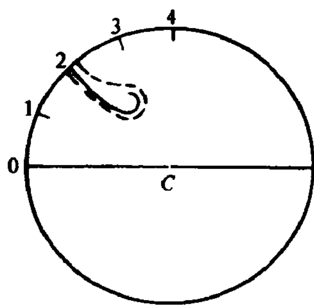


图 4

得了以下定理的严格证明，即每个一个变元的整有理代数函数均可分解为一次和二次实因式。

（李文林 译）

59. 阿贝尔:论五次代数方程

五次或更高次代数方程能否像三、四次方程那样用根式求解?这个自文艺复兴时期以来引起许多数学家注目的难题,到19世纪初仍悬而未决。拉格朗日最先察觉到"用根式解四次以上方程是不可能解决的问题之一"(1770),但他未能证实自己的猜测。1824年,年轻的挪威数学家阿贝尔(Niels Abel,1802~1829)在这方面迈出了重要的一步。他在一本自费出版的小册子《论代数方程,证明一般五次方程的不可解性》(Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la resolution de l'équation générale du cinquième degré)中,严格证明了一般五次方程不能用根式求解。阿贝尔的论文促使数学家们进一步思考什么样的特殊方程能用根式求解,最终导致了伽罗瓦群的发现和代数方程根式可解问题的彻底解决。

阿贝尔短促的一生,贫病交迫,却留下许多创造性贡献,除了方程论,还涉及椭圆函数、无穷级数等。但这些工作在他生前均未受到重视。1829年,柏林大学任命阿贝尔为教授,当通知寄到时,阿贝尔已因肺病不治而匆离人世。

以下是阿贝尔论五次方程的文章的全译,原载《阿贝尔全集》(Oeuvres complètes de N. H. Abel,I,pp. 28~33,Christiania,Oslo,1881),转译自 D. E. Smith:A Source Book in Math. pp. 261~266.

许多数学家全身心致力于寻求代数方程的一般解,有几位数学家试图证明解的不可能性。然而,如果我没弄错的话,他们都还未成功。所以我才敢奢望数学家们善意地接受这篇论文,因为此文

的目的是填补代数方程论的这一空白。

令

$$y^5-ay^4+by^3-cy^2+dy-e=0$$

为一般的五次方程并假设它能代数求解——即 y 能表示成由根式组成的量 a,b,c,d,e 的函数。在此情形中，y 显然能写成

$$y=p+p_1R^{\frac{1}{m}}+p_2R^{\frac{2}{m}}+\cdots+p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}$$

的形式，m 是素数，$R,p,p_1,p_2,\cdots$是与 y 相同形式的函数。我们按这种方法继续下去，直至得到 a,b,c,d,e 的有理函数。我们也可以假设 $R^{\frac{1}{m}}$不能表示成 $a,b,\cdots,p,p_1,p_2,\cdots$的有理函数，以$\frac{R}{p_1^m}$代替 R，显然我们可以使 $p_1=1$。

于是

$$y=p+R^{\frac{1}{m}}+p_2R^{\frac{2}{m}}+\cdots+p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}$$

以这个 y 值代替原方程中的 y 值，通过简化，我们得到下述形式的结果

$$P=q+q_1R^{\frac{1}{m}}+q_2R^{\frac{2}{m}}+\cdots+q_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}=0$$

$q,q_1,q_2\cdots$是 $a,b,c,d,e,p,p_2,\cdots$及 R 的整有理函数。

为满足这个方程，需使 $q=0,q_1=0,q_2=0,\cdots,q_{m-1}=0$。事实上，令 $z=R^{\frac{1}{m}}$，我们得到两个方程

$$z^m-R=0 \text{ 及 } q+q_1z+\cdots+q_{m-1}z^{m-1}=0$$

如果量 $q,q_1,\cdots$不等于零，这两个方程必有一个或多个公共根。若这些根的个数为 k，我们知道我们能够找到一个 k 次方程，其根为所提及的 k 个根，其系数为 $R,q,q_1,\cdots,q_{m-1}$的有理函数。令这个方程为

$$r+r_1z+r_2z^2+\cdots+r_kz^k=0$$

它的所有根与方程 $z^m-R=0$ 的根相同。由于这个方程的所有根形如 $\alpha_\mu z$，α_μ 是方程 $\alpha_\mu^m-1=0$ 的一个根，通过代换，我们得到下列方程

$$r+r_1z+r_2z^2+\cdots+r_kz^k=0$$

$$r+\alpha r_1 z+\alpha^2 r_2 z^2+\cdots+\alpha^k r_k z^k=0$$

$$\cdots\cdots$$

$$r+\alpha_{k-2} r_1 z+\alpha_{k-2}^2 r_2 z^2+\cdots+\alpha_{k-2}^k r_k z^k=0$$

从这 k 个方程，我们总可得到表示成量 $r, r_1, \cdots r_k$ 的有理函数的 z 值，由于这些量本身是 $a, b, c, d, e, R, p, p_2, \cdots$ 的有理函数，可以推出 z 也是后面这些量的有理函数，但这与假设相悖。所以必有

$$q=0, q_1=0, \cdots q_{m-1}=0$$

如果这些方程得到满足，那么显然当 $R^{\frac{1}{m}}$ 为指定值

$$R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \cdots, \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$$

时，y 形成的所有值都满足原方程；上面的 α 是方程

$$\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\cdots+\alpha+1=0$$

的根。同时我们注意到 y 的所有值都是不同的，否则我们就应得到一个形如 $P=0$ 的方程，我们刚刚看到这样一个方程导致了矛盾的结果。数 m 不能超过 5。令 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 是原方程的根，我们有

$$y_1=p+R^{\frac{1}{m}}+p_2 R^{\frac{2}{m}}+\cdots+p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_2=p+\alpha R^{\frac{1}{m}}+\alpha^2 p_2 R^{\frac{2}{m}}+\cdots+\alpha^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_m=p+\alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}+\alpha^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}}+\cdots+\alpha p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

由此显而易见

$$p=\frac{1}{m}(y_1+y_2+\cdots+y_m)$$

$$R^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}(y_1+\alpha^{m-1} y_2+\cdots+\alpha y_m)$$

$$p_2 R^{\frac{2}{m}}=\frac{1}{m}(y_1+\alpha^{m-2} y_2+\cdots+\alpha^2 y_m)$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_{m-1} R^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}(y_1+\alpha y_2+\cdots+\alpha^{m-1} y_m)$$

因此 $p, p_2, \cdots p_{m-1}, R$，及 $R^{\frac{1}{m}}$是原方程根的有理函数。

现在我们来考虑这些量中的任意一个，如 R。令

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \cdots + S_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}$$

像刚才探讨 y 那样讨论这些量，我们得到相似的结果，即量 $S, S_2, \cdots, S_{n-1}, v$ 及 $v^{\frac{1}{n}}$是不同的 R 值的有理函数，由于不同的 R 值是 $y_1, y_2, \cdots$的有理函数，所以函数 $v^{\frac{1}{n}}, v, S, S_2, \cdots$具有同样的性质。以这种方式推理，我们得出结论，所有包含在 y 的表达式中的无理函数都是原方程根的有理函数。

一旦建立起这一结果，证明就不难完成了。首先我们考虑形如 $R^{\frac{1}{m}}$的无理函数，R 是 a, b, c, d, e 的有理函数。令 $R^{\frac{1}{m}} = r$，则 r 是 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 的有理函数，R 是这些量的对称函数。由于我们的兴趣在于一般五次方程的解，显然我们可将 y_1, y_2, y_3, y_4 和 y_5 视为独立变量，于是在这种假定下方程 $R^{\frac{1}{m}} = r$ 必得到满足。因此，我们能够在方程 $R^{\frac{1}{m}} = r$ 中交换 y_1, y_2, y_3, y_4 和 y_5。注意到 R 是一个对称函数，$R^{\frac{1}{m}}$通过这种交换可取到 m 个不同的值。因此当函数 r 所包含的五个变量完成所有可能形式的交换时，它一定具有取 m 个值的性质。由于 m 是一个素数，因而 $m=5$，或者 $m=2$。[见柯西发表在："综合工科学校杂志"(Journal de l'école polytechnique 卷17)上的文章[①]]。假设 $m=5$，则函数 r 有五个不同的值，因而可写成

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$

的形式，$p, p_1, p_2, \cdots$是 $y_1, y_2, \cdots$的对称函数。通过交换 y_1 和 y_2，这个方程给出

---

① "Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir,"等。

令 p 是除尽 n 的最大素数。柯西证明了$(p,9)n$ 个变量的函数，若取小于 p 个值，或者是对称的，或者只取两个值。在后一种情形中函数可写成 $A+B\Delta$ 的形式，其中 A 和 B 是对称的，Δ 是特殊的双值函数

$$\Delta = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\cdots(y_{n-1} - y_n)$$

$$p+p_1y_1+p_2y_1^2+p_3y_1^3+p_4y_1^4=\alpha p+\alpha p_1y_2+\alpha p_2y_2^2+\alpha p_3y_2^3+\alpha p_4y_2^4$$

其中

$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$$

但这个方程(是不可能的)[1],所以 m 一定等于 2。于是

$$R^{1/2}=r$$

因此 r 必有两个符号相反的不同的值。随后我们有(见柯西的文章)

$$R^{1/2}=r=v(y_1-y_2)(y_1-y_3)\cdots(y_2-y_3)\cdots(y_4-y_5)=vS^{1/2}$$

v 是对称函数。

现在我们来考虑形如

$$(p+p_1R^{\frac{1}{v}}+p_2R_1^{\frac{1}{\mu}}+\cdots)^{\frac{1}{m}}$$

的无理函数,$p,p_1,p_2,\cdots,R,R_1,\cdots$ 是 a,b,c,d,e 的有理函数,因而是 y_1,y_2,y_3,y_4 及 y_5 的对称函数。我们已看到必有 $v=\mu=\cdots=2$,$R=v^2S,R_1=v_1^2S,\cdots$,于是上述函数可以写成

$$(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

的形式。令

$$r=(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

$$r_1=(p-p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

将其相乘,得

$$rr_1=(p^2-p_1^2S)^{\frac{1}{m}}$$

如果 rr_1 不是对称函数,m 一定等于 2,但这样 r 就有四个不同的

---

[1] 在后来的一篇文章("纯粹与应用数学杂志"第一卷,1826)中,阿贝尔基于相同的原理给出这个主定理一个更为详细的证明。在相应之处,他给出下述更精细的证明。通过将 y_1 视为已知方程与定义 R 的关系的公共根,y_1 可表示成

$$y_1=S_0+S_1R^{1/5}+S_2R^{\frac{2}{5}}+S_3R^{3/5}+S_4R^{4/5}$$

的形式。以 $\alpha R^{1/5}$ 代替 R,我们得到方程的其他根,解相应的由五个线性方程构成的方程组得到

$$S_1R^{1/5}=\frac{1}{5}(y_1+\alpha^4y_2+\alpha^3y_3+\alpha^2y_4+\alpha y_5)$$

但是这个等式是不可能的,因为右端有 120 个值,而左端只有 5 个值。

值，这是不可能的，因此 rr_1 定然是一个对称函数。令这个函数为 v，则

$$r+r_1=(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}+v(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{m}}=z$$

这个函数有 m 个不同的值，由于 m 是一个素数，m 一定等于 5。于是我们得到

$$z=q+q_1y+q_2y^2+q_3y^3+q_4y^4=(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{1/5}+v(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{5}}$$

$q,q_1,q_2,\cdots$是 $y_1,y_2,y_3,\cdots$的对称函数，因而是 a,b,c,d,e 的有理函数。将这个方程与原方程结合起来，我们发现 y 能表示成 z,a,b,c,d,e 的有理函数。这样的函数总可以简化成

$$y=P+R^{\frac{1}{5}}+P_2R^{\frac{2}{5}}+P_3R^{\frac{3}{5}}+P_4R^{\frac{4}{5}}$$

的形式，P,R,P_2,P_3,P_4 是 $p+p_1S^{\frac{1}{2}}$的函数，而 p,p_1 和 S 是 a,b,c,d,e 的有理函数。由 y 的这个值，我们得到

$$R^{1/5}=\frac{1}{5}(y_1+\alpha^4y_2+\alpha^3y_3+\alpha^2y_4+\alpha y_5)=(p+p_1S^{1/2})^{\frac{1}{5}}$$

其中

$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$$

上述等式中间部分有 120 个不同的值，而后面的部分只有 10 个不同的值，因此 y 不具有我们已得到的形式。但是我们已证明如果原方程可解，y 必然具有这种形式，由此我们得出结论：

不可能用根式形式解一般的五次方程。

由这个定理立即推出，也不可能用根式解一般的高于五次的方程。

（高　嵘译　沈永欢校）

60. 伽罗瓦：致夏瓦利尔的信——论群、方程和阿贝尔积分

伽罗瓦(Evariste Galois,1811～1832)出生于巴黎附近一小城的市长家庭,1830年入巴黎高等师范学校,不久因参加反对波旁王朝的共和活动而被开除,并两次入狱,1832年在一次由政治、爱情纠葛引起的决斗中去世,时年仅21岁。

像阿贝尔一样,伽罗瓦稍纵即逝的数学生涯却留下了永恒的遗产。他写于1829～1931年间的几篇论文,成为近世代数的发端,其中提出"群"的概念,并用以建立了代数方程根式可解的充分必要条件,从而宣告了这一问题的彻底解决。伽罗瓦的论文生前遭到法国科学院的冷遇,直到他去世以后,在1846年才由刘维尔(J. Liouville)整理发表出来并产生影响。伽罗瓦在决斗前夜写给友人夏瓦利尔(Auguste Chevalier)的遗书中,概述了自己的数学工作。以下译出的就是该信的全文,所据法文底本见《伽罗瓦手稿与论文集》(Ecrits et mémoires d'Evariste Galois, pp. 173～188, par R. Bourgne et J.-P. Azra, Gauthier-Villars & Cie,Paris, 1962).

亲爱的朋友：

我已在分析领域做出了一些新的发现。

其中有的涉及方程论,其他一些则与整函数有关。

在方程论方面,我一直在寻求方程根式可解的条件,这使我有机会去研究这一理论并描述方程的所有可能的变换,即使它并非根式可解。

可将所有这些发现分写成三篇论文。

第一篇论文已经完成，不管泊松对它怎样评价[①]，我始终保存着这篇论文，并作了修改。

第二篇论文[②]包含了方程论的某些有趣的应用。以下是其最重要的内容的概括：

1. 从第一篇论文的命题Ⅰ和Ⅲ我们看到，将辅助方程的一个根还是所有根添加到方程上，二者有重大差别。

在两种情形，方程的群都通过添加(adjunction)过程而被分解成一些集合，使可以借助同样的代换(substitution)从其中一个集合过渡到另一个集合，但只有在第二种情形，这些集合具有同样代换的条件才肯定成立。这就是所谓真分解(décomposition propre).

换句话说，当一个群 G 包含另一个群 H，群 G 可以被分解成一些集合，其中每个集合都是通过同一代换与 H 的置换(permutation)[③] 相乘而得到，使

$$G=H+HS+HS'+\cdots$$

也可以将 G 分解为包含同一代换的集合，使

$$G=H+TH+T'H+\cdots$$

这两种分解通常是不同的，当它们相同时，分解就是"真"的[④]。

容易看出，如果一个方程的群不能进行任何真分解，而当方程被变换时，那么变换后方程的群将保持相同的置换个数。

---

① 伽罗瓦这里说的第一篇论文即《论方程根式可解的条件》(Memoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux)，1831年1月呈法国科学院，由泊松(S. P. Poisson)审阅，被认为"不可理解"而退回(此前伽罗瓦已两次向科学院递交过关于方程根式可解性的论文，第一次被柯西遗失，第二次因主审人傅里叶去世而被搁置)。该文1846年发表于J. Liouville的《数学杂志》(Journal de mathematiques pures et appliquées，XI. pp. 413～433)。

② 后经J. Liouville整理亦发表于同一杂志(Journal de math. pures et App. XI, pp. 434～444)，题为《根式可解的基本方程》(Des équations primitives qui sont solubles par radicaux)。

③ 按伽罗瓦本人所作的区别，我们将原文中的"substitution"译为"代换"，将"permutation"译为"置换"。

④ 用现代术语表述，伽罗瓦在这里将一个群分解为关于它的一个子群的左陪集与右陪集，当两种分解相同时，就是他所说的"真分解"，即正规(normal)子群情形。

另一方面，当一个方程的群允许真分解，并且被分解成 M 个群，每个群都由 N 个置换组成，那么我们可以通过两个方程来解原来的方程，其中一个方程的群由 M 个置换组成，另一个方程的群则由 N 个置换组成。

因此，当我们已穷尽一个方程的群的所有可能的真分解，我们将得到这样一些群，它们虽然可以被变换，但其置换个数却始终保持不变。

如果每一个这样的群的置换个数皆为素数，那么方程将是根式可解的；否则就不能根式求解。

一个不可分解群所能具有的最小置换个数如果不是素数，就将是 5·4·3。

2. 最简单的是在高斯先生的方法中出现的那些分解。

这些分解对具体形式的方程的群更为明显，因此没有必要在这方面多费时间。

在一个不能用高斯方法化简的方程中，怎样的分解才是实际可行的呢？

我称那些不能用高斯方法化简的方程为“本原(primitive)方程”，这些方程并非真的不能分解，因为它们甚至可以根式求解。

作为根式可解本原方程的理论的一条引理，我于 1830 年 6 月在费吕萨克通报(Bulletin de Férussac)上作了数论的虚数分析①，同时可以发现下列定理的证明：

① 一个可用根式求解的本原方程，其次数必为 p^{ν}，p 是一素数。

② 这类方程的所有置换形如

$$x_{k,l,m,\cdots} / x_{ak+bl+cm+\cdots+h,\, a'k+b'l+c'm+\cdots+h',\, a''k+\cdots},$$

其中 $k,l,m,\cdots$ 是 ν 个指标，每个都取 p 个值，它们表示所有的根。这些指标是关于模 p 而取，就是说如果将这些指标之一加上 p 的

① E. Galois: Sur la théorie des nombres, Bulletin des sciences mathematiques de M. Férussac, XIII, 1830.

倍数，所得的根将是相同的。

通过应用所有这些线性代换而获得的群总共含有 $p^{\nu}(p^{\nu}-1)(p^{\nu}-p)\cdots(p^{\nu}-p^{\nu-1})$个置换。

一般说来，它们所属的方程恰好是不能根式求解的。

我在费吕萨克通报上陈述的方程根式可解的条件过于严格；只有很少的例外，但它们确实存在①。

这种方程论的最后一个应用是关于椭圆函数的模方程的。

我们知道，以周期的 p^2-1 个除数的椭圆正弦② 为其根的方程的群是

$$x_{k,l},x_{ak+bl,ck+dl}$$

因此相应的模方程的群就是

$$x_{\frac{k}{l}},x_{\frac{ak+bl}{ck+dl}}$$

其中$\frac{k}{l}$可以有 $p+1$ 个值：$\infty,0,1,2,\cdots,p-1$。

如约定 k 可取无限值，则可简写成

$$x_k,x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

取 a,b,c,d 的所有值，我们就得到$(p+1)p(p-1)$个置换。

现在将群真分解为两个集合，其代换为

$$x_k,x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

$ad-bc$ 是 p 的二次剩余。

这样简化后的群有$\frac{(p+1)p(p-1)}{2}$个置换。

但容易看出不可能再作进一步的真分解，除非 $p=2$ 或 $p=3$。

这样无论我们用什么方法变换方程，其群的代换个数将保持不变。

然而弄清是否能使方程的次数降低将是有意义的。

首先方程次数不可能低于 p，因为一个低于 p 次的方程不可

---

① 伽罗瓦在费吕萨克通报XIII，p. 271(1830)上指出：当 p 超过 5，$p+1$ 次椭圆模方程不能化为 p 次方程，但 $p=7,p=11$ 是例外情形。

② 法文原文 Sinus de l'amplitude，意指椭圆正弦。

能以 p 作为其群的置换个数的因数。

其次让我们来看能否将一个$(p+1)$次方程降低为 p 次方程，方程的根以 x_k 表示，k 遍取它所有的值，包括无限，方程的代换群为

$$x_k, x_{\frac{ak+b}{ck+d}}$$

$ad-bc$ 为平方数。

这仅当方程的群被分解（当然不是真分解）为 p 个各由 $\frac{(p+1)(p-1)}{2}$ 个置换组成的集合时才可能发生。

设 0 和∞是这些群中的一个群的两个相关联的字(lettre conjointe)。使 0 和∞保持不变的代换具有形式

$$x_k, x_{m^2 k}$$

因此如果 M 是和 1 相关联的字，那么和 m^2 相关联的字将是 m^2M。若 M 是一个平方数，我们将得出 $M^2=1$，然而这种简化只有在 $p=5$ 的情况才有效。

当 $p=7$ 时，我们可以找到一个有$\frac{(p+1)(p-1)}{2}$个置换的群，这时∞，1，2，4 的相关联的字分别为 0，3，6，5。

该群的代换具有形式

$$x_k, x_{a\frac{k-b}{k-c}}$$

b 为 c 的相关联的字，a 是与 c 同时剩余或非剩余的字。

当 $p=11$ 时，将出现记号相同的同样代换，而∞，1，3，4，5，9 分别相关联于 0，2，6，8，10，7。

因此，对 $p=5,7,11$ 的情形，模方程可以被化为 p 次方程。

严格地说，这样的化简对于更高次的情形是不可能的。

第三篇论文是关于积分的。

我们知道，若干项同样的椭圆函数[①] 的和总可以化为单项椭圆函数，再加上一些代数的或对数的量。

---

① 伽罗瓦这里所说的“椭圆函数”，相当于椭圆积分。

其他函数都不具备这样的性质。

然而所有代数函数的积分却表现出完全类似的性质。

我们同时处理每个积分，其微分是一个变元和该变元的同样的无理函数的函数。不论这种无理性是否是根式，或是否可用根式来表示。

我们发现与已知无理性有关的最一般的积分，其不同周期的个数总是偶数。

如果这个数为 $2n$，我们就有如下的定理：

任意项积分的和总可以化为 n 项积分之和，再加上一些代数的和对数的量。

第一类函数是那些代数与对数部分为零的函数。

共有 n 种不同的第一类函数。

第二类函数则是那些余项为纯代数量的函数。

共有 n 种不同的第二类函数。

我们假定其他函数的微分除了在 $x=a$ 处外都不为无限大，并进一步假定它们的余项可以化为单项对数量 $\log P$，P 是代数量。以 $\pi(x,a)$记这些函数，我们有如下定理：

$$\pi(x,a)-\pi(a,x)=\sum \varphi a\psi x$$

φa 和 ψx 分别为第一类和第二类函数。

称 $\pi(a)$ 和 ψ 为 $\pi(x,a)$ 和 ψx 的关于 x 的相同循环(révolution)的周期。我们可推得

$$\pi(a)=\sum \psi\times\varphi a$$

这样第三类函数的周期总可以通过第一类与第二类函数来表示。

我们还可以推导出类似于勒让德定理

$$E'F''-E''F'=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\text{①}$$

---

① 经典的表述应为：$FE'+EF'-FF'=\frac{\pi}{2}$。

的一些定理。

将第三类函数化为定积分，这是雅可比先生最漂亮的发现，但除了椭圆函数的情形外它并不实用。

我们总可以将积分函数与一整数相乘，就像加法情形，只要借助于一个 n 次方程，将其根的值代入积分即可获得被化简的项。

将周期分为 p 个相等部分的方程是 $p^{2n}-1$ 次方程。它的群共包含 $(p^{2n}-1)(p^{2n}-p)\cdots(p^{2n}-p^{2n-1})$ 个置换。

将 n 项积分的和分成 p 个相等部分的方程为 p^{2n} 次方程，它是根式可解的。

关于变换

首先，运用类似于阿贝尔在他最后一篇论文中所指出的方法，我们可以证明，如果在已知的积分关系中，我们有两个函数

$$\int \Phi(x,X)dx, \quad \int \Psi(y,Y)dy$$

其中后一积分有 $2n$ 个周期，那么可以假定 y 和 Y 能用一个关于 x 和 X 的函数的 n 次方程来表示。

然后我们可以假定这些变换通常只是对两个积分进行，因为取 y 和 Y 的任意有理函数，我们显然有

$$\sum \int f(y,Y)dy = \int F(x,X)dx + \text{一个代数量和对数量。}$$

在有两个积分周期个数不同的情况下，方程显然可以进行简化。

因此我们只需比较那些周期个数相同的积分。

我们将证明两个同类积分的最小无理次数必定相等。

最后我们将证明总可以将一个已知积分变换为另一个积分，在变换过程中第一个积分的一个周期被一素数 p 除尽，其余 $2n-1$ 个周期则保持不变。

剩下的仅仅是比较具有相同周期的积分，使得其中一边的 n 项可以仅借助一个 n 次方程而用另一边表示出来，反之亦然。这方面我们还什么都不知道。

您知道，我亲爱的奥古斯特，这些并不是我所探索过的仅有的

课题。我的思维有时主要是考虑这种模糊的理论在超越分析中的应用,这就要求事先了解在量或超越函数之间的关系中我们可以作什么样的变换?可以用什么样的量来替换已知量而能保持这种关系成立?这使我们能立即认识到我们想要寻找的许多表达式的不可能性。但是我没有时间了,我的思想在这一领域尚未充分发展,而这是一个庞大的领域。

请将此信在《百科评论》(Revue encyclopédique)上刊出①。

我一生中常常大胆地提出一些我尚不能完全肯定的命题,但写在这里的一切,在我脑子里已反复思考了近一年之久。我不得不承认,在我有兴趣的领域里,我已宣布但尚未证明、从而使人怀疑的定理确实是太多了。

请求雅可比或高斯不是就这些定理的正确性而是关于它们的重要性公开发表他们的意见。

我相信最终会有人发现,将这一堆东西解释清楚对他们是有益的。

真诚地拥抱您。

E. 伽罗瓦

1832 年 5 月 29 日

(李文林 译　许以超、何育赞 校)

① 按照伽罗瓦的遗愿,他这封信在当年的《百科评论》上被发表出来(Revue eneyclopédique,1832,p. 568)。

61. 哈密顿:论四元数

哈密顿(William Rowan Hamilton,1805~1865)出生于爱尔兰都柏林的一个律师家庭。13岁时因阅读牛顿《普遍算术》而对数学产生强烈兴趣。1823年入都柏林三一学院,大学未毕业即被聘为该校天文学教授。1832年当选为爱尔兰科学院院士,并于1837~1845年间任院长。哈密顿的科学贡献涉及力学、光学和数学等领域。他在数学上的最大成就“四元数”,深刻地影响了近世代数的发展。

四元数是复数的高维类似物。与前人的定义不同,哈密顿首先(1835)将复数看作有序二元(实)数组(a,b),这促使他进一步寻求三维复数,虽未成功,却引导他创立了具有四个分量的“复数”,并发现这样的数系不满足乘法交换律。哈密顿于1843年正式命名他所得到的新数为“四元数”(quaternions),其一般形式为 $a+bi+cj+dk$(a,b,c,d 为实数,$1,i,j,k$ 为单位元)。四元数的创立拓展了数的概念,深化了对代数运算法则的认识,使各种抽象的数系成为代数学的对象,直接推动了向量代数、向量分析和线性结合代数的发展。

哈密顿有两部论述四元数的专著:《四元数讲义》(Lectures on Quaternions, 1853)和《四元数基础》(Elements of Quaternions, London,1866). 以下内容摘译自《四元数基础》(pp. 106~110,149~150,157~160)。

108. 我们可能已经了解用四元数这个名字来称呼两个向量的商的原因,后者在近来的文献中屡见不鲜。首先,这样的商一般说来不是我们通常所说的标量。或者说,它一般不等于任何(所谓的)代数实数,不论是正数还是负数。因为,若设 x 表示任一这样

的(实在的)① 标量,而 α 表示任一(实在的)向量,那么我们已经知道:乘积 $x\alpha$ 表示另一个(实在的)向量,比如说 β',它与 α 方向相同或相反,视标量系数或因数 x 之正负而定;在两种情形,这个积都不可能表示任何一个这样的向量 β,它与 α 相互倾斜成某个实在的角度,无论是锐角、直角还是钝角;换言之,在所设条件下,方程 $\beta'=\beta$ 或 $x\alpha=\beta$ 不可能成立。然而在代数中大家公认 $(x\alpha)/\alpha=x$;因此②,在同样条件下也就不可能有 $\beta/\alpha=x$:x 仍是标量。所以,两个相互倾斜的向量的商无论如何是一个非标量。

109. 现在,在确立标量本身作为两个平行向量的商的概念时,我们不仅要考虑相对长度或通常类型的比,还要考虑相同或相反形式的相对方向。从 α 变为 $x\alpha$,一般是按 $\pm x$ 与 1 之比来改变线段 α 的长度;同时根据标量系数 x 的正负来决定该线段的方向保持不变还是变成相反。类似地,我们可以用迄今最明确的方法来定义两个互相倾斜的向量的非标量商的概念:$q=\beta:\alpha=OB:OA$,为简单起见,我们可以假设这两个向量有相同的端点,这时我们仍然需要同时考虑两个被比较的线段的相对长度和相对方向。但这里所论的两个线段或向量之间的复合关系,其中前一因素仍用(几何中通常类型的)简单比或表示这个比的数来描述;同一复合关系的后一因素则要用角度 AOB 来描述,而不能(像上述那样)仅用一个代数符号+或-来表示。

110. 同样地,在估计这个角度时,为了区别两个不同的向量商,我们也不能只考虑其大小(或者说量),同时还要考虑它的平面:因为否则我们将违背最初的假设③……而得到 $OB':OA=OB$

---

① "actual",意指非零,下同。

② 根据哈密顿在《四元数基础》开始部分所作的"假设 2"。哈密顿在那里一共提出了五条假设,它们是:(i) $\frac{\beta}{\alpha}=q$ 蕴含 $\beta=q\alpha$,这里 q 理解为作用在 α 上的算子,产生 β;(ii) $\frac{\beta'}{\alpha'}=\frac{\beta}{\alpha}$,$\alpha=\alpha'$ 蕴含 $\beta'=\beta$;(iii) $q'=q$,$q''=q$ 蕴含 $q'=q''$;(iv) $\frac{\gamma}{\alpha}\pm\frac{\beta}{\alpha}=\frac{(\gamma\pm\beta)}{\alpha}$;$\frac{\gamma/\alpha}{\beta/\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$;(v) $\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}$,其中 α,β,γ 为向量。

③ 指前面已提到的"假设 2"。

：OA，这里OB'和OB是以OA为轴的旋转圆锥上两条不同的射线或边，它们在此情形下应是互不相等的向量。出于同样的原因，我们也必须区分同一平面上具有相同大小的两个相反角。质言之，为了充分认识空间中两条共端线段OA，OB的相对方向，我们不仅应该知道角AOB所含的度数，而且应该知道从OA到OB旋转的方向：包括有关旋转发生的平面的知识，以及旋转的指向（即从平面的确定一方看是左旋还是右旋）。

111. 或者，如果我们同意选择某个固定的指向（假设为右旋），然后把所有相同指向的旋转称为正旋转，所有相反指向的旋转称为负旋转，那么，对任意给定的角AOB（为简单起见假设它小于两倍直角），考虑在给定平面上从OA到OB的一个旋转，我们可以把平面AOB的一条垂线OC说成是该旋转的正轴；把同一平面的反向垂线OC'说成是该旋转的负轴：围绕正轴的旋转本身叫正旋转，反之为负旋转。因此旋转AOB可以被认为完全确定，如果我们已经知道：一、它的量，或者说它与直角旋转的比；二、正轴OC的方向。缺少关于这两件事情或等价事实的知识是不行的。但不管是考虑轴的方向，还是平面的方位，我们发现（事实上是众所周知）这样一种方向或方位的确定取决于两个极坐标，或其他类型的角元素。

112. 综上所述可知，为了完全确定两个共端向量的所谓几何商，一般需要一个四元元素组，其中每个元素都可以分别用数值表示。这四个元素有一个是用来确定两被比较线段的相对长度；另外三个则是为了完全确定它们的相对方向。后面的三个元素，一个表示两线段相互倾斜的程度，或它们间夹角的大小（或者说量）；其它二个则用来确定与它们的公共面相垂直的轴的方向，围绕该轴按事先选定的正向（或者说按事先选定的指向）发生给定角度的旋转，使作为除数的线段的方向变为（以最简单的方式即在两线段所在的平面上进行）被除线段的方向。就我们当前的目的而言，不再需要多于四个的数值元素：因为当两条线段的长度按比例变化时，它们的相对长度保持不变，而当它们形成的角仅在自身所在的平

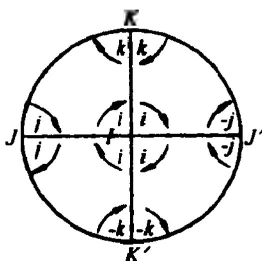
面上转动时，其相对方向也将保持不变。于是，两线段之间的这种复合关系包括了一个长度关系和一个方向关系，我们已经赋予它（通过标量理论的推广）几何商的名称，这是一个四元数组，正是由于这种本质的联系，我们有理由说："两个向量的商一般是一个四元数。"

……

181. 设 OI,OJ,OK 是三个互成直角的共端单位线段，围绕第一个线段从第二到第三的旋转是正旋转；设 OI',OJ',OK' 是分别与 OI,OJ,OK 相反的三个单位向量；使

$$OI'=-OI,OJ'=-OJ,OK'=-OK$$

又设三个新的符号 i,j,k 表示一个三元元素组，它由三个相互垂直平面上的三个直角转子[①] 组成……，使得



$i=OK:OJ,j=OI:OK,k=OJ:OI$，如图所示。对于这三个转子我们还有下列公式

$$i=OJ':OK=OK':OJ=OJ:OK'$$

$$j=OK':OI=OI':OK'=OK:OI'$$

$$k=OI':OJ=OJ':OI'=OI:OJ'$$

而三个相反转子则可分别表示为：

$$-i=OJ:OK=OK':OJ=OJ':OK'=OK:OJ'$$

$$-j=OK:OI=OI':OK=OK':OI'=OI:OK'$$

$$-k=OI:OJ=OJ':OI=OI':OJ'=OJ:OI'$$

通过这些不同公式的比较又可得到其他一些重要的符号方面的结果……。

182. 首先，因为

$$i^2=(OJ':OK)\cdot(OK:OJ)=OJ':OJ$$

---

① 原文 right versors，意指一种算子，产生按给定方向绕给定轴的直角旋转。

等等，我们得出关于这些新符号的平方的下列等值关系：

Ⅰ. $$i^2=-1, j^2=-1, k^2=-1$$

其次，因为

$$ij=(OJ:OK')\cdot(OK':OI)=OJ:OI, \text{等等},$$

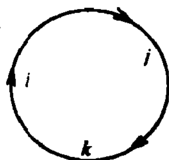
我们又得到同样这三个符号按一定次序两两相乘的乘积公式：

Ⅱ. $$ij=k, jk=i, ki=j$$

然而最后，因为

$$ji=(OI:OK)\cdot(OK:OJ)=OI:OJ$$

等等，我们却得到同样这三个直角转子按相反次序两两相乘的相反的公式：



Ⅲ. $$ji=-k, kj=-i, ik=-j$$

因此，用这三个新符号 i,j,k 表示的三个直角转子每一个的平方等于负单位数，而它们中任意二个的乘积或者等于第三个转子本身，或者等于它的相反转子，具体根据按下列循环顺序

$$i, j, k, i, j\cdots$$

看乘数在被乘数之前还是之后而定，附图可以帮助我们记住这一规则。

183. 这样就得到 $ji=-ij$，……。因此我们看到这些新符号 i，j,k 的组合法则与通常代数中相应的法则不完全相同。乘法的交换律（即当因子交换位置时乘积的值不变）不再成立，这是由于这样的事实，即被组合因子是四维度(diplanar)的转子。不过 i,j,k 的运算法则与通常代数法则也有一致之处，即乘法的结合律，注意到这一点十分重要。这就是说新符号永远服从结合公式

$$l\cdot k\lambda=lk\cdot\lambda$$

无论你用这些符号中的哪一个代替 l,k 和 λ；由于两边的值相等，我们可以在任何这样的三元乘积式（其因子或者相等或者不等）中省去点号而简单地写成 $lk\lambda$。特别地我们有

$$i\cdot jk=i\cdot i=i^2=-1;\quad ij\cdot k=k\cdot k=k^2=-1$$

或简单地写成

$$ijk=-1$$

因此我们可以建立如下重要公式：

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$

……我们将发现这一公式(实质上)包含了符号 i,j,k 的全部法则,从而成为整个四元数演算的充分的符号基础,因为我们可以证明:每个四元数都能化为四元标准形式

$$q=w+ix+jy+kz$$

这里 w,x,y,z 构成一个四元标量组,而 i,j,k 是如上所述的三个直角转子。

如果在两个互相垂直的平面上的两个直角转子按两种相反的顺序相乘,所得乘积将是两个相反的直角转子,它们都在与上述两平面相垂直的第三平面上。用符号表示为

$$q'q=-qq'$$

于是在这里我们得出了在普通代数中将被视为悖论的结果,……。当我们考察最后这个方程到底有何意义,我们发现可以这样简单地认为:任何两个在互相垂直的平面上的直角旋转,合成第三个直角旋转,结果是在与这两个平面都垂直的平面上。这第三个旋转(或者说结果旋转)的方向将取两个相反方向之一,具体根据两个分量旋转发生的先后次序而定。

(李文林 译　许以超 校)

62. 李:《论变换群》

伽罗瓦群的概念在19世纪下半叶得到了很大发展。1872年,克莱茵(C. F. Klein)在著名的《爱尔兰根纲领》中用无限连续变换群对几何学进行分类。受克莱茵影响,李于1874年发表论文《论变换群》(Ueber Gruppen von Transformationen),开始建立连续变换群的一般理论,并阐明其作为几何、力学与微分方程分类原则的中心重要性。连续群现称"李群",它与伽罗瓦置换群和高斯等人在数论研究中引进的变换群一起成为抽象群论的重要来源。

李(Marius Sophus Lie, 1842～1899)是挪威人,1865年毕业于克里斯蒂安尼亚(即今奥斯陆)大学,随后访问德、法等国,结识克莱茵,达布(J. G. Darboux)、若尔当(C. Jordan)等学者,1871年任克里斯蒂安尼亚大学教授,1886～1898年接替克莱茵主持莱比锡大学数学讲座。李毕生研究连续群,在其学生恩格尔(F. Engel)、舍费尔斯(G. Scheffers)等协助下,著有《变换群理论》(Theorie der Transformationsgruppen, 3, vols. 1888～1893, Leipzig)等多部标准大著,系统阐述连续变换群理论及其应用。以下摘录《论变换群》一文部分内容,转译自 G. Birkhoff: A Source Book in Classical Analysis, pp. 300～305,李的原文刊于 Nachrichten König. Ges, der Wiss. Göttingen, 22(1874), pp. 529～542.

变换群的概念首先出现在数论和置换理论的教材中,近来也应用于几何和一般分析学中,变换集称为构成γ参数群,如果它能表成

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_r), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

其中 $x_1,\cdots,x_n$ 表示原来的变量，$x_1',\cdots,x_n'$表示新的变量，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是参数。在下面叙述中我们总取变量为连续变量，且此变换集中任两变换的合成仍为此变换集中之变换，即方程

$$x_i'=f_i(x_1,\cdots,x_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$$

和

$$x_i''=f_i(x_1',\cdots,x_n';\beta_1,\cdots,\beta_r)$$

蕴含

$$x_i''=f_i(x_1,\cdots,x_n;\gamma_1,\cdots,\gamma_r)$$

其中 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r$ 是只依赖于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 及 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的量。我们的问题为要决定所有(连续)变换群。在这篇文章中我们只论讨了比较简单的，也是到目前为止已得到的结果①。

为了使得所提出的问题明确化，我们必须引进两个变换群的等价概念。我们说两个变换群是等价的，如果当坐标解析地从一组变为另一组，则和变换群

$$x_i'=f_i(x_1,\cdots,x_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$$

等价的变换群可表为

$$y_i'=\Phi_i(f_1(\varphi_1,\cdots,\varphi_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_r),\cdots,f_n(\varphi_1,\cdots,\varphi_n;\alpha_1,\cdots,\alpha_r))$$

其中 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 为原来变量 $y_1,\cdots,y_n$ 的函数，$\Phi_1,\cdots,\Phi_n$ 为它的值。等价定义蕴含了 y 的变换集也构成群，我们将等价的变换群看作是相同的群。本文下面的叙述就按这个意义来理解。

1. 为了在一个变数情形展开理论，首先提出这样的问题：单参数群

$$x'=f(x,\alpha)$$

是否存在？我们知道单参数群必包含恒等变换，设在参数取值 $\alpha=\alpha^0$ 时为恒等变换，因此任取 x 有 $x=f(x,\alpha^0)$。当 α 取值为 $\alpha^0+d\alpha$ 时便得到无穷小变换。

① 在一般情形，问题一直未得到解决，实际上我们还不清楚所谓决定的真正含义。

$$x'=x+\frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha,\ \alpha=\alpha^0$$

将它改写为

$$dx=Xd\alpha$$

其中 $X(X=\frac{\partial f}{\partial\alpha}$,当 $\alpha=\alpha^0$)只是 x 的函数。连续无限次叠代这个无穷小变换,便生成整个群①。因此适当选取变量可将这个群表为

$$x'=x+\alpha$$

所以在单变量情形,单参数变换群只有一种类型②。

2. 现在考虑 2-参数群

$$x'=f(x;\alpha_1,\alpha_2)$$

用同样办法可知有 ∞^1 个无穷小变换,③ 它们是下面两个无穷小变换

$$d_1x=\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}d\alpha_1,d_2x=\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}d\alpha_2(\alpha_1=\alpha_1^0,\alpha_2=\alpha_2^0)$$

的线性组合

$$dx=(\lambda_1\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial\alpha_2})dt,\ \alpha_1=\alpha_1^0,\ \alpha_2=\alpha_2^0$$

反之,两个无穷小变换

$$d_1x=X_1d\alpha_1,d_2x=X_2d\alpha_2$$

的线性组合

$$dx=(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)dt$$

给出 ∞^1 个无穷小变换。如果它们生成 2-参数群,则必须适合一些条件,为此必须考虑二阶无穷小,它们由下式给出:

$$\Delta_1x=X_1d\alpha_1+X_1\frac{dX_1}{dx}\frac{d\alpha_1^2}{2}$$

---

① 李已知道 $f(x,\alpha)=(\mathrm{Exp}\alpha X)x$,其中 $X=\xi(x)\frac{\partial}{\partial x}$,$\mathrm{Exp}\alpha X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}X^k$,$\forall\alpha\in\mathbb{R}$。

② 这一事实实际上在局部时成立。

③ 李必须想到非但存在 ∞^1 个单参数子群,还存在 ∞^2 个无穷小变换。

$$\Delta_2 x = X_2 d\alpha_2 + X_2 \frac{dX_2}{dx}\frac{d\alpha_2^2}{2}$$

且要求这些量的线性组合给出了∞^1个无穷小变换(在高阶无穷小意义下),即

$$\Delta x = (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)dt + \frac{1}{2}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)\frac{d(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)}{dx}dt^2$$

因此①我们得到如下条件(这个条件也就足够了)

$$X_1 \frac{dX_2}{dx} - X_2 \frac{dX_1}{dx} = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2$$

其中常数 μ_1 和 μ_2 不全为零,因为否则 X_1 和 X_2 间只差一个常数因子,所以可取这两个无穷小变换恒相等②。

另一方面,我们总可假设在∞^1个无穷小变换中选取无穷小变换,使得 $\mu_2 = 0$,且可取坐标使得它决定的单参数子群由 $d_1 x = X_1 d\alpha_1$ 生成,且可表为平移 $x' = x + \alpha$,即 $d_1 x = d\alpha_1$, $X_1 = 1$。因此我们有$\frac{dX_2}{dx} = \mu_1$,所以 $X_2 = \mu_1 x + c$。这样一来,2 参数群可表为

$$x' = \gamma x + \delta$$

其中 γ 和 δ 为两个参数,这证明了单变数空间上作用的 2 参数群也只有一种类型,它由上述线性变换,即由平移变换和相似变换组合而成③。

同时我们还注意到这个 2 参数群中,由平移构成的单参数群扮演了重要的角色,它具有在坐标变换下不变的独特性质④。

3. 类似地,我们能决定所有 3 参数群。如果无穷小变换

$$d_1 x = X_1 d\alpha_1,\ d_2 x = X_2 d\alpha_2,\ d_3 x = X_3 d\alpha_3$$

生成 3 参数群,则 Poisson 括号 $X_i \frac{dX_j}{dx} - Z_i \frac{dX_j}{dx}$ 必须为 X_1, X_2 和 X_3 的线性组合,不失一般性,我们无妨假设前两个无穷小变换生

① 用同样的方法可以导出两个变数情形的类似条件。——原注

② 在这儿,李认识到 r-参数群的无穷小生成元集由 r 个无穷小变换线性生成的必要且充分条件为它们在 Poisson 括号下封闭。

③ 这也只有在局部时才正确。

④ 这是正规单参数子群,且为仅有的正规单参数子群。

成 2 参数子群，为了决定含有一个 2 参数子群的 3 参数群，我们必须考虑这个 3 参数群中∞^2个变换，它使得一固定点 x_0 不动，因此可选取坐标使得这个 2 参数子群用最简单的表达式，这能证明 3 参数群可用所有线分式变换 $x'=(\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta)$构成的群表达。如果在单变数空间上讨论 4 参数群，用上面类似的讨论可证这种群不存在，最后我们获得下面简单的结论。

单变数变换群只能不超过 3 个参数，这群等价于所有线性变换构成的群，或者它的子群。

在两个变数的情形，问题变得很复杂。在推广时和单变数情形不同，即我们不考虑点变换，换句话说，我们不考虑将 x_1',x_2'表为 x_1,x_2 的函数，而是考虑切触变换，即 x_1',x_2'及 $p'+\frac{dx_1'}{dx_2'}$用 x_1,x_2 及 $p=\frac{dx_1}{dx_2}$来表示[①]。用齐次坐标 p_1,p_2 来表示坐标 p，在 Mathematischen Annalen vol. 5 中我们发表了如下结果：每个无穷小切触变换能用 p_1,p_2 的一阶齐次函数 $H(x_1,x_2,p_1,p_2)$来表示。x_1，x_2,p_1,p_2 在切触变换下的无穷小改变能表为

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}=-\frac{\partial p_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}}=-\frac{\partial p_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}}$$

推广到 r 参数群的情形，无穷小变换可用函数 $H_1,H_2,\cdots,H_r$ 来刻画，其充分且必要条件为

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial p_1}-\frac{\partial H_k}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial H_i}{\partial p_1}+\frac{\partial H_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial p_2}-\frac{\partial H_k}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial H_i}{\partial p_2}$$

（在一阶偏微分方程理论中，通常用$[H_i,H_k]$来表示）是 $H_1,\cdots$，H_r 的线性组合。

下面详细地叙述结果，我们得到这些结果的基础，部分藉助于几何考虑。

---

① 我们也可以考虑作为三个变量 x_1,x_2 和 p 的点变换，只是要适合如下的特殊条件：

$$dx_1-p\,dx_2=0\text{——原注}$$

两个变数的切触变换群的不变量[1] 或者为(1)二阶微分方程，或者至少为(2)三阶微分方程。

后一情形可用熟知的圆映入圆的变换来实现，这些变换全体组成 10 参数群，它包含 7 和 6 参数子群，而不存在 9 和 8 参数子群，当空间中点坐标用 x_1, x_2, p_1, p_2 表示时，则 10 参数群可变为空间中直射变换群，它们将线性复形映为线性复形[2]。

在情形(1)，在适当选取变数(用一个适当的切触变换)后，能将使二阶微分方程不变的所有变换构成的群变为点变换群，然后出现下面三种可能性：

(1) 在平面上有两个单参数曲线族在所有变换下不变，这如同保角变换的情形，于是每组有一维的曲线系能经过 1，2 或 3-参数群变为另一组曲线系，一组曲线系的变换，独立于其他变换，在每种情形完全决定平面变换。最简单的例子是将和两个生成元系不交的双曲面仍变为自身的那些空间直射变换，或者使两点不变的平面直射变换。

(2) 只将一个单参数曲线族保持不变，则存在无穷多个不同类型，它能计数。

(3) 不能使任何单参数曲线族保持不变，这时可将这变换群表成由平面直射变换构成的 8 参数群，或者它的 6 参数子群，或者 5 参数子群，这个 8 参数群没有 7 参数子群。

在超过两个变数的情形，首先我们注意到理论分析的基础是完全相同，此外，r 参数群的类型的个数是有限制的，我们可以用足够大维数的空间的直射变换构成的群来构造所有类型的例子。

……

5. 关于上面这些研究对其他数学学科的重要性可由下面的

---

① 将微分方程不变的意义为：在平面上几何地理解为在这变换下将积分曲线变为积分曲线。

② 和 Math. Annalen 第 5 卷中我们的结果相比较，在那里我们将空间中球映入球的所有切触变换变为……空间直射变换。——原注

注记中看出，按照克莱茵[①] 处理几何类型的办法，流形总是依赖于一个变换群，因此如果在一个变数的情形所有能构造的变换群诱导了射影群，则直线上所有几何的构造方法包含在不变量的通常线性理论中，在两个变数的情形最好的群可表为由反演和直射变换生成的群，于是在平面的几何的所有类型中它从属于平面度量几何及射影几何。

但是我特别要强调微分方程理论在这些所考虑的对象中的关系。

如果取两个变数的任意阶微分方程，则使它不变的切触变换构成上面列举的群之一，允许非平凡切触变换的微分方程类的分类就基于积分的有理理论中的结果，例如由线性微分方程组成的这种函数类可以通过切触变换所导出，所以对一阶微分方程分类是不必要的，因为在 I，2 中列举的类型的无限制数量的切触变换下难以察觉它们是全部不变的[②]。

对任意多个变数的任意阶微分方程，相类似的考虑也成立，这建议了一个有高产量的研究方向，要考虑这些切触变换，它在精确到它的积分相同的意义下将一阶偏微分方程变为自身。

（许以超 译）

---

① 在这里李参考了克莱因的 Erlanger Programm，英文译稿见 Bull. Ann，Soc，2 (1893)，215～249，中译文见本书[78]。

② 然而可以获得下面的定理：若我们知道使两个变数的一阶微分方程不变的无穷小切触变换，则我们能找到这个方程的一个积分因子且可以积分它，这定理推广了由克莱因和我(Math. Annales. vol 4，p. 38)发表的结果。——原注



Ⅵ. 几何学的变革



解析几何、射影几何与高维几何

63. 笛卡儿:《几何学》

17世纪,笛卡儿、费马创立的解析几何,将变量引进数学,为微积分的发展铺平了道路。与代数的结合同时也引起了几何学本身的深刻变革。

笛卡儿(René Descartes,1596～1650)出生于法国图赖讷省拉艾镇,其父是地方法院评议员。1616年,笛卡儿获普瓦捷大学法律学位,此后到荷兰度过了多年军旅生活,并曾游历瑞士、意大利等国,1628年再度移居荷兰,1649年应邀赴瑞典斯德哥尔摩担任克里斯蒂娜(Christina)女王的教师,不久患肺炎病逝。笛卡儿集哲学家、数学家、物理学家、生理学家于一身,研究领域十分广阔。对普遍科学方法的追求引导他发明了解析几何。阐述这种新几何思想的著作、也是他生前发表的唯一数学著作——《几何学》(La géométrie),就是作为其哲学著作《方法论》(Discours de la méthode,Leiden,1637)的附录之一而出版。原作为法文,1649年被荷兰数学家斯霍腾(F. van Schooten)译成拉丁文并加评注出版后,在欧洲产生广泛影响。

《几何学》全书分三编,第一编讨论尺规作图,但却采取了不同于欧几里得传统的全新思路,运用算术术语,特别是在该编后半部分引进平面坐标来得出几何问题的方程。因此,《几何学》第一编实际上已包含了解析几何的要旨;第二编"曲线的性质",进一步发展解析几何方法,论

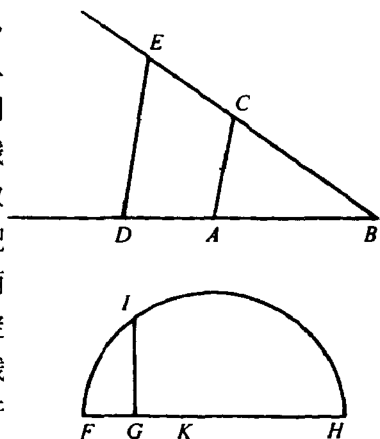
述如何导出具体代数方程并据以研究曲线的各种性质，特别是包括了在求曲线切线方面的应用——笛卡儿"圆法"；第三编以当时流行的代数问题为主题，其中包括了著名的"笛卡儿符号法则"。

以下选录《几何学》第一编全部内容，转译自 D. E. Smith & M. L. Latham, The Geometry of René Descartes, Dover, 1954.

第一编　仅使用直线和圆的作图问题

任何一个几何问题都很容易化归为用一些术语来表示，使得只要知道直线段的长度的有关知识，就足以完成它的作图。

如何将算术运算转为几何的运算



算术仅有四或五种运算组成，即加、减、乘、除和开根，后者可认为是一种除法；在几何中，为得到所要求的线段，只需对其它一些线段加加减减；不然的话，我可以取一个线段，称之为单位，目的是把它同数尽可能紧密地联系起来，而它的选择一般是任意的；当再给定其它两条线段，则可求第四条线段，使它与给定线段之一的比等于另一给定线段与单位线段的比（这跟乘法一致）；或者，可求第四条线段，使它与给定线段之一的比等于单位线段与另一线段之比（这等价于除法）；最后，可在单位线段和另一线段之间求一个，两个或多个比例中项（这相当于求给定线段的平方根、立方根，等等）。为了更加清晰明了，我将毫不犹豫地将这些算术的术语引入几何。

如何在几何中进行乘、除和开平方根

例如，令 AB 为单位线段，求 BC 乘 BD。我只要联结点 A 与

点 C，引 DE 平行 CA；则 BE 即是 BD 和 BC 的乘积。

若求 BD 除 BE，我联接 E 和 D，引 AC 平行 DE；则 BC 即为除得的结果。

若想求 GH 的平方根，我沿该直线加上一段等于单位长的线段 FG；然后平分 FH 于 K；我再以 K 为心作圆 FIH，并从 G 引垂线延至 I。那么，GI 即所求的平方根。我在这里不讲立方根或其它根的求法，因为在后面讲起来更方便。

我们如何在几何中使用算术符号

通常，我们并不需要在纸上画出这些线，而只要用单个字母来标记每一条线段就够了。所以，为了作线段 BD 和 GH 的加法，我记其中的一条为 a，另一条为 b，并写下 $a+b$。同样，$a-b$ 将表示从 a 中减去 b；ab 表示 b 乘 a；$\frac{a}{b}$ 表示 b 除 a；aa 或 a^2 表示 a 自乘；a^3 表示自乘所得的结果再乘 a，并依此类推。类似地，若求 a^2+b^2 的平方根，我记作 $\sqrt{a^2+b^2}$；若求 $a^3-b^3+ab^2$ 的立方根，我写成 $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$，依此可写出其它的根。必须注意，对于 a^2，b^3 及类似的记号，我通常用来表示单一的一条线段，只是称之为平方、立方等等而已，这样，我就可以利用代数中使用的术语了。

还应该注意，当所讨论的问题未确定单位时，每条线段的所有部分都应该用相同的维数来表示。a^3 所含的维数跟 ab^2 或 b^3 一样，我都称之为线段 $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$ 的组成部分。然而，对单位已确定的情形就另当别论了，因为不论维数的高低，对单位而言总不会出现理解上的困难；此时，若求 a^2b^2-b 的立方根，我们必须认为 a^2b^2 这个量被单位量除过一次，而 b 这个量被单位量乘过 2 次。

最后，为了确保能记住线段的名称，我们在给它们指定名称或改变名称时，总要单独列出名录。例如，我们可以写 $AB=1$，即 AB 等于 1；$GH=a$，$BD=b$ 等等。

我们如何利用方程来解各种问题

于是，当要解决某一问题时，我们首先假定解已经得到，并给为了作出此解而似乎要用到的所有线段指定名称，不论它们是已

知的还是未知的。然后，在不对已知和未知线段作区分的情况下，利用这些线段间最自然的关系，将难点化解，直至找到这样一种可能，即用两种方式表示同一个量。这将引出一个方程，因为这两个表达式之一的各项合在一起等于另一个的各项。

我们必须找出跟假定为未知线段的数目一样多的方程；但是，若在考虑了每一个有关因素之后仍得不到那样多的方程，那么，显然该问题不是完全确定的。一旦出现这种情况，我们可以为每一条缺少方程与之对应的未知线段，任意确定一个长度。

当得到了若干个方程，我们必须有条不紊地利用其中的每一个，或是单独加以考虑，或是将它与其它的相比较，以便得到每一个未知线段的值；为此，我们必须先统一地进行考察，直到只留下一条未知线段，它等于某条已知线段；或者是未知线段的平方、立方、四次方、五次方、六次方等中的任一个，等于两个或多个量的和或差，这些量中的一个是已知的，另一些由单位跟这些平方、或立方、或四次方得出的比例中项乘以其它已知线段组成。我用下列式子来说明：

$$z=b$$

$$\text{或 } z^2=-az+b^2$$

$$\text{或 } z^3=az^2+b^2z-c^3$$

$$\text{或 } z^4=az^3-c^3z+d^4$$

……

即，z 等于 b，这里的 z 我用以表示未知量；或 z 的平方等于 b 的平方减 z 乘 a；或 z 的立方等于 z 的平方乘以 a 后加 z 乘以 b 的平方，再减 c 的立方，其余类推。

这样，所有的未知量都可用单一的量来表示，无论问题是能用圆和直线作图的、或是能用圆锥截线作图的，甚或是能用次数不高于三或四次的曲线作图的。

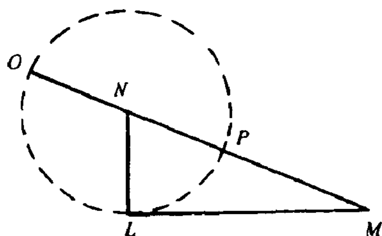
我在这里不作更详细的解释，否则我会剥夺你靠自己的努力去理解时所能享受的愉悦；同时，通过推演导出结论，对于训练你的思维有益，依我之见，这是从这门科学中所能获得的最主要的好

处。这样做的另一个理由是，我知道对于任何熟悉普通的几何和代数的人而言，只要他们仔细地思考这篇论著中出现的问题，就不会碰到无法克服的困难。

因此，我很满意如下的说法：对于一名学生来说，如果他在解这些方程时一有机会就能利用除法，那么他肯定能将问题约化到最简单的情形。

平面问题及其解

如果所论问题可用通常的几何来解决，即只使用平面上的直线和圆的轨迹，此时，最后的方程要能够完全解出，其中至多只能保留有一个未知量的平方，它等于某个已知量与该未知量的积，再加上或减去另一个已知量。于是，这个根或者说这条未知线段能容易地求得。例如，若我得到 $z^2=az+b^2$，我便作一个直角三角形 NLM，其一边为 LM，它等于 b，即已知量 b^2 的平方根；另一边 LN，它等于$\frac{1}{2}a$，即另一个已知量——跟我假定为未知线段的 z 相乘的那个量——的一半。于是，延长 MN，整个线段 OM 即所求的线段 z。它可用如下方式表示：



$$z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{2}a^2+b^2}$$

但是，若我得到 $y^2=-ay+b^2$，其中 y 是我们想要求其值的量，此时我作同样的直角三角形 NLM，在斜边上划出 NP 等于 NL，剩下的 PM 即是所求的根 y。我们写作

$$y=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$$

同样地，若我得到

$$x^4=-ax^2+b^2$$

此时 PM 即是 x^2，我将得出

$$x=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$$

其余情形类推。

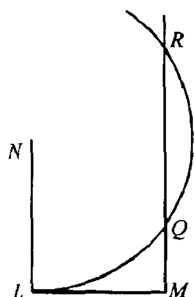
最后，若得到的是 $z^2=az-b^2$，我如前作 NL 等于 $\frac{1}{2}a$，LM 等于 b；然后，我不去联接点 M 和 N，而引 MQR 平行于 LN，并以 N 为心画过 L 的圆，交 MQR 于点 Q 和 R；那么，所求线段 z 或为 MQ，或为 MR，因为此时有两种表达方式，

即：

$$z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$$

和

$$z=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$$



当以 N 为心过 L 的圆跟直线 MQR 既不相交也不相切，则方程无根，此时我们可以说这个问题所要求的作图是不可能的。

还有许多其它的方法可用来求出上述同样的根，我已给出的那些非常简单的方法说明，利用我解释过的那四种图形的作法，就可能对通常的几何中的所有问题进行作图。我相信，古代数学家没有注意到这一点，否则他们不会花费那么多的劳动去写那么多的书；正是这些书中的那些命题告诉我们，他们并没有一种求解所有问题的可靠方法，而只是把偶然碰到的命题汇集在一起罢了。

帕普斯的例子

帕普斯(Pappus)在他的第 7 卷书的开头所写的内容也证明了这一点。在那里，他先用相当多的篇幅列出了他的前辈撰写的大量几何著作；最后才提到一个问题，他说那即非欧几里得(Euclid)，亦非阿波罗尼奥斯(Apollonius)或其他人所能完全解决的；他是这样写的：

此外，他(阿波罗尼奥斯)说与三线或四线相关的轨迹问题，欧几里得并未完全解决，他本人和其他任何人也没能够完全解决。他们根本没有利用在欧几里得之前已论证过的圆锥截线，来为欧几里得所写下的内容添加任何东西。

在稍后的地方，帕普斯叙述了这个问题：

他(阿波罗尼奥斯)对与三线或四线相关的轨迹问题引以为豪，对其前辈作者的工作则不置一词。问题的性质如下：若给定了三条直线的位置，并且从某一点引出的三条直线段分别和三条给定直线相交成给定的角；若所引的直线段中的两条所作成的矩形与另一条的平方相比等于给定的比，则具有上述性质的点落在一条位置确定的立体轨迹上，即落在三种圆锥截线的一种上。

同样，若所引直线段与位置确定的四条直线相交成给定的角，并且所引直线段中两条所作成的矩形与另两条作成的矩形相比等于给定的比；那么，同样地，点将落在一条位置确定的圆锥截线上。业已证明，对于只有二线的情形，对应的轨迹是一种平面轨迹。当给定的直线的数目超过四条时，至今并不知道所描绘出的是什么轨迹(即不可能用普通的方法来确定)，而只能称它做“线”。不清楚它们是什么东西，或者说不知其性质。它们中有一条轨迹已被考查过，它不是最重要的而是最容易了解的，这项工作已被证明是有益的。这里要讨论的是与它们有关的命题。

若从某一点所引的直线段与五条位置确定的直线相交成固定的角，并且所引直线段中的三条所作成的直角六面体与另两条跟一任意给定线段作成的直角六面体相比等于给定比，则点将落在一条位置确定的“线”上。同样，若有六条直线，所引直线段中的三条所作成的立体与另三条作成的立体的比为给定的比，则点也将落在某条位置确定的“线”上。但是当超过六条直线时，我们不能再说由四条直线段所作成的某物与其余直线段作成的某物是否构成一个比，因为不存在超过三维的图形。

这里，我请你顺便注意一下，迫使古代作者在几何中使用算术术语的种种考虑，未能使他们逾越鸿沟而看清这两门学科间的关系，因而在他们试图作解释时，引起了众多的含糊和令人费解的说法。

帕普斯这样写道：

对于这一点，过去解释过这些事情（一个图形的维数不能超过3）的人的意见是一致的。他们坚持认为，由这些直线段所作成的图形，无论如何都是无法理解的。然而，一般地使用这种类型的比来描述和论证却是允许的，叙述的方式如下：若从任一点引出若干直线段，与位置确定的一些直线相交成给定的角；若存在一个由它们组合而成的确定的比，这个比是指所引直线段中的一个与一个的比，第二个与某第二个的比，第三个与某第三个的比，等等。如果有七条直线，就会出现跟一条给定直线段的比的情形，如果有八条直线，即出现最后一条与另外最后某条直线段的比；点将落在位置确定的线上。类似地，无论是奇数还是偶数的情形，正如我已说过的，它们在位置上对应四条直线；所以说，他们没有提出任何方法使得可以得出一条线。①

这个问题始于欧几里得，由阿波罗尼奥斯加以推进，但没有哪一位得以完全解决。问题是这样的：

有三条，四条或更多条位置给定的直线，首先要求找出一个点，从它可引出另外同样多条直线段，每一条与给定直线中的某条相交成给定的角，使得由所引直线段中的两条作成的矩形，与第三条直线段（若仅有三条的话）形成给定的比；或与另两条直线段（若有四条的话）所作成的矩形形成给定的比；或者，由三条直线段所作成的平行六面体与另两条跟任一给定直线段（若有五条的话）所作成的平行六面体形成给定的比，或与另三条直线段（若有六条的

① 笛卡儿所引帕普斯的这段话含义不清。我们只能从上下文来理解它。

话)所作成的平行六面体;或者(若有七条的话)其中四条相乘所得的积与另三条的积形成给定的比,或(若有八条的话)其中四条的积与另外四条的积形成给定的比。于是,问题可以推广到有任意多条直线的情形。

因为总有无穷多个不同的点满足这些要求,所以需要发现和描绘出含有所有这些点的曲线。帕普斯说,当仅给定三或四条直线时,该曲线是三种圆锥截线中的一种;但是当问题涉及更多条直线时,他并未着手去确定、描述或解释所求的线的性质。他只是进而说,古代人了解它们之中的一种,他们曾说明它是有用的,似乎是最简单的,可是并不是最重要的。这一说法促使我来作一番尝试,看能否用我自己的方法达到他们曾达到过的境界。

解帕普斯问题

首先,我发现如果问题只考虑三、四或五条直线,那么为了找出所求的点,利用初等几何就够了,即只需要使用直尺和圆规,并应用我已解释过的那些原理;当然五条线皆平行的情形除外。对于这个例外,以及对于给定了六、七、八或九条直线的情形,总可以利用有关立体轨迹的几何来找出所求的点,这是指利用三种圆锥截线中的某一种;同样,此时也有例外,即九条直线皆平行的情形。对此例外及给定十、十一、十二或十三条直线的情形,依靠次数仅比圆锥截线高的曲线便可找出所求的点。当然,十三条线皆平行的情形必须除外,对于它以及十四、十五、十六和十七条直线的情形,必须利用次数比刚提到的曲线高一次的曲线;余者可依此无限类推。

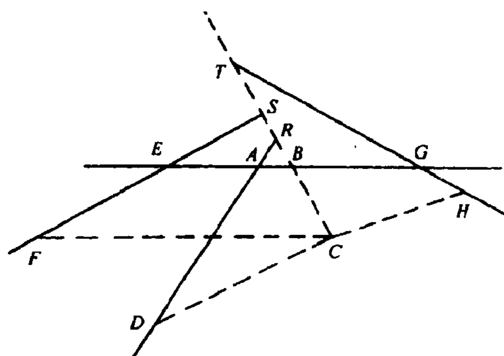
其次,我发现当给定的直线只有三条或四条时,所求的点不仅会出现全体都落在一条圆锥截线上的情形,而且有时会落在一个圆的圆周上,甚或落在一条直线上。

当有五、六、七或八条直线时,所求的点落在次数仅比圆锥截线高一次的曲线上,我们能够想象这种满足问题条件的曲线;当然,所求的点也可能落在一条圆锥截线上、一个圆上或一条直线上。如果有九、十、十一或十二条直线,所求曲线又比前述曲线高一次,正是这种曲线可能符合要求。余者可依此无限类推。

最后，紧接在圆锥截线之后的最简单的曲线是由双曲线和直线以下面将描述的方式相交而生成的。

我相信，通过上述办法，我已完全实现了帕普斯告诉我们的、古代人所追求的目标。我将试图用几句话加以论证，耗费过多的笔墨已使我厌烦了。

令 AB, AD, EF, GH，……是任意多条位置确定的直线，求点 C，使得由它引出的直线段 CB, CD, CF, CH，……与给定直线分别成给定的角 CBA, CDA, CFE, CHG……，并且，它们中的某几条的乘积等于其余几条的乘积，或至少使这两个乘积形成一给定的比，这后一个条件并不增加问题的难度。



我们应如何选择适当的项以得出该问题的方程

首先，我假设事情已经做完；但因直线太多会引起混乱，我可以先把事情简化，即考虑给定直线中的一条和所引直线段中的一条（例如 AB 和 BC）作为主线，对其余各线我将参考它们去做。称直线 AB 在 A 和 B 之间的线段为 x，称 BC 为 y。倘若给定的直线都不跟主线平行，则将它们延长以与两条主线（如需要也应延长）相交。于是，从图上可见，给定的直线跟 AB 交于点 A、E、G，跟 BC 交于点 R、S、T。

因三角形 ARB 的所有角都是已知的，故边 AB 和 BR 的比也

可知。若我们令 $AB:BR=z:b$，因 $AB=x$，我们有 $RB=\frac{bx}{z}$；又因 B 位于 C 和 R 之间，我们有 $CR=y+\frac{bx}{z}$。（当 R 位于 C 和 B 之间时，CR 等于 $y-\frac{bx}{z}$；当 C 位于 B 和 R 之间时，CR 等于 $-y+\frac{bx}{z}$）。又，三角形 DRC 的三个角是已知的，因此可以确定边 CR 和 CD 的比，记这个比为 $z:c$，因 $CR=y+\frac{bx}{z}$，我们有 $CD=\frac{cy}{z}+\frac{bx}{z^2}$。那么，由于直线 AB，AD 和 EF 的位置是确定的，故从 A 到 E 的距离已知。若我们称这段距离为 k，那么 $EB=k+x$；虽然当 B 位于 E 和 A 之间时 $EB=k-x$，而当 E 位于 A 和 B 之间时 $EB=-k+x$。现在，三角形 ESB 的各角已知，BE 和 BS 的比也可知，我们称这个比为 $z:d$。于是 $BS=\frac{dk+dx}{z}$，$CS=\frac{zy+dk+dx}{z}$。当 S 位于 B 和 C 之间时，我们有 $CS=\frac{zy-dk-dx}{z}$，而当 C 位于 B 和 S 之间时，我们有 $CS=\frac{-zy+dk+dx}{z}$。三角形 FSC 的各角已知，因此，CS 和 CF 的比也可知，记作 $z:e$。于是 $CF=\frac{ezy+dek+dex}{z^2}$。同样地，$AG$ 或 l 为已知，$BC=l-x$。在三角形 BGT 中，BG 对 BT 的比，或者说 $z:f$ 为已知。因此，$BT=\frac{fl-fx}{z}$，$CT=\frac{zy+fl-fx}{z}$。在三角形 TCH 中，TC 对 CH 的比、或者说 $z:g$ 也可知，故 $CH=\frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$。

于是，你们看到，无论给定多少条位置确定的直线，过点 C 与这些直线相交成给定角的任何直线段的长度，总可以用三个项来表示。其一由某个已知量乘或除未知量 y 所组成；另一项由另外某个已知量乘或除未知量 x 所组成；第三项由已知量组成。我们必须注意例外，即，给定的直线跟 AB 平行（此时含 x 的项消失），或跟 CB 平行（此时含 y 的项消失）的情形。这种例外情形十分简单，

无须进一步解释。在每一种可以想象到的组合中，这些项的符号或是＋或是－。

你还能看出，在由那些线段中的几条作出的乘积中，任一含 x 或 y 的项的次数不会比被求积的线段（由 x 和 y 表示）的数目大。所以，若两条线段相乘，没有一项的次数会高于 2；若有三条线段，其次数不会高于 3，依此类推，无一例外。

当给定的直线不超过五条时，我们如何知道相应的问题是平面问题

进而，为确定点 C，只需一个条件，即某些线段的积与其它某些线段的积，或者相等或者（也是相当简单的）它们的比为一给定的值。由于这个条件可以用含有两个未知量的一个方程表示，所以我们可以随意给 x 或 y 指定一个值，再由这个方程求出另一个的值。显然，当给定的直线不多于五条时，量 x——它不用来表示问题中原有的那些直线段——的次数绝不会高于 2。

给 y 指定一个值，我们得 $x^2=\pm ax\pm b^2$，因此 x 可以借助直尺和圆规，按照已经解释过的方法作出。那么，当我们接连取无穷多个不同的线段 y 的值，我们将得到无穷多个线段 x 的值，因此就有了无穷多个不同的点 C，所求曲线便可依此画出。

这个方法也适用于涉及六条或更多直线的问题，如果其中某些直线跟 AB 或 BC 中的任一条平行的话；此时，或者 x、或者 y 的次数在方程中只是 2，所以点 C 可用直尺和圆规作出。

另一方面，若给定的直线都平行，即使问题仅涉及五条直线，点 C 也不可能用这种办法求得。因为，由于量 x 根本不在方程中出现，所以不再允许给 y 指定已知的值，而必须去求出 y 的值。又因为此时 y 的项是三次的，其值只需求解一个三次方程的根便可得到，三次方程的根一般不用某种圆锥截线是不能求得的。

进而，若给定的直线不超过九条，它们不是彼此平行的，那么方程总能写成次数不高于 4 的形式。这样的方程也总能够利用圆锥截线，并按照我将要解释的方法去求解。

若直线的数目不超过 13，则可利用次数不超过 6 的方程，它

的求解可依靠只比圆锥截线的次数高一次的曲线，并按照将要解释的方法去做。

（袁向东 译[①]）

① 本译文原载笛卡儿：《几何》，武汉出版社，1992.

64. 费马:论解析几何

费马的重要论文《平面与立体轨迹引论》(Introduction aux Lieux Plans et Solides),是他试图重写阿波罗尼奥斯《论平面轨迹》而获得的研究成果。该文完成于1636年以前,但到费马去世后才在其子编辑的《数学论集》(Varia Opera Mathematica,D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani ,Toulouse,1679)中发表出来。在这篇论文中,费马致力于用严格的分析形式对轨迹问题进行一般性研究(费马所称的平面、立体轨迹含义与现今不同),独立于笛卡儿发现了解析几何的一般原理。费马与笛卡儿的解析几何侧重点有所不同,他着重于不定方程解的作图,而笛卡儿则着重于代数方程根的构造。以下选录费马这篇论文的内容,费马原文载 P. Tannery & C. Henry (eds.): Oeuvres de Fermat, Ⅲ. pp 85 ~ 96, Paris (1896).

平面与立体轨迹引论

人们都承认古人论述了轨迹。我们从帕波斯的著作中可以了解到这一事实,他在卷Ⅶ[①] 的开篇肯定了阿波罗尼奥斯论述了平面轨迹,而阿里斯泰奥斯[②] 论述了立体轨迹。然而,如果我们没有误解的话,对于他们来说,轨迹的讨论并非易事。我们可以由下述事实断定这一点:他们尽管论述了大量轨迹,但几乎没有明确表达

① 指《数学汇编》。

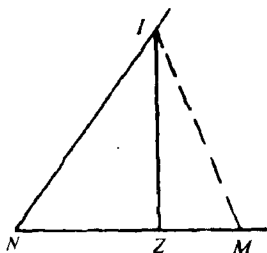
② Aristæus,约 350 B. C～330 B. C. 前后,希腊数学家,著《立体轨迹论五卷》,《圆锥曲线原理五卷》等。

过一种通则，这在以后将会看到。因此我们以一种恰当而严谨的分析的形式提出这一理论，来开展轨迹研究的一般领域。

每当在最后的方程中出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，其中一个未知量的端点描绘出一条直线或曲线。这条直线简单且唯一，曲线的种类则无限地多，——圆，抛物线，双曲线，椭圆等等。

当描绘轨迹的未知量的端点遵循一条直线或一个圆时，称轨迹是平面的；当端点描绘出一条抛物线，双曲线或椭圆时，称轨迹为立体的……

为了有助于建立起方程的概念，我们希望让这两个未知量构成一个角，通常假定其为直角，其中一个未知量的位置和端点是确定的。如果两个未知量中没有一个大于二次，轨迹将是平面的或立体的，如下可以清楚地看到：



设 NZM 是一条给定位置的直线，点 N 固定。设 NZ 是未知量 a，ZI（构成角 NZI 的直线）是另一个未知量 e。

若 $da=be$，点 I 将描绘出一条位置固定的线。事实上我们得到 $\frac{b}{d}=\frac{a}{e}$。因此比 $a:e$ 给定，Z 处的角也同样给定。所以三角形 NIZ 和角 INZ 都是确定的。但是点 N 及直线 NZ 的位置给定，因而 NI 的位置确定。综合很容易。

我们可以将所有那些其项为已知或与未知量 a 和 e 结合的方程化成这个方程，未知量 a 和 e 可以单独出现或乘以给定的量。

$$z^{II}-da=be$$

假设 $z^{II}=dr$，则我们得到

$$\frac{b}{d}=\frac{r-a}{e}$$

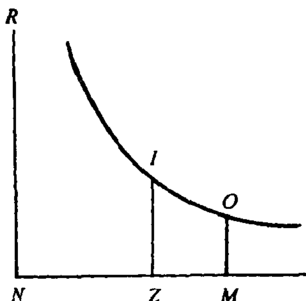
如果我们令 $MN=r$，点 M 将固定，并得到 $MZ=r-a$。

因此比 $\frac{MZ}{ZI}$ 固定。由于 Z 处的角给定，三角形 IZM 将是确定

的，作 MI，可推得这条线固定。于是点 I 就位于一条位置确定的线上，对于任何包含项 a 或 e 的方程都可以轻易地得到相同的结论。

这是最初的也是最简单的轨迹方程，一条直线的所有轨迹都可以由它得到.例如，阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》卷 I 的命题 7，后来却有了更一般的表达形式和作图方法。这个方程产生了下面这个有趣的命题："假设有任意多条给定位置的直线。从一个已知点出发作一些直线构成一些已知角。如果这样作出的直线与给定的直线的乘积之和等于一个给定的面积，那么已知点将描绘出一条位置确定的线。"

我们省略了大量其他的命题，它们可视为阿波罗尼奥斯的命题的推论。

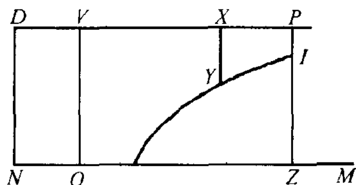


第二类这种方程形如 $ae=z^{II}$，在这种情形下点 I 描绘出一条双曲线。作 NR 平行于 ZI，在直线 NZ 上，过任意点，如 M，作 MO 平行于 ZI。构造出面积等于 z^{II} 的长方形 NMO。在渐近线 NR，NM 间，过点 O 作一条双曲线，它的位置确定且通过点 I，正如已经假定的 ae，——也就是说长方形 NZI，——等于长方形 NMO。我们可以将所有那些其项一部分是常数，或者部分地包含 a，e 或 ae 的方程化成这个方程。

如果我们设

$$d^{II}+ae=ra+se$$

由基本法则得到 $ra+se-ae=d^{II}$。构造一个这种维度的长方形，使之包含项 $ra+se-ae$。两条边将是 $a-s$ 和 $r-e$，它们的长方形是



$$ra+se-ae-rs$$

若从 d^{II} 中减去 rs，则长方形

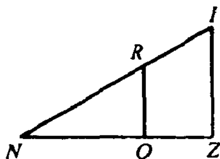
$$(a-s)(r-e)=d^{II}-rs$$

取 NO 等于 s，作 ND 平行于 ZI 且等于 r。过点 D 作 DP 平行于 NM，过点 O 作 OV 平行于 ND，延长 ZI 到 P。

由于 $NO=s, NZ=a$，我们得到 $a-s=OZ=VP$。类似地，由于 $ND=ZP=r, ZI=e$，我们得到 $r-e=PI$。因此长方形 $PV\times PI$ 等于给定的面积 $d^{II}-rs$，所以点 I 是以 PV, VO 为渐近线的双曲线上的点。

如果我们任取点 X，平行线 XY，并作长方形 $VXY=d^{II}-rs$，经过点 Y 我们在渐近线 PV, VO 之间作一条双曲线，则它将通过点 I。在每种情况下分析和作图都很容易。

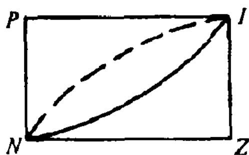
如果我们得到 $a^2=e^2$，或者若 a^2 对于 e^2 是一个给定的关系，或 a^2+ae 对于 e^2 是一个给定的关系，就会产生下面种类的轨迹方程。最后这种类型包含所有由二次项 a^2, e^2 或 ae 组成的方程。在所有这些情形中，点 I 都描绘出一条直线，这一点很容易证明。



如果给定比 $\frac{NZ^2+NZ\cdot ZI}{ZI^2}$，并作任意平行线 OR，那么不难证明 $\frac{NO^2+NO\cdot OR}{OR^2}$ 有给定的比值。因此点 I 位于一条位置确定的直线上。对于项是未知量的平方或它们的乘积的所有方程，这一点同样成立。没有必要列举其他特别的例子。

如果对未知量的平方，含有或不含它们乘积的，我们加上常数项或加上那些由其中的一未知量与一给定量的乘积所组成的项，那么作图将更困难一些。我们将指出作图法并给出几个例子的证明。

如果 $a^2=de$，那么点 I 在一条抛物线上。



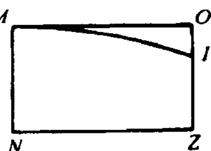
设 NP 平行于 ZI，以 NP 为直径作参数为给定线 d 且纵标平行于 NZ 的抛物线。点 I 将位于这条位置确定的抛物线上。事实上，由作图可知，长方形 $d\times NP=PI^2$，即 $d\times IZ=NZ^2$，因此 $de=a^2$。

我们能够很容易将所有那些其中包含 a^2 则出现给定量与 e 的乘积，或包含 e^2 则出现给定量与 a 的乘积的方程化简成这个方程。如果方程包含常数项，同样成立。

然而，如果 $e^2=da$，那么在前面的图形中，以 N 为顶点，NZ 为直径，作参数为 d，纵标平行于直线 NP 的抛物线。显然满足所给的条件。

如果我们设 $b^2-a^2=de$，可得 $b^2-de=a^2$。以 d 除 b^2，设 $b^2=dr$，得 $dr-de=a^2$ 或 $d(r-e)=a^2$。

用 e 代替 $r-e$，我们就将这个方程化成前面的形式[即 $a^2=de$]。

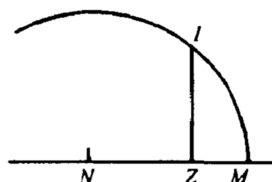


让我们假设 MN 平行于 ZI 且等于 r，过点 M 作 MO 平行于 NZ。则点 M 及直线 MO 的位置给定。由作图可知 $OI=r-e$，因此 $d\times OI=NZ^2=MO^2$。以 M 为顶点，MN 为直径，d 为参数，NZ 的平行线为纵标所作的抛物线如作图中清楚地所示，是满足条件的。

如果 $b^2+a^2=de$，我们有 $de-b^2=a^2$ 等等，同上。类似地，我们能够构造所有包含 a^2 和 e 的方程。

但是我们经常发现 a^2 伴随着 e^2 和常数项，设 $b^2-a^2=e^2$。

如果角 NZI 是一个直角，点 I 将位于一个位置确定的圆上。



假设 $MN=b$。以 N 为圆心，NM 为半径所作的圆将满足条件。也就是说，无论点 I 取自圆周上哪一点，显然 ZI^2（或 e^2）将等于 NM^2（或 b^2）$-NZ^2$（或 a^2）。

若角 NZI 是一个直角并且 a^2 的系数等于 e^2 的系数，那么所有包含以 a^2，e^2 以及 a 或 e 乘以给定量组成的项的方程都可以化成这个方程。

设

$$b^2-2da-a^2=e^2+2re$$

两边加上 r^2，于是以 $e+r$ 代替 e，我们得到

$$r^2+b^2-2da-a^2=e^2+r^2+2re$$

将 r^2+b^2 加上 d^2，然后以 $d+a$ 代替 a，再以 p^2 表示平方和 $r^2+b^2+d^2$，我们得到

$$p^2-d^2-2da-a^2=r^2+b^2-2da-a^2$$

可推出

$$p^2-d^2=r^2+b^2$$

现在如果我们以 a 代替 $a+d$，以 e 代替 $e+r$，将得到

$$p^2-a^2=e^2$$

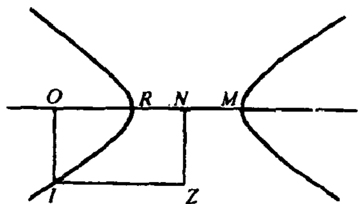
这个方程化成了前面的方程。

同理我们能够化简所有类似的方程。根据这个方法我们已将阿波罗尼奥斯《论平面轨迹》第二卷中的所有命题建立起来，并证明了前六个例子对于任何点都有轨迹，这一点相当不寻常而且可能不为阿波罗尼奥斯所知。

当 $\frac{b^2-a^2}{e^2}$ 是一个给定比时，点 I 将在一个椭圆上。设 MN 等于 b。以 M 为顶点，NM 为直径，N 为中心作一个纵标平行于 ZI 的椭圆，使得纵标的平方比上直径的两线段之积是一个给定比。点 I 将在这个椭圆上。也就是，NM^2-NZ^2 等于直径线段的乘积。

所有那些 a^2 位于方程的一边，e^2 带着相反的符号与一个不同的系数位于另一边的方程都可以化成这个方程。如果系数相同且角是一个直角，我们已经说过，则轨迹是一个圆。如果系数相同但角不是直角，那么轨迹就是一个椭圆。

此外，即使方程含有给定量乘以 a 或 e 的项，用我们前面使用的方法也可以进行化简。



如果 $(a^2+b^2):e^2$ 是一个给定的比，点 I 将在一条双曲线上。

作 NO 平行于 ZI，令给定比等于 $b^2:NR^2$，则点 R 固定。以 R 为顶点，RO 为直径，N 为中心作纵标平行于 NZ 的双曲线，使得整条直径 (MR) 与 RO 之积连同

RO^2 比上 OI^2 等于 $NR^2:b^2$。接下来,设 $MN=NR$,则 $(MO\times OR+NR^2):(OI^2+b^2)$ 等于 $NR^2:b^2$,这是给定的比。

但是

$$MO\times OR+NR^2=NO^2=ZI^2=e^2$$

且

$$OI^2+b^2=NZ^2(\text{或 } a^2)+b^2$$

因此 $e^2:(b^2+a^2)=NR^2:b^2$,颠倒过来,$(b^2+a^2):e^2$ 是给定比。所以点 I 在一条位置确定的双曲线上。

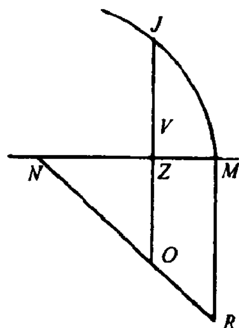
由我们所应用的方法,我们可以将下面所有方程化成这个方程:在这些方程中,a^2 和 e^2(分别)连结了给定项或连结了包含给定项与 a 或 e 的乘积的表达式,而且 a^2 和 e^2 符号相同,并分别出现在方程的两边。如果 a^2 和 e^2 符号不同,那么轨迹就是一个圆或椭圆。

最难的一类方程是由 a^2,e^2,ae 以及其它给定量的项组成的。设

$$b^2-2a^2=2ae+e^2$$

两端加上 a^2,使得其中一端有 $a+e$ 作为一个因子。于是

$$b^2-a^2=a^2+2ae+e^2$$



例如,以 e 代替 $a+e$,那么根据前面的讨论,圆 MI 满足这个方程,也就是说,$MN^2(=b^2)-NZ^2(=a^2)=ZI^2(=[a+e]^2)$。令 $VI=NZ=a$,我们得到 $ZV=e$。

然而,在这个问题中,我们要求点 V 或线 e 的端点,因此有必要找到并表示出点 V 所位于的直线。

设 MR 平行于 IZ 且等于 MN。作 NR 与延长后的 IZ 交于 O。由于 $MN=MR$,故 $NZ=ZO$。但 $NZ=VI$,因此由加法可得,$VO=ZI$。所以 $MN^2-NZ^2=VO^2$。但三角形 NMR 已知,所以比 $NM^2:NR^2$ 与 $NZ^2:NO^2$ 以及 $(MN^2-NZ^2):(NR^2-NO^2)$ 一样给定。而我们已证明了 $OV^2=MN^2-NZ^2$,所

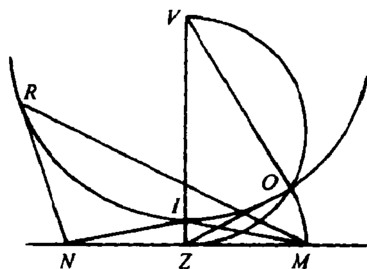
以比$(NR^2-NO^2):OV^2$已知。但是点N和R以及角NOZ都是给定的，所以，如我们刚才所示，点V在一个椭圆上。

通过类似的程序，我们可将所有其他方程化成上述情形，这些方程中除了包含ae和a^2或e^2的项，还有由a和e与给定量相乘所组成的项。对这些各不相同的例子进行讨论非常简单，利用已知构形的一个三角形往往就可以解决问题。

至此，对于古人遗留下来而没有解释的涉及平面和立体轨迹的所有问题，我们已提供了简洁而清晰的阐释。因而人们可以立即辨别出哪一种轨迹适用于阿波罗尼奥斯《论平面轨迹》卷I中最后一个命题的各种情况，而且通常可以轻而易举地发现属于那种情况的所有例子。

作为这篇论文的高潮，我们要补充一个非常有趣的命题，其简明性是显而易见的。

"给定任意条直线的位置，若从某个定点出发作直线与给定直线构成给定角，而且所有线段的平方和等于一个给定的面积，则该点将描绘出一个位置确定的立体轨迹。"



一个单独的例子就足以表明作图的一般方法。给定两点N和M，要求点的轨迹满足IN，IM的平方和比三角形INM是一个给定比。

设$NM=b$，作与NM成直角的直线ZI，令其为e，再令a为距离NZ。根据基本法则，$(2a^2+b^2-2ba+2e^2):be$是一个给定比。在讨论中依照前面阐述过的程序就得到所提出的作图法。

以Z点平分NM，在Z点作垂线ZV，使比$4ZV:NM$等于给定比。在VZ上作半圆VOZ，在圆内作$ZO=ZM$，并连结VO。以V为圆心，VO为半径作圆OIR。若从这个圆上任一点R出发作RN，RM，我认为RN^2+RM^2比三角形RNM是给定比。

这个发现如果早于我们对于论平面轨迹的两本书的已经过时

的校订，那么轨迹定理的作图法会更漂亮一些。然而，无论这项工作可能早熟或不够成熟，我们都不会为它遗憾。事实上，不向后世透露本质上还不完善的著作正是科学的某种魅力所在；当初对于工作的简单而笨拙的劳动通过新的发明却获得了力量又获得了地位。学者们如果既能清晰地识别科学中自发的进展，又能清晰地识别科学中看起来隐蔽的进步，那将是最重要不过的了。

（高 嵘译 贺 霖校）

65. 德扎格:论射影几何

文艺复兴时期绘画与建筑学的需要,刺激了射影几何的诞生。早期射影几何的探索者们都把自己的方法与结果视为欧几里得几何的一部分,但他们的工作实际上开创了一门新的几何分支。

65.1.《试论处理圆锥与平面相交结果的初稿》

德扎格(Gérard Desargues,1591～1661)是射影几何学的先驱,生于法国里昂一教会会员家庭,曾担任过军事工程师和建筑师。他是笛卡儿的朋友,与当时其他领头数学家费马、帕斯卡等亦有交往。他最重要的数学著作《试论处理圆锥与平面相交结果的初稿》(Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan,以下简称《初稿》),1639 年在巴黎出版,其中引进了无穷远点、对合点列、交比等概念,讨论了极点与极线问题,是射影几何学的早期经典。但《初稿》原版只印了 50 本,在 17、18 世纪解析几何与微积分发展的洪流中,逐渐变得湮没无闻,直到 1845 年法国数学家沙勒(M. Chasles)在巴黎重新发现该书的由德扎格一位学生拉依尔(P. de La Hire)手抄的复本,德扎格的思想才开始产生影响,并推动了当时射影几何的复兴。德扎格《初稿》一书中,对合关系的论述占有中心的地位,德扎格所创用的术语也仅有“对合”(involution)一词沿用至今。以下摘录该书有关部分,转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 159～162. 原文见 N. G. Poudra (ed.):Oeuvres de Desargues,(2 vols. Paris,1864),I.

pp. 103～230（根据拉依尔抄本刊印），或 R. Taton (ed.)：L'Oeuvre Mathématique de G. Desargues，Paris，1951（根据1950年在巴黎国立图书馆发现的《初稿》原版刊印）。

一对点与另一对点混合。为了表明这些点对中的一对点关于另一对点的分布方式（图1）：当一对点中的点 C 在另一对点之间，而与点 C 成对的点 G 在另一对点之外，那么我们就说这对点与另一对点混合……

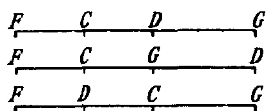


图 1

一对点与另一对点不混合。当一对点或者都类似地位于另一对点之间或者都位于另一对点之外，那么我们就说这一对点与另一对点不混合。

树 若直线 AH 上存在一点 A（图2），这点是三对线段 AB，AH；AC，AG；AD，AF 中每两条线段的公共点，且相似地加入或不加入它们[①]，其中每两条线段的长方形[②]都相等，那么直线上的这种状况称为一棵树，线本身称为树干[③]。



图 2

树桩 六条线段 AB，AH，AC，AG，AD，AF 中的每一条的公共点，如点 A，称为树桩。

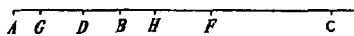


图 3

枝条 这六条线段 AB，AH，AC，AG，AD，AF 中的每一条都称为一个枝条。

---

① 加入线段的公共点指点在线段上，不加入的公共点指点在线段外。

② 两条线段的长方形指两线段的乘积。

③ 这是借助于树桩（即中心点）给出的第一个对合定义：$AB\times AH=AC\times AG=AD\times AF$。

对合　当一条直线 AH 上有三对点 BH,CG,DF(图 3),它们的分布方式是,每对点中的两个点要么都与另两对点中的每两个点混合,要么与它们都不混合,使得与这些点间的线段相关的长方形[1]相互之比与它们的孪生长方形[2]相互之比相同,这些孪生长方形按同样的顺序取得;则一条直线上这样分布的三对点称为对合[3]。

四点对合　我们可以设想出四点对合这个词来表达两种同类的情形,由于这两种情形中的一种或另一种导致:第一种,一条线上的四个点都在有限距离处,形成三条连续的线段,其中任一条末线段比上中间线段如同三条线段之和比上另一末线段,第二种,一条线上的三个点在有限距离处,第四个点位于无穷远处,在这种情形中,这些点同样形成三条线段,其中一条末线段比上中间线段如同三条线段之和比上另一末线段。这乍看起来不可理解而且似乎暗示了在这一情形中由于树桩和端点在无穷远处接合,有限距离处的三个点就由中点形成了两条彼此相等的线段。

因而我们应该小心注意,一条被平分的线延长到无穷是四点对合的一种情形。

相互对应的射线　除一条线上的四点 B,D,G,F 对合外,有四条从点 K 发出的射线 BK,DK,GK,FK 成一线束过这四点,在这种情形中,穿过对应点 D,F 或 B,G 的射线对 DK,FK 或 GK,BK 称为对应的射线(图 4)。

在这种情形中,当两条对应射线 BK,GK 互相垂直时,它们平

---

① 对于一直线上的两对点 CG,BH,长方形 $CB\times CH$ 与 $GB\times GH$ 为相关长方形。

② 对于一直线上的三对点 CG,BH,DF,$CB\times CH$ 与 $CD\times CF$ 是孪生长方形,同样 $GB\times GH$ 与 $GD\times GF$ 也是孪生长方形。

③ 这是第二个对合定义,不依赖于中心点 A,有 $\frac{CB\times CH}{GB\times GH}=\frac{CD\times CF}{GD\times GF}=\frac{AC}{AG}$,等价于现代关于交比 (GC,HB) 与 (GC,FD) 相等的说法。德扎格给出了这两个对合定义的相当复杂的证明。

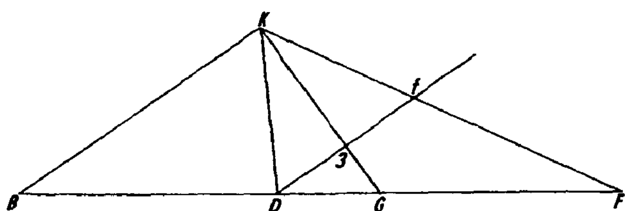


图 4

分另两条对应射线 DK,FK 间的每一个角。

由于作线 Df 平行于两射线中的任一条射线 BK,它垂直于其对应射线 GK,则线 Df 也垂直于射线 GK。

此外,因为 BK 与 Df 的平行性,射线 GK 平分 Df 于点 3。

因而两个三角形 $K3D$,$K3f$ 每一个都在点 3 处有一个直角,而且它们有包含等角 $K3D$,$K3f$ 的边 $3K$,$3D$ 与 $3K$,$3f$ 彼此相等。

由于两个三角形 $K3D$,$K3f$ 相等且相似[①],射线 GK 平分对应射线 DK,FK 间的一个角 DKF,显然射线 BK 平分对应射线 DK,FK 形成的另一个角。

当任意一条射线 GK 平分另两条相互对应的射线 DK,FK 间的一个角 DKF 时,这条射线 GK 垂直于它的对应射线 BK,BK 也平分对应的射线 DK,FK 包含的另一个角。

由于当作线 Df 垂直于任意射线 GK 时,两个三角形 $K3D$ 与 $K3f$ 每一个都在点 3 处有一个直角而且都在点 K 处有一个相等的角及一条公共边 $K3$,这是真实的,因而它们相似并相等,且射线 GK 平分 Df 于点 3。

因此,射线 BK 平行于线 Df 而且垂直于对应线 GK。

在一平面内,有一个由从顶点 K 出发的四条线 BK,DK,GK,FK 组成的线束,当这些线中的两条如 BK 与 GK 互相垂直且平分另两条线 FK,DK 组成的每一个角时,则有这四条线截任

① 指全等。

一条位于同一平面上的线 $BDGF$ 于对合的四点 B,D,G,F。

若一平面上的线 FK 平分三角形 BGb 的一条边 Gb 于点 f。且过在另外两条边中的一条 Bb 上确定的点 K 作另一条线 KD 平行于平分的边 Gb，由这个作图在三角形的第三边 BG 上所确定的 B,D,G,F 四点对合[①]。

当从与平分的边 Gb 相对的角 B 作另一条平行于平分的边 Gb 的线 Bp 时，由三角形 BGb 的三边 BG,Gb,Bb 及线 Bp 在线 FK 上确定的 F,f,K,p 四点对合。

在第二种情形中，通过与作线 GB 相似的方式作线 Bf，在有限距离处的 G,f,b 三点及无穷远处的点是对合的，由于对此以 B 为顶点作一个四个枝条的线束，因而在线 FK 上就确定了对合的四点 F,f,K,p。

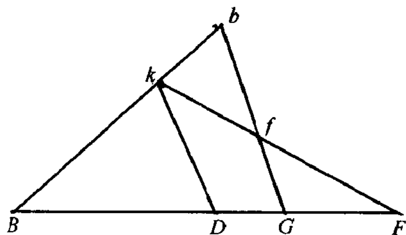
然后，由于线 FGB 在线 bf 上截得一条与诸如三角形 bfK 的边 bf 相等的线段 Gf，这就等于说，FGB 这条线是三角形 bfK 的边 bf 的两倍。

若在一平面内，一条线 FGB 是三角形 bfK 的一边 bf 的两倍，当过在这一三角形的另两条边中的任意一条 bK 上确定的点 B，作一条平行于两倍边 bf 的线 Bp 时，则这个作图在三角形 bfK 的第三边 Kf 上产生四个对合的点 F,f,K,p。

当作出线 BF 后，这是显然的。

当从两倍边 bf 所对的角 K 作一条平行于两倍边 bf 的线 KD 时，这个作图在线 FB 上给出四个对合的点 F,B,D,G，当作出线

① 这里给出了调和线束第四条射线的作图。



KG 后,同样是显然的。

当一条线上的四对点或三对点对合时,这个理论充满类似的确定方法,但这些方法足以开启下面的宝库。

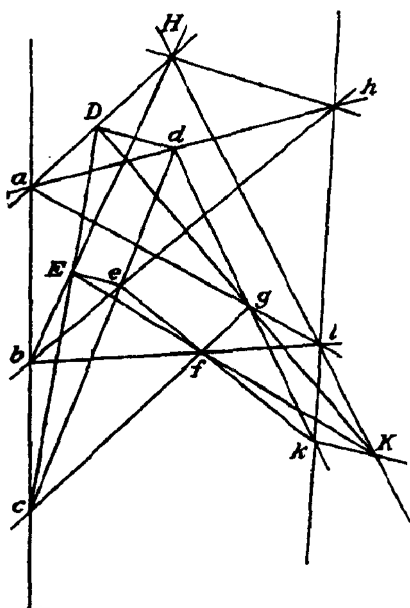
(高 嵘 译 李文林 校)

65.2. 德扎格定理

德扎格的好友博斯(A. Bosse)于 1648 年发表《运用德扎格透视法的一般讲解》(Maniere Universelle de M. Desargues pour Pratiquer la Perspective, Paris),该书附录包括了德扎格的三条重要定理,其中第一条后以"德扎格定理"著称,是射影几何的基本定理,现录述如下,转译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. pp. 307～310。

几何命题

当位于不同平面或同一平面上,具有任意次序和方向的线 HDa, HEb, cED, lga, lfb, HlK, DgK, EfK[1] 交于同类点[2] 时,点 c, f, g 位于同一直线 cfg 上。在所有可能的情形中,无论图形以什么样的形式取不同平面上的线,abc, lga, lfb 在同一平面上,DEc, DgK, KfE 在另一平面



① 德扎格忽略了对于确定 c 极有必要的线 abc。在 Poudra 给出的图形中,a 取作 o,但为清晰起见,相应图形中字母的标记与德扎格给出的证明一致。

② Da, Eb, lK, 交于 H, …。

上，由于点 c,f,g 位于这两个平面上，因此它们在同一直线 cfg 上。位于同一平面上的线有：

$$
\left.\begin{array}{ll}
gD-gK\begin{Bmatrix} aD-aH \\ lH-lK \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} cD-cE \\ bE-bH \end{Bmatrix} \\
fK-fE\begin{Bmatrix} lK-lH \\ bH-bE \end{Bmatrix} & bH-bE
\end{array}\right| \quad cD-cE\begin{Bmatrix} gD-gK \\ fK-fE \end{Bmatrix}
$$

所以 c,g,f 在同一直线上。

反之，若位于不同平面或同一平面，具有任意方向和组成的线 $abc,HDa,HEb,DEc,HK,DKg,KEf$[①]交于同类的点，则线 agb[②]（原文如此）和 bfl 将与 HK 交于相同的终点 l。当这些线位于不同的平面时，$HKgDag$ 是一个平面，$HKfEbf$ 是另一个平面，$cbagf$ 也是一个平面，HlK,bfl,agl 是这三个平面的交线，所以它们必交于同一点 l。若这些线在同一平面内，将已知线 agl 由 a 延长与线 HK 相交，然后作 lb，可以证明它与 EK 交于一点，如 f，f 与 c 和 g 在同一直线上，也就是说 lb 趋向于 f，因此两线 ag,bf 交于 HK 上的点 l。在不同的平面上再取相同的线，若过点 H,D,E,K 的线 Hh,Dd,Ee,Kk 趋向无穷远点，或彼此平行，并与其中一平面 $cbagfl$ 分别交于点 h,d,e,k，则 h,l,k 在一条直线上，h,d,a 在一条直线上，h,e,b 在一条直线上，k,g,d 在一条直线上，k,f,e 在一条直线上，c,e,d 在一条直线上，因为通过作图，线 Hh,Kk,HlK 在一平面上，abc,bfl,klh 在另一平面上，而点 h,l,k 在这两个平面上，因此它们在一条直线上，其它三组也是这样。在同一平面 $cbagfl$ 上的所有线都被过点 H,D,E,K 的平行线所分，所用的方法与几个平面的图形中其对应线所用的方法相同。因此在平面 $hdabcedgfkl$ 中平行线所确定的图形与不同平面 $abcEHlkgf$ 中的

---

① 德扎格再次忽略了已知的共线点集 agl,bfl 及 cfg，他在结论中提到了 agl 和 bfl，在下面的说明中暗指了 cfg。

② 此处应如后面的讨论中所表示的那样为 agl。

图形线与线，点与点，证明与证明都对应，这两个图形的性质可以从一个或另一个推导出来，用这种方法可以只在一个平面内用一个图形代换。

以下的注释是德扎格著作的编者 N. Poudra 给出的，卷 I，pp. 430～433。

分析德扎格的第一个几何命题

注：图形中的小写字母 a,b,c 表示纸平面上的点，而大写字母 E,D,H,K 表示可能在纸外的点。

命题包含三个不同的部分：

1. 若连结空间中或同一平面上的两个三角形 abl，DH(原文如此，应为 E)K 对应顶点的三条直线 aD,bE,lK 交于点 H，那么可以推出这两个三角形的边交于位于一条直线上的三个点 c,f,g。

2. 反之，如果两个三角形的对应边交于共线的三点 c,f,g，那么不仅可以推出连结对应顶点的三条直线 aD,bE,lK 共点于 H，而且可推得 ag,bf,HK 三直线通过点 l，因为 c 可视为过三角形 bfE,agD 顶点的棱锥的顶点。

类似地，将 f 视为过两个三角形 bcE,lgK 的顶点的另一个棱锥的顶点，可以证明对应边产生共线点 A(原文如此，应为 a)，D，H。

同样，将 g 取作顶点，两个三角形 acD,lfK 的对应边交于共线的点 b,E,H。

3. 如果从三角形 DEK 的三个顶点 D,E,K 及顶点 H 作垂线 Dd,Ee,Kk,Hh 交纸平面于点 d,e,k,h，使得线 hd 过 HD 上的点 a，hk 过 l，de 过 c，he 过 b，dk 过 g。那么就在纸平面上确定了一个与不同平面上的图形点与点，线与线，证明与证明相对应的图形，这样这两个图形的性质可由一个或另一个推导出来，用这种方法可以只在一个平面内用一个图形代替。

德扎格在结尾中给出了一个他在这个命题中期望得到的重要结论。 （高嵘 译 沈康身 校）

66. 帕斯卡:《圆锥曲线论》

帕斯卡(Blaise Pascal,1623～1662)出生于法国中部克莱蒙弗朗,其父E·帕斯卡也是一位数学家,帕斯卡常随父亲参加梅森(M. Mersenne)主持的科学讨论会,16岁时就在讨论会上发表自己的成果。帕斯卡具有多方面的兴趣与才能,在几何、概率计算、微积分、流体静力学和计算机等领域都有重要贡献。在射影几何方面,他受德扎格思想的影响,于1640年发表《圆锥曲线论》(Essay pour les Coniques, Paris),用射影几何原理研究圆锥曲线性质并获得许多重要结果,包括著名的"帕斯卡六边形定理"。《圆锥曲线论》也是射影几何学先驱著作,但与德扎格的论文一样,当时仅少量印发,1779年被重新发现,19世纪随着射影几何的复兴而得到广泛流传。以下摘录其中有关部分,转译自 D. J. Struik: A Source Book in Math. pp. 163～168,原文载 L. Brunschvicg & P. Boutroux (eds.): Oeuvres de Pascal, I. pp. 243～260, Paris, 1908.

定义 I

当几条直线交于同一点或彼此平行时,称所有这些线有相同的次序或相同的排列,这些直线的全体称为直线的次序或直线的排列。

定义 II

对于"圆锥曲线"这个措词,我们指圆,椭圆,双曲线,抛物线及一个角。因为平行于圆锥的底,或过其顶点,或在分别形成椭圆,双

曲线和抛物线的其余三个方向上截割圆锥时，在圆锥表面上或者形成圆周，或者形成角，或者形成椭圆、双曲线或抛物线。

定义Ⅲ

当单独使用“droite”（直的）这个词时，我们指“ligne droite”（直线）①。

引理Ⅰ

在平面 M,S,Q 中，若从点 M 作两条直线 MK,MV，从点 S 作两直线 SK,SV；令 K 是直线 MK,SK 的交点；V 是直线 MV,SV 的交点；A 是直线 MA,SA 的交点；μ 是直线 MV,SK 的交点；若过四点 A,K,μ,V 中不与点 M,S 位于同一直线的两点以及过点 K,V，有一个圆截直线 MV,MP,SV,SK 于点 O,P,Q,N，那么我认为直线 MS,NO,PQ 有相同的次序。

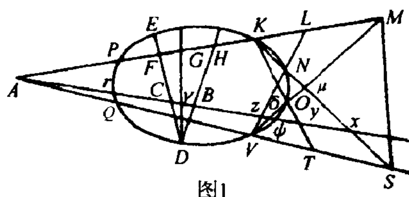


图1

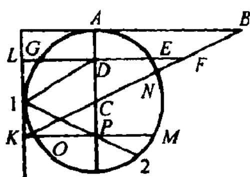


图2

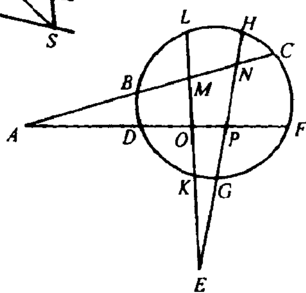


图3

引理Ⅱ

若几个平面过同一直线，并被另一平面所截，那么这些平面的

---

① 在翻译中，“直线”这个词有时指一条直线段。

交线与这些平面所通过的线有相同的次序。

基于这两个引理及它们的几个简单推论，我们可以证明，如果象第一个引理那样假定条件，也就是过点 K,V，无论什么样的圆锥曲线截直线 MK,MV,SK,SV 于点 P,O,N,Q，直线 MS,NO,PQ 都有相同的次序。这形成了第三个引理[①]。

通过这三个引理及某些推论，我们打算推出圆锥曲线的一个完全的有序系列，也就是说，直径和其他直线，切线等的所有性质，实质上源自这些数据的圆锥的作图，通过点对圆锥曲线的描绘等。

完成这项工作后，我们用比通常更一般的方法阐明随后的性质。下面举例说明：在平面 MSQ 上的圆锥曲线 PKV 上作直线 AK,AV 交圆锥曲线于点 P,K,Q,V，若从这四个点中不与点 A 在一条直线上的两点，——如点 K,V，并过取自圆锥曲线上的两点 N,O，作四条延长线 KN,KO,VN,VO 交直线 AV,AP 于点 L,M,T,S，——那么我认为直线 PM 与直线 MA 之比及直线 AS 与直线 SQ 之比组成的比例等同于直线 PL 与直线 LA 之比及直线 AT 与直线 TQ 之比组成的比例。

我们同样可以证明，如果有三条直线 DE,DG,DH 被直线 AP,AR 截于点 F,G,H,C,γ,B，且 E 是直线 DC 上的固定点，那么长方形 $EF\cdot FG$ 与长方形 $EC\cdot C\gamma$ 之比及直线 $A\gamma$ 与直线 AG 之比组成的比例等同于长方形 $EF\cdot FH$ 与长方形 $EC\cdot CB$ 之比及直线 AB 与直线 AH 之比组成的比例。对于长方形 $FE\cdot FD$ 与长方形 $CE\cdot CD$ 的比也同样成立。因此，如果一条圆锥曲线过点 E,D，截直线 AH,AB 于点 P,K,R,ψ，那么直线 EF,FC 组成的长方形与直线 $EC,C\gamma$ 组成的长方形之比及直线 γA 与直线 AG 之比组成的比例将等同于直线 FK,FP 组成的长方形与直线 $CR,C\psi$ 组成的长方形之比及直线 $AR,A\psi$ 组成的长方形与直线 AK，

① 这个引理包含所谓的“神秘的六线形”，是布里昂雄(C. J. Brianchon)定理的对偶定理。帕斯卡没有以教科书中通常所见的形式陈述六线形定理，布里昂雄最先以现代的表达形式重述了帕斯卡定理，并通过另外的证明给出其对偶定理。

AP 组成的长方形之比形成的比例。

我们也可以证明若四条直线 AC,AF,EH,EL 交于点 N,P,M,O，且一条圆锥曲线与这些直线交于点 C,B,F,D,H,G,L,K，则长方形 $MC \cdot MB$ 与长方形 $PF \cdot PD$ 之比及长方形 $AD \cdot AF$ 与长方形 $AB \cdot AC$ 之比所组成的比例等同于长方形 $ML \cdot MK$ 与长方形 $PH \cdot PG$ 之比及长方形 $EH \cdot EG$ 与长方形 $EK \cdot EL$ 之比所组成的比例。

我们还可以证明下述归功于里昂(Lyons)的德扎格的一个性质，德扎格是这个时代的一位伟大的天才，精通数学，尤其是圆锥曲线论，他关于这方面的著述虽然数量不多，却足以向探求这方面信息的人证明他的学识。我承认我在这个科目中的发现很少因为受到他的著作的启发，我曾试图尽可能地模仿他的方法，他处理这一论题的方法中没有用到通过轴的三角形。

一般地讨论圆锥曲线，以下是讨论中的一个值得注意的性质：设平面 MSQ 内有一圆锥曲线 PQN，在其上取四个点 K,N,O,V，从这四点作直线 KN,KO,VN,VO，用这种方法只能有两条直线过这四点，如果另外一条直线交圆锥曲线于点 R,ψ，并交直线 KN,KO,VN,VO 于点 X,Y,Z,δ，那么长方形 $ZR \cdot Z\psi$ 比长方形 $\gamma R \cdot \gamma\psi$ 与长方形 $\delta R \cdot \delta\psi$ 比长方形 $XR \cdot X\psi$ 相同。

同样我们可以证明，在双曲线，椭圆或圆心为 C 的圆 AGE 所在的平面上作直线 AB 切曲线于 A，如果直径已经作出，我们取直线 AB 使之平方等于图形的平方[①]，若 CB 也作出，则任意直线，如 DE 平行于直线 AB 并交曲线于 E，交直线 AC,CB 于点 D,F，那么若曲线 AGE 是一个椭圆或圆，则直线 DE,DF 的平方之和将等于直线 AB 的平方；而在双曲线中，直线 DE,DF 的平方之差将等于直线 AB 的平方。

---

① 线段 AB 等于 $OE+DF$，为使其平方等于内接长方形的 1/4，圆锥曲线必为一个圆。若曲线是一个椭圆，就要取 AB 等于垂直于 CA 的轴。

德扎格在其《初稿》中讨论了类似的问题，见德扎格文集，I. p. 202，p. 284。

应当引起注意的是，德扎格和帕斯卡的阐述都立即导致了圆锥曲线的方程。

由此我们还可以推出几个问题，例如：

从一已知点出发作一给定圆锥曲线的切线。

作出相交成一个给定角的两条直径。

作出截于一个给定角且具有给定比的两条直径。

从上述内容中还可以得到许多其他问题、定理以及推论，但由于我的经验和能力所限，在有才智的人不辞麻烦地对这个题目进行检验之前，我的疑虑不允许我对其作进一步的研究。以后如果有人认为这个题目值得继续探讨，我将在上帝赋予我的力量范围之内不遗余力地拓广它。

1640 年于巴黎

（高　嵘 译　沈康身 校）

67. 庞斯列:《论图形的射影性质》

第一位把射影几何作为一门新的几何分支来认识、研究的数学家是庞斯列,他领导了19世纪射影几何的复兴。

庞斯列(J.-V. Poncelet,1788～1867)是蒙日(G. Monge)的学生,曾随拿破仑部队远征俄国,战败被俘,在俄国萨拉托夫监狱度过了两年。他在狱中探讨射影几何问题并获得创造性结果。1814年获释回法国后,继续整理、扩展他在狱中的工作,并于1822年发表《论图形的射影性质》(Traité des Propriétés Projectives des Figures, Paris),奠定了射影几何学的基础。庞斯列1834年成为巴黎科学院院士,并担任过巴黎综合工科大学校长(1848～1850)。

《论图形的射影性质》采用中心射影方法,以所谓"连续性原理"为主导,引进了无穷远虚圆点等一系列新概念,证明了许多新定理,同时还给出了配极对应的一般表述,促进了对偶原理的建立。庞斯列是19世纪用综合法建立射影几何的典型代表。稍后于他,A.F.麦比乌斯(1827)、J.普吕克(1828)等运用解析法研究射影几何也取得了巨大进展。

以下摘录《论图形的射影性质》第一章与第三章,转译自 D. E. Smith :A Source Book in Math. pp. 315～323.

这项工作是早在1813年的春天我在俄国监狱中所开始的研究的结果。由于所有的书籍和各种慰藉物都被剥夺了,最重要的是

为我的国家及我个人命运的不幸而感到悲伤，我无法将这些研究做得尽善尽美。然而，我发现了许多基本定理，即图形的中心射影的一般原理，圆锥曲线的特殊原理，曲线的割线和公切线的性质以及内接或外切于曲线的多边形的性质等等①。

引论②

……

让我们考虑任意图形，它位于一般的位置，而且在所有假定的可能位置上具有某种程度的不确定性，只要这些位置不违背存在于图形系统各部分间的法则，条件或关系。给定这些之后，我们假设已得到一个或多个关系或性质，无论这些关系或性质是度量的还是描述的，它们属于依赖于普通的清晰推理的图形，也就是说依赖于我们在特殊例子中视为纯粹严格的步骤。为了保持相同的已知性质，我们着手细微地改变原图形，或者使这个图形的某些部分服从任何一种连续运动，这不是很明显吗？就如当某个量化为零或者改变方向或符号时，只要我们始终注意可能发生的特殊变化，这些变化容易先验地认识而且是通过可信的法则进行，那么对第一个系统所发现的性质和关系对于这一系统的下一阶段仍然适用，这不同样也很明显吗？

至少这是人们没有隐含推理之麻烦就可以断定的结论，在我们的时代它作为一种公理得到普遍承认，其真实性明明白白，无可争辩，不必加以证明。亲眼看看卡诺(M. Carnot)在他的《位置几何》(Geometry of Position)中为建立符号法则所假设的图形的对

---

① 这一段为《论图形的射影性质》第一版(1822)的前言，在第二版(Paris，1865)中被引述。第二版分作两卷，作者称除了结尾插入的注释外，第二版的第一卷与第一版是相同的；第二卷则主要由以前未出版的材料组成。英译本是根据第二版译出。

② 引论的开始是阐述蒙日在几何上的工作，作者写道"蒙日及其学生们的同样的工作，……证明了画法几何——'艺术家和天才的语言'本身就是充分的，并且完全达到了代数分析中的概念的高度。"然而，他认为尽管通过有理几何的原理得到了许多关于线和二次曲面性质的发现，仍然存在需要填补的空白。接着他转入对于他的连续概念的说明。

射原理吧。同样，亲自看一下我们最伟大的几何学家为建立几何学和力学的基础所用的函数原理吧。最后，请目睹一下无穷小微积分，极限理论，方程的一般理论及我们时代中所有其中的概念被赋予了一定程度的一般性的著作。

我们可以将这个被最博学的几何学家视为公理的原则称为数学关系的连续原理或连续法则，这些数学关系中包含抽象的和图示的量。

第 I 章　中心射影的预备概念

1. 在接下来的论述中，我们将几乎毫无例外地在与透视这个词相同的意义下使用射影这个词。于是射影将是锥式的或中心的。

在这类射影中，已知图形的投射面可以是任何曲面，而且图形本身可以任意地位于空间中，但是这个重要的一般化对于下述研究的特殊目的并不起作用，我们将一般地假定已知图形和射影面都是平面。无论何时，我们都必须在更广泛的意义下使用射影这个词，而另一方面，当它的意义依然很严格时，我们将尽量预先特地加以说明，否则我们会使用合适的且精确定义的术语。

现在我们设想从称作射影中心的一个已知点出发，向位于平面上的一个图形的所有点投射一束直线。如果用位于空间中的任意一个平面截这束直线，这个平面上就会出现一个新的图形，它就是第一个图形的射影。

2. 显然，这个射影并没有改变原图形中线的相互关系，次数及顺序，一般而言，也没改变只涉及线的不确定的方向，它们的互交、相切等图形的部分间的任何类型的图示相依性。它只能改变线的形式或特殊的类型，以及一般而言，所有涉及诸如角的开度，常数、参数等绝对量和确定量的相依性。例如，如果在原图形中一条直线垂直于另一条直线，我们不能断定在新平面上的图形的射影中也是如此。

3. 所有这些中心射影的性质，正是从它的本性及最为普遍承认的概念导致了一种纯几何的方法，不必要依靠代数分析去发现

和证明这些性质。于是，要证明一条 m 次线在它的射影中保持相同的次数，只要注意到第一条线不能被在平面中所作的任一条直线截于超过 m 个点就足够了。在另一个平面上必然同样如此，因为一条直线的射影总是一条直线，它必然通过原来线上点的所有对应点。

4. 根据几何中普遍接受的阿波罗尼奥斯的定义，圆锥截线(Conic section)或简称圆锥曲线(conic)是任意平面与底是圆的任一锥体相交所形成的线。因而圆锥曲线只不过是圆的射影，而且根据前面所述，由于圆周不能被平面上所作的任意一条直线截于超过两个点，因而它是二次曲线。

5. 一个其部分只是以上述方式图示相依的图形，也就是说，一个其相依性并不因射影而改变的图形，在下面的论述中被称为射影图形。

在已知图形及其射影中，这些关系本身以及一般地，所有同时保持的关系或性质被称为射影关系或射影性质。

6. 在我们介绍了图形的位置的射影性质或它的图示性质之后，通过简单的说明或对图形的检视，通常就容易辨别这些性质是否属于这种射影性质。这一点直接源自射影性质的特殊本性，因而足以对任何射影建立和证明这些结果，而不管这个射影属于什么样的图形，因为它们一般适于图形本身以及它的所有可能的射影。

7. 对于涉及我们称为度量的大小关系以及它们是否在其所属图形的所有射影中保持不变，当然没有能表达成先验原理的概念。例如，只涉及不定量的圆的割线段间的已知关系并不因此就是一个射影关系，因为我们清楚地知道，对于任何圆锥曲线，即这个圆的射影，它并非保持不变。

另一方面，在已知图形包含特殊种类的线，例如圆周这种情形中，不必因此断定属于它的所有关系在图形的一般射影中都不像以前那样存在，因为如果这些关系不依赖于任何确定的且不变的量，而且如果它们都属于一种类型，显然就会产生相反的结果。

于是，如果一个特殊类型的图形拥有某种度量性质，我们不能

阐明先验的原理,也不能不经过初步的检验就说明这些性质在原图形的各种射影中保持还是改变。然而我们不断认识到预先分辨出这种关系在性质上是否为射影的重要性,因为证明了一个特殊图形的这种关系后,我们随之就能立刻将其扩展到这个图形的所有可能的射影中。

8. 看来对所有的情形建立一个简单的法则并非易事。三角方法和坐标分析由于其繁琐的计算只能导致令人生畏的结果。然而,鉴于其重要性,这个问题值得引起几何学家们的注意。在等待他们用一种方便的方法一般地解决射影关系的这个问题时,让我们致力于一种不太广泛的特殊类型的关系的研究,其特点以简明性著称,这种简明性使所研究的关系的检验和确认变得很容易[①]。

……

第Ⅱ章 关于一个平面图形到另一个平面图形射影的原理

99. 由(5)中所定义的射影性质的本性可知,当我们希望建立关于一个已知图形的某个性质时,只要证明这个性质存在于它的任何一种射影的情形中就足够了。在一个图形所有可能的射影中,可以存在一个可化成最简单的条件的射影,我们提出的证明或研究可以通过它轻而易举地实现。也许只要简单地一瞥或最多只需要几何中某些基本性质的知识就可以理解或了解它。例如,举一个特殊的例子,假设一个图形中包含一条圆锥曲线,可将其视为另一个图形的射影,在这个图形中,用圆周代替圆锥曲线,仅这个陈述就足以将关于圆锥曲线的最一般的问题转化成其他十分基本的问题。

100. 由此,我们认识到射影理论在整个几何研究中的重要性,而且我们也看到了这一理论所展示的思考方式多大程度地简

---

① 接着庞斯列转入对线的调和分割,调和线束的性质,圆锥曲线的相似以及平面图形面积的射影关系的讨论。他的第二章讨论圆锥曲线的割线、理想弦以及它们的性质,包括极点和极线的概念。理想弦是一条线,它与曲线的交点是虚的。

化和促进了这些研究。

正如人们所看到的，对于任意的已知图形，所有这些相当于去发现提供条件的射影，这些条件是最基本的，也最适于通过它们的简单性去揭示我们想要发现的特殊关系。射影理论已经提供了实现这一点的几个方法①，但是缺少它所能提供的更多的方法，我们的真正目标是发现另外这些方法并在前面的工作中所建立起来的思想的帮助下，使它们以一种纯几何的方式为人所知。

101. 首先我们来回忆一些众所周知的原理，它们的证明是最为简单可行的。

任何包含一组有一个公共交点的直线或曲线的平面图形，都可视为另一个相同种类或阶数的图形的射影，在这个图形中交点移到无穷，而对应线变成平行线。

显然为实现这一点，只要取射影平面平行于第一个图形中的交点与另外任意选取的射影中心的连线就足够了。

102. 反之，包含一组平行的或相交于无穷的直线或曲线的平面图形，一般在任一平面上有一个同阶的射影图形，其中对应线交于无穷远点，这个点是第一个图形中点的射影。

当射影平面平行于交点与射影中心的连线时，显然线系平行或相交于无穷，此外，如果我们假设它平行于第一个图形所在的平面，射影就与这个图形相似而且是相似地放置的②。

103. 这些给出这个概念一个几何说明的定理通常采纳了平行线相交于一个无穷远点的思想。我们将把无穷远处的交点和有限距离处的交点作为射影的结果是可彼此交换的看作一个推论。

104. 如果我们正在考虑的交点同时是原图形某些线的切点，

---

① 这里庞斯列可能指以前的一些人的工作，他们在某种程度上使用了射影方法，这些人中有德扎格、帕斯卡和牛顿。

② 庞斯列在这里参考了第二章中的一条，其中他证明了当一个圆锥曲面被两个平面所截时，截得的曲线一般有两个公共点来确定它们的公共割线，并且得到某些度量关系。当平面互相平行，从而相似时，公共弦变成一条“理想弦”，同样的关系依然成立。

根据中心射影的性质，这个点将同样是相同线的切点。因此，当这个点移到无穷，问题中的线就变成无穷远处的切线，它们的对应支线不再仅仅平行，我们通常将这种情况表述成它们是渐近的。

此外，如果原曲线的密切线是一次、二次的等等，它们就是一次、二次……的渐近线。

因此，渐近线以及在某个区域中路线是平行线或渐近线是平行线的线，与同阶线拥有相同的性质，这些线相交或相切于一个已知点，这样它们与前面的线的不同之处仅仅在于它们的交点或切点位于无穷远处。

105. 任意一个包含一条已知直线的图形可以视为另一个图形的射影，在这个图形中对应线变到无穷远处。因此原图形中每组交于第一线上的一个点的直线或曲线在由其导出的射影中变成一组平行线或交于无穷远的线。

显然，要实现这一点，只要取射影平面平行于包含原图形的这条直线以及在不同情况下任取的射影中心的平面就足够了。

106. 反之，任何包含任意组直线或曲线的图形，这些线分别平行或渐近，也就是说，每组线相交于无穷，一般在任一平面上有射影，第一个图形中无穷处的交点在这个图形中在已知的有限距离处位于同一条线上。

107. 这些完全从中心射影的基本原理推出的后来的想法，对于我们已经提到的抽象体系的概念给出了一个解释：

可以理想地将一个平面上位于无穷的所有点视为分布于一条直线上，这条线本身位于这个平面的无穷远处。

通过前面的论述我们看到所有这些点在射影中由一条直线上的点表示，这条直线一般位于一个已知的有限距离处。

当这个矛盾的概念用于平面上的一个已知图形而且我们假设这个图形在其他任一个平面上有射影时，这个概念就拥有了确切而自然的含义。无穷远线的方向缺乏确定性明白地变成在这条线变得平行于已知图形所在的平面时，投射这条线的平面所存在的确定性的缺乏。但是我们也看到除了因为我们坚持在心理上给出

一个当平面平行时其公共交线的真实存在之外，这种确定性的缺乏并没有地位。而且，当这条线在有穷远处并在不同的方向上不再以一种绝对的、几何的方式存在时，除了在给出这条线的法则或原作图中外，并不真的缺乏确定性。

108. 在前面的所有定理中并没有确定空间中射影中心的位置。这完全是任意的，对于任意一个已知点，总可以满足一个或另一个所规定的条件。但这不是下述定理中的情况。除了射影中心的一系列特殊位置外，不会发生上述情况，而且由于证明很困难，并且它还不为几何学家们所知，现在我们适时地暂停于此，投入对它的研究。

109. 任何包含一条已知线和一条圆锥曲线的平面图形都可以一般地视为另一个图形的射影，在这个图形中这条线整个移到无穷处，圆锥曲线变成圆周。

为了用一种不带丝毫几何观点的方法证明这一原理，让我们假设需要解决下列问题：

110. 已知一条圆锥曲线(C)和一条直线 MN 位于任一个平面上，求一个射影中心及一个射影平面，使得已知线 MN 在这个平面上投射到无穷，同时圆锥曲线将变成圆周。

设 S 是这个未知的射影中心。根据问题的条件，过这一点及直线 MN 的平面应当平行于射影平面而且后面这条线应截以(C)为底，S 为顶点的圆锥曲面于一个圆。首先，由此可得直线 MN 完全在圆锥曲线(C)的外部，也就是说，它是曲线的理想割线。

其次，如果确定了对应于这条线和圆锥曲线(C)的理想弦 MN，当我们连结它的中点 O 和射影中心 S 得线 SO 时，这条线应等于理想弦的一半 OM，并且与它构成一个直角 MOS。也就是说：

辅助射影中心应位于一个圆周上，这个圆以对应于已知线的理想弦的中点为圆心，半径等于这条弦的一半[①]，且在一个垂直于

① 用代数的说法就变成，半径的平方等于由对应线在圆锥曲线内截得的弦的一半的平方，但取相反的符号，因此这条半径可以是实的或虚的。

它的平面上。

由于不必满足其他条件，我们可以断定存在无穷多个满足问题条件的射影中心和射影平面。但要使这一点成立，必须有 MN 与曲线不相交，否则距离 OS 或 OM 就变成虚的了。

……①

140. 看来进一步发展这些思想已无必要，因为这个工作过程的目的是将前面的概念应用于圆锥曲线射影性质的研究，它将作为对这些概念可能有的模糊或困难因素的一种自然的解释。此外，人们还会看到简明性，通过它这些概念导致了许多已为人们所知的性质以及许多普通几何似乎不易触及的其他性质。要做到这一点不用任何辅助作图，只用最简单的定理，即那些只涉及基本图形中线的方向和长度的定理，对于其中的大部分只要瞥一眼就会看到并辨别出它们。同时，我常常因为可以引用这些定理而不必被迫证明它们而感到满足，因为它们是自明的或是已知定理的最简单的推论。

（高　嵘译　沈康身校）

① 这里给出许多定理，证明怎样将各种类型的图形看作一些图形的射影。

68. 格拉斯曼:《扩张论》

1844 年,德国数学家格拉斯曼发表《线性扩张论》(Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig),这是由寻常欧几里得空间向 n 维空间推广的第一个决定性贡献。

格拉斯曼(Hermann Günther Grassmann, 1809～1877)生于斯德丁(Stettin,今波兰什切青),曾在柏林大学攻读神学,毕业后长期在家乡中学任教,业余从事科学研究,成为梵文权威和数学家。《线性扩张论》是格拉斯曼的主要数学成果,他在这部著作中建立了所谓"扩张的量"(extensive Grösse,即有 n 个分量的超复数)的概念及其运算法则,其中蕴含了非交换乘法和 n 维空间的重要思想,并形成张量理论的初步基础。格拉斯曼的工作走在了时代之前,其系统极具一般性,但因内容过于抽象和偏离传统而难为时人理解。后来格拉斯曼改写此书,扩充了三分之一的内容,并更名《扩张论》(Die Ausdehnungslehre, Berlin, 1862),逐渐引起重视。以下选录 1862 年版《扩张论》中关于非交换乘法和涉及几何的段落,转译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. pp 684～696.

1. 如果

$$a=\beta b+\gamma c+\cdots$$

其中 $\beta,\gamma\cdots$ 是实数,可以是有理数或无理数,也可以等于零,那么我们说量 a 通过数 $\beta,\gamma,\cdots$ 从量 $b,c,\cdots$ 导出。在这种情况中我们也说 a 从 $b,c,\cdots$ 数字地导出。

2. 进而,如果两个或更多个量 $a,b,c,\cdots$ 中的某一个量能从其

他量数字地导出，例如：

$$a=\beta b+\gamma c+\cdots$$

其中 $\beta,\gamma,\cdots$ 是实数，我们就说这些量数字相关。

3. 若另外一组量可以从一个量数字地导出，则这个量称为一个单位，特别地，一个不能从任何其他单位数字地导出的单位称为原始单位。数的单位称为绝对单位，所有其他的单位称为相对单位。零永远不能视为一个单位。

5. 扩张量是通过数从一组单位[①]（这组单位不应只包含绝对单位）导出的任何表达式。所用的数称为导出系数。例如多项式

$$\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots \text{或} \sum \alpha e \text{或} \sum \alpha_r e_r$$

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 是实数且 $e_1,e_2,\cdots$ 是一组单位时是一个扩张量。只有当这组单位只含有绝对单位时，导出量才不是一个扩张量，而是一个数量……

6. 要将从同一组单位导出的两个扩张量相加，我们将对应单位的导出系数相加：

$$\sum \alpha_r e_r+\sum \beta_r e_r=\sum(\alpha_r+\beta_r)e_r$$

……[②]

9. 所有代数加法和减法定律对扩张量都有效……

10. 一个扩张量乘以一个数，是将该扩张量的每一个导出系数乘以这个数：

$$\sum \alpha_i e_i\cdot\beta=\beta\cdot\sum \alpha_i e_i=\sum(\alpha_i\beta)e_i$$

……[③]

13. 所有代数乘法和除法的定律对于扩张量乘以或除以一个数都有效。

37. 两个扩张量 a 和 b 的积 $[ab]$ 定义成用下列方式所得的一

---

① 一组单位不数字相关，即数字无关（见原文 4）。

② 这里接着有一个类似的减法定义（见原文 7）。

③ 这里接着有一个类似的除以一个数的定义（见原文 11）。

个扩张量(或一个数量):将导出第一个扩张量 a 的每一个单位乘以导出第二个扩张量 b 的每一个单位,使得第一个量的单位总是积的第一个因子,而第二个量的单位是积的第二个因子,然后将每一个这样的积乘以对应的导出系数的积并将如此得到的所有的积相加:

$$[\sum \alpha_r e_r \sum \beta_s e_s] = \sum \alpha_r \beta_s [e_r e_s] \cdots$$

注记。因为根据上述定义,扩张量的积或者是一个扩张量,或者是一个数量,所以我们定然能从一组单位数字地导出它(见5)。定义中并没有说明这组单位是什么样的以及我们怎样才能从它数字地导出积 $e_r e_s$。因此,如果我们要确切地确定一个特殊的积的概念,就必须规定某些必要的法则……,例如,考虑积 $P=[(x_1e_1+x_2e_2)(y_1e_1+y_2e_2)]=x_1y_1[e_1e_1]+x_1y_2[e_1e_2]+x_2y_1[e_2e_1]+x_2y_2[e_2e_2]\cdots$ 我们可以规定 $[e_1e_1]$,$[e_1e_2]$,$[e_2e_1]$,$[e_2e_2]$ 这四个积构成了一组单位,P 可从它数字地导出,从而数 x_1y_1,x_1y_2,x_2y_1 和 x_2y_2 是导出系数。于是我们就可以得到一个特殊的积,其特点是不必由方程来确定它。另一方面,我们可以选取其中的三个,$[e_1e_1]$,$[e_1e_2]$ 和 $[e_2e_2]$ 作为单位并规定 $[e_2e_1]=[e_1e_2]$,于是 P 的导出系数就是:x_1y_1,$(x_1y_2+x_2y_1)$ 和 x_2y_2,这种积的特点是支配它的定律与代数乘法的定律相同。我们也可以取 $[e_1e_2]$ 为单位并规定 $[e_1e_1]=0$,$[e_2e_1]=-[e_1e_2]$,$[e_2e_2]=0$,在这种情形中,积 P 就只有一个导出系数,即 $x_1y_2-x_2y_1$。这种积以后称为组合积。最后,我们可以选取一组单位,约定不包含积 $[e_1e_1]$,$[e_1e_2]$,$[e_2e_1]$,$[e_2e_2]$ 中的任何一项,然后确定怎样从这组单位中导出这四个积。例如,我们可以将绝对单位取作这组单位并规定 $[e_1e_1]=1$,$[e_1e_2]=0$,$[e_2e_1]=0$,$[e_2e_2]=1$。在这样的条件下,P 变成一个数量,即 $P=x_1y_1+x_2y_2$。这样的积以后称为内积。

50. 对于每一种乘法,如果我们以从单位数字地导出的量代

换这些单位后，确定方程[①] 依然成立，则这样的乘法称为线性乘法。

51. 除了没有确定方程的乘法和对于它所有的积都是零的乘法外，只存在两种线性乘法：其中一种的确定方程是

(1) $$[e_r e_s]+[e_s e_r]=0$$

另一种的确定方程是

(2) $$[e_r e_s]=[e_s e_r]\cdots$$

52. 组合积定义为一个其因子是从一组单位导出的积，规定对任意两个单位积，若从其中之一交换最后两个因子可得另一个，则其和等于零，而每个只包含不同单位的积不等于零。这个积的因子称为简单因子。如果 b 和 c 是单位，A 是任意一组单位，那么上述条件可用下列形式表示：

$$[Abc]+[Acb]=0$$

53. 在每个组合积中，我们都可以通过改变积的符号交换后两个因子，或者在 A 是任意一组因子，b 和 c 是简单因子的情形中，$[Abc]+[Acb]=0$。

证明 1. 假设 b 和 c 是单位。由于 A 是任意一组因子且这些因子可从单位数字地导出，经过代换后我们得到 A 的一个表达式，形式是：$A=\sum\alpha_r E_r$，其中 E_r 是单位的乘积。于是我们得到

$$\begin{aligned}[Abc]+[Acb]&=[\sum\alpha_r E_r bc]+[\sum\alpha_r E_r cb]\\&=\sum\alpha_r[E_r bc]+\sum\alpha_r[E_r cb]\\&=\sum\alpha_r([E_r bc]+[E_r cb])\\&=\sum\alpha_r 0 \qquad (52)\\&=0\end{aligned}$$

2. 假设 b 和 c 从单位 $e_1,e_2,\cdots$ 数字地导出，例如，$b=\sum\beta_r e_r$，$c=\sum\gamma_s e_s$，于是我们有：

$$[Abc]+[Acb]=[A\sum\beta_r e_r\sum\gamma_s e_s]+[A\sum\gamma_s e_s\sum\beta_r e_r]$$

① 单位的积之间的一个数字关系(见原文 48)。

$$= \sum \beta_r \gamma_s [Ae_r e_s] + \sum \gamma_s \beta_r [Ae_s e_r]$$

$$= \sum \beta_r \gamma_s ([Ae_r e_s] + [Ae_s e_r])$$

$$= \sum \beta_r \gamma_s 0 \qquad \text{(证明 1)}$$

$$= 0$$

55. 组合积的任何两个因子都可以通过改变积的符号互换：

$$P_{a,b} = -P_{b,a} \quad \text{或} \quad P_{a,b} + P_{b,a} = 0$$

……

60. 如果组合积的两个简单因子相等，则组合积等于零。

$$P_{a,a} = 0$$

证明 根据 55 我们有：$P_{a,b} + P_{b,a} = 0$，因此如果我们取 $a = b$，

$$P_{a,a} + P_{a,a} = 0 \quad \text{或} \quad 2P_{a,a} = 0$$

于是

$$P_{a,a} = 0$$

61. 一个组合积等于零，如果它的简单因子数字相关，即 $[a_1 a_2 a_3 \cdots a_m] = 0$，或者说量 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中的某一个能从其他量数字地导出，例如，

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_m a_m$$

证明 如果在积中我们以上述表达式代换 a_1，就得到

$$[a_1 a_2 a_3 \cdots a_m] = [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_m a_m) a_2 a_3 \cdots a_m]$$

$$= \alpha_2 [a_2 a_2 a_3 \cdots a_m] + \alpha_3 [a_3 a_2 a_3 \cdots a_m] + \cdots + \alpha_m [a_m a_2 a_3 \cdots a_m]$$

$$= \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots + \alpha_m \cdot 0$$

$$= 0$$

63. 为了得到 n 个简单因子的一个组合积，这 n 个因子是从 n 个量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 数字地导出的，我们建立导出系数的行列式，其中第一个因子的系数排在第一行，等等，我们用这个行列式乘以量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的组合积：

$$[(\alpha_1^{(1)} a_1 + \cdots + \alpha_n^{(1)} a_n)(\alpha_1^{(2)} a_1 + \cdots + \alpha_n^{(2)} a_n) \cdots (\alpha_1^{(n)} a_1 + \cdots + \alpha_n^{(n)} a_n)]$$

$$= \sum{}_{+} \alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(2)} \cdots \alpha_n^{(n)} [a_1 a_2 \cdots a_n]$$①……

68. 如果我们将 n 个原始单位换成从这些单位数字地导出的任意一组量，假设这 n 个量数字无关，那么组合积的所有定律都有效。

74. 一组量的乘法组合定义为不重复这些量的组合，每个组合是一个组合积，组合积的因子是组合的元素，例如，三个量 a，b，c 的二阶乘法组合是：$[ab]$，$[ac]$和$[bc]$。

77. 原始单位的 m 阶乘法组合称为 m 阶单位。一个由 m 阶单位数字地导出的量称为 m 阶量。如果一个量可以表示成一阶量的组合积，就称这个量为简单的，否则称其为复合量。所有能够从一个简单量的简单因子数字地导出的量的集合称为这个量的域。

77b……注记。作为复合量的一个例子，我们来考虑和$(ab)+(cd)$，其中 a，b，c，d 是数字无关的量。假设$(ab)+(cd)$是一个简单量，例如等于$(p\cdot q)$，我们应得到$[(ab+cd)(ab+cd)]=[pqpq]=0$。但因为$[abab]$和$[cdcd]$等于零，所以$[(ab+cd)(ab+cd)]=[abcd]+[cdab]$。然而$[abcd]=[cdab]$，因此$[(ab+cd)\cdot(ab+cd)]=2\cdot[abcd]$。如果$(ab)+(cd)$是一个简单量，$[abcd]$将等于零，因而 a，b，c，d 就是数字相关的，这与假设矛盾。

78. 将两个高阶单位的外积定义成那些量的简单因子的组合积，而这些因子的排列保持不变：

$$[(e_1 e_2 \cdots e_m)(e_{m+1} \cdots e_n)] = [e_1 e_2 \cdots e_n]$$

注——外乘这个名称用于强调当且仅当一个因子完全在另一个因子的域外时，这个积才成立的事实。

79. 为了得到两个量 A 和 B 的外积，我们建立第一个量的简单因子与第二个量的简单因子的组合积：

---

① 格拉斯曼用符号 $\sum{}_{+} \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \cdots \alpha_n^{(n)}$ 表示行列式 $\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \cdots \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \cdots \alpha_n^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} \cdots \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}$

$$[(ab\cdots).(cd\cdots)]=[ab\cdots cd\cdots]$$

80. 圆括号不影响外积：

$$[A(BC)]=[ABC]\cdots$$

83. 已知简单量 S 与数字无关的 m 个一阶量 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的和。如果 S 与 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中每一个量的外积都等于零，则 S 可表示成一个以 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为因子的外积，即

如果

$$0=[a_1S]=[a_2S]=\cdots=[a_mS]$$

则

$$S=[a_1,a_2\cdots a_mS_m]$$

86. 主域是导出所考虑的量的原始单位的域……

89. 我们来考虑一个 n 阶主域并假设原始单位的积等于 1。如果 E 是一个任意阶的单位(即原始单位中的一个或一些原始单位之积)，将 E 的余量定义为等于不在 E 中的所有单位的组合积 E' 的量。根据$[EE']$等于$+1$ 或-1，余量是正的或负的。我们用已知量前面加一条竖线来表示余量。一个数的余量就是这个数本身。于是我们有：如果 E 和 E'包含所有的单位 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 且$[e_1e_1\cdots e_n]=1$，则$|E=[EE']E'$；当 α 是一个数时，$|\alpha=\alpha$。

90. 在任意量 A 的表达式中，将余量换到单位处就得到 A 的余量$|A$，即

$$|(\alpha_1E_1+\alpha_2E_2+\cdots)=\alpha_1|E_1+\alpha_2|E_2+\cdots$$

其中 $E_1,E_2,\cdots$是任意阶的单位。

91. 一个单位与它的余量的外积等于 1：

$$[E|E]=1$$

证明 若 E'是不包含在 E 中的所有原始单位的组合积，则我们有(根据 89)：

根据$[EE']=\mp1$，有$|E=\mp E'$

在取下方符号的情形中我们有：$[E|E]=[EE']=1$，在取上方符号的情形中有：$[E|E]=-[EE']=-(-1)=1$。

92. 量 A 的余量的余量根据 A 的阶与它的余量的阶之积是

偶数还是奇数而等于 A 或 $-A$，即若 q 和 r 分别是 A 和 $|A$ 的阶，则

$$||A=(-1)^{qr}A$$

注—— 如果 r 和 q 都是奇数，例如，在一个二阶域和一阶量的余量的情形中，我们有 $||A=-A$，于是在这种情形中符号 $|$ 与 $i=\sqrt{-1}$ 遵循相同的定律，后者对实域中的虚数给出一种解释……

93. 如果主域是 n 阶的且 n 是奇数，我们有

$$||A=A$$

如果 n 是偶数，则

$$||A=(-1)^{q}A$$

其中 q 是 A 的阶。

94. 如果两个单位的阶之和等于或小于 n，——即等于或小于主域的阶，——则这两个单位的外积称为累进积，假设原始单位的累进积等于1。另一方面，如果两个单位的阶之和大于 n，这两个单位的回归积由一个量给出，这个量的余量等于这两个单位的余量的累进积。我们将回归积和累进积统称为相关积……

97. 两个量的余量之积等于这两个量的积的余量：

$$[|A|B]=|[AB]\cdots$$

……如果两个量的积是累进的，它们的余量之积就是回归的，假如我们规定将零阶的积同时视为累进积和回归积……

122. 三个量的混合积[1] $[ABC]$ 等于零，当且仅当 $[AB]=0$，或三个量 A,B,C 都包含在一个小于 n 阶的域中，或者 A,B,C 有一个公共的大于零阶的域……

137. 两个任意阶单位的内积定义为第一个单位与第二个单位的余量的相关积，即，如果 E 和 F 是任意阶的单位，则内积由 $[E|F]$ 给出。

138. 两个量 A 和 B 的内积等于第一个量与第二个量的余量的相关积，即 $[A|B]$……

---

① 也就是累进乘法和回归乘法都用到的积。

139. 如果一个内积的两个因子是 α 阶和 β 阶的，主域是 n 阶的，则根据 β 大于 α 或小于等于 α，这个内积是 $n+\alpha-\beta$ 或 $\alpha-\beta$ 阶的……

141. 两个同阶量的内积是一个数。

证明 由于阶的差是零，所以内积是零阶的，——即是一个数。

142. 两个相等单位的内积是 1，两个同阶的不同单位的内积是零，即

$$[E_r|E_r]=1,[E_r|E_s]=0\cdots$$

143. 如果 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 是任意的同阶单位，则我们有：

$$[(\alpha_1E_1+\alpha_2E_2+\cdots+\alpha_mE_m)|(\beta_1E_1+\cdots+\beta_mE_m)]$$
$$=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_m\beta_m\cdots$$

144. 假设内积的两个因子同阶，则这两个因子可以互换，即

$$[A|B]=[B|A]$$

证明 如果 $E_1,\cdots,E_m$ 是单位，且 $A=\sum\alpha_rE_r,B=\sum\beta_sE_s$，由 143，我们得，

$$[A|B]=\sum\alpha_r\beta_r=\sum\beta_r\alpha_r=[B|A]$$

145. 为简单起见，我们记

$$[A|A]=A^2$$

我们称它为 A 的内平方……

147. 两个单位 E 和 F 的内积不等于零，当且仅当其中一个单位与另一个单位关联① ……

148. 如果 E 和 F 是单位且 $[EF]\neq0$，则我们有

$$[EF|E]=F\text{ 及}[F|EF]=|E\cdots$$

151. 量 A 的数值定义成这个量内平方的正平方根。如果两个量的数值，——即它们的内平方相等，就称这两个量数值地相等。

152. 如果两个不为零的量的内积是零，就称这两个量是正交

① 称一个量与另一个量关联，如果其主域是关联的，即第一个量的域中的所有的量也是第二个量的域中的量，但反之不然。

的……

153. n 个彼此正交的数值相等的一阶量称为一个 n 阶正交系;对于域也是 n 阶的情况,我们称作一个完全正交系。所给量的数值称为正交系的数值。每个具有数值 1 的正交系都称为简单的……

157. 正交系中的量数字无关且每个一阶量都可从任意的完全正交系数字地导出……

162. 原始单位系是一个完全正交系,其数值是 1。

证明 若 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是原始单位,我们有

$$1 = e_1^2 = e_2^2 = \cdots = e_n^2$$

$$0 = [e_1 | e_2] = \cdots$$

163. 在每个 m 阶的域中我们都可以建立一个具有一个任意数值的 m 阶正交系,使得这个正交系是完全正交系的一部分……

168. 如果我们用任意一个数值为 1 的完全正交系代换原始单位系,前面的所有定理[①] 依然成立。

175. 给定两个 m 阶的量 A 和 B,每一个都由 m 个简单因子组成,于是这两个量的内积等于一个 m 行 m 列的行列式,这个行列式通过一个量的每个简单因子与另一个量的每个简单因子作内积而得到,即

$$[abc\cdots | a'b'c'\cdots] = \text{行列式} \begin{vmatrix} [a|a'], & [a|b'], & [a|c'], & \cdots \\ [b|a'], & [b|b'], & [b|c'], & \cdots \\ [c|a'], & [c|b'], & [c|c'], & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

……

216. 给定点 E,我们取三条长度相等且互相垂直的线为主单位。若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是任意的数,则表达式:

(a) $$E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

通过下列方式定义了点 A:我们从点 E 出发作等于 $\alpha_1 e_1$ 的线段

① 与内积有关的定理。

EB，即根据 α_1 是正的或负的，EB 与 e_1 的方向相同或相反，且 EB 的距离与 e_1 之比等于 α_1 与 1 之比。然后与上面同理我们从 B 出发作等于 $\alpha_2 e_2$ 的线段 BC，最后用同样的方法从 C 出发作等于 $\alpha_3 e_3$ 的线段 CA。而且表达式

(b) $$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

定义了一条线段，也就是一条给定长度和方向的直线，即一条与连结点 E 和点

$$E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

的线有相同的长度和方向的特殊的线段……

229. 空间中的每条线段都可从不平行于一个平面的三条任意的线段数字地导出……

231. 如果三条线段数字相关，则它们平行于一个平面……

232. 空间中的所有点都可从不在同一平面的任意四个点数字地导出……

234. 一条直线上的每个点都可从这条直线上的任意两个点数字地导出……

235. 若三个点数字相关，则它们位于一条直线上……

236. 若四个点数字相关，则它们位于一个平面上……

237. 在空间中，一阶域是一个点，二阶域是无限的直线，三阶域是无限的平面，四阶域是无限的空间。

245. 两个点的组合积为零，当且仅当这两个点重合；三个点的组合积为零，如果这三个点位于一条直线上；四个点的组合积为零，如果这四点位于一个平面上；五个点的组合积恒为零……

249. 积[AB]称为一条线段，我们说其为无穷直线 AB 的一部分，而且与线段 AB 有相同的长度和方向……

273. 两条相交直线上的两条有穷线段之和是一条线段，它所在的直线穿过所给两条直线的交点；这条线段的方向和长度与一个平行四边形的对角线的方向和长度相同，这个平行四边形由与开始的两条线段同长度同方向的线段构成……

288. 平面乘法定义为关于平面的相关乘法；立体乘法定义为

关于空间(作为四阶域)的相关乘法……

306[①]. 与点 a 和 b 位于一条直线的点 x 的方程由

$$[xab]=0$$

给出。

证明 $[xab]$为零(根据 245)当且仅当 x 与 a 及 b 位于一条直线上……

307. 与直线 A 和 B 过同一点的直线 X 的方程由

$$[XAB]=0$$

给出……

309. 若 $P_{n,x}$是一个零阶的平面乘积,其中点 x 含有 n 次,其他因子只是固定的点或线,则方程:

$$P_{n,x}=0$$

是一条 n 阶代数曲线的点方程,假如它不被每一个点 x 满足……

310. 若 $P(n,X)$是一个零阶的平面乘积,其中线 X 含有 n 次,而其他因子只是固定的点或线,则方程

$$P\ (n,X)=0$$

是一条 n 阶代数曲线的线方程……,

311. 若 $P_{n,x}$是零阶的立体乘积,它含有点 x n 次,而其他因子只有固定的点,线或面,则方程

$$P_{n,x}=0$$

是一个 n 阶代数曲面的点方程……

323. 通过五个点 a,b,c,d,e(其中没有三个点位于一条直线上)的圆锥曲线的方程由

$$[xaBc_1 \cdot Dex]=0$$

给出,其中 $B=[cd]$,$c_1=[ab \cdot de]$,$D=[bc]$…

324. 如果 A,B,C 是空间中的三条直线,其中每两条线都不相交,则

$$[xABCx]=0$$

① 以下格拉斯曼用小写字母表示点,用大写字母表示线。

是包含三条直线 A,B,C 的二阶曲面的方程……

330. 为了作内乘法，我们通常应假设三条长度相等且互相垂直的线段($e_1e_2e_3$)为主单位，在平面中这样的线段是(e_1e_2)，而且我们假设这些线段的长度为长度单位，$[e_1e_2e_3]$是体积的单位，$[e_1e_2]$是面积的单位。

331. 对于平面[1]，长度的概念与数值的概念是一致的，正交意味着垂直……

(高　嵘译　沈永欢校)

[1] 对于空间同样如此(见原文 333)。

微分几何、非欧几何与拓扑学起源

69. 蒙日:《分析应用于几何的活页论文》

微分几何是微积分应用于几何的产物,并从一开始就与解析几何的发展交织在一起。虽然早先已有部分结果,但微分几何成为独立的学科主要应归功于18世纪欧拉、克莱洛(A.-C. Clairaut)和蒙日等人的贡献,其中蒙日自1771年起发表的一系列工作,使18世纪微分几何的发展臻于高峰。

蒙日(Gaspard Monge,1746～1818)出身贫寒,早年执教于梅济埃尔军事学院,法国大革命时期成为法国数学界的领导人物。1794年协助创建著名的巴黎综合工科大学并出任校长,直到波旁王朝复辟时被解职,不久去世。他在工科大学的微分几何讲义《分析应用于几何的活页论文》(Feuilles d'analyse appliquée *à* la géometrie, Paris,1795),是历史上第一本微分几何教科书;他的另一部名作《画法几何学》(Géométrie descriptive,1799),则开创了一门新的数学分支——画法几何学。

《分析应用于几何的活页论文》一书,包括了曲面曲率、可展曲面、极小曲面以及各种曲面簇等问题的系统结果,其特点是与微分方程紧密结合,曲线、曲面的各种性质用微分方程表示。以下节译该书第XV章("曲面的两个曲率")的主要内容。

I

…如果我们用 x,y,z 来表示曲面上任意一点的座标，用 x'，y'，z' 表示一个球面上点的座标，那么以曲面上的点为中心、半径为 R 的球面方程为：

$$\text{(A)} \qquad (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=R^2$$

我们已经看到[①]，若在该方程中将 x'，y'，z' 看作常数，分别将 x,y 看作单个变量而对方程进行微分，所得两个关于 x'，y'，z' 的方程

$$\text{(B)} \qquad x-x'+(z-z')p=0$$

$$\text{(C)} \qquad y-y'+(z-z')q=0$$ [②]

就是曲面的通过被考虑点的两个法平面的方程。它们中一个垂直于 xz 平面，另一个垂直于 yz—平面。这两个方程也是曲面的通过其上同一点的法线的两个投影方程。在这两个方程中，x'，y'，z' 是法线的变量，属于法线穿过曲面的那一点的五个量 x,y,z,p,q 对于同一条法线来说是常数，而当我们从一条法线转移到另一条法线时，它们的数值将随之变化。

如果我们从曲面上所考虑的最初一点沿一定方向转移到相距无限小的另一点，上述五个量 x,y,z,p,q 将分别以它们的微分 dx,dy,dz,dp,dq 为增量，并且这五个微分之间存在下列三个方程：

$$dr=pdx+qdy,dp=rdx+sdy,dq=sdx+tdy$$ [③]

量 $\frac{dy}{dx}$ 的值将决定 x,y 平面上沿从第一点到第二点转移方向的

---

① 蒙日在第 I 章中已讨论过曲面 $f(x,y,z)=0$ 的切平面与法线。

② 蒙日在前面已引进了现今通用的缩写记号 $p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}$，但他当时写成 $p=\frac{dz}{dx},q=\frac{dz}{dy}$。偏导数符号 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 等到 19 世纪 40 年代才由雅可比在其行列式理论中正式创用并逐渐普及，虽然早先拉格朗日已建议过这一符号(1786)。

③ 蒙日在前面已引进了作为二阶偏导数的符号 r,s,t。

投影。

然后我们设想曲面的通过第二点的新法线，如果该法线与第一条法线在同一平面上从而相交于一点，那么交点将是第一条法线上的这样一点，它的三个座标 x', y', z' 不随 x 和 y 的变化而变化。因此我们若把 x', y', z' 看作常数并对方程(B)和(C)微分，就得到

$$dx+p^2dx+pqdy+(z-z')(rdx+sdy)=0$$
$$dy+pqdx+q^2dy+(z-z')(sdx+tdy)=0$$

分别消去$\frac{dy}{dx}$和$(z-z')$，我们就得到两个等价的方程：

(D) $(z-z')^2(rt-s^2)+(z-z')[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]+1+p^2+q^2=0$

(E) $\frac{dy^2}{dx^2}[(1+q^2)s-pqt]+\frac{dy}{dx}[(1+q^2)r-(1+p^2)t]-(1+p^2)s+pqr=0$

这四个方程(B)，(C)，(D)，(E)可看作前后两条法线交点的方程，但前三个方程已足以确定该交点的三个座标 x', y', z'。因此，不包含这三个座标的第四个方程就形成一个必须满足的条件，通过求$\frac{dy}{dx}$的值来确定我们从曲面的第一点转移到第二点时必循的方向，以保证新法线与原来的法线位于同一平面从而具有公共的交点。

……

II

因为方程(E)是关于$\frac{dy}{dx}$的二阶代数方程，它给出了该量的两个数值，因此当作出曲面上任一点的法线后，从该点出发，我们总可以在曲面上沿两个方向转移到距离为无限小的另外一点，其法线与原来的法线位于同一平面。一般说来，这两个方向是使上述结果能够出现的仅有的两个方向。因此除了$\frac{dy}{dx}$取任何值都能使方程(E)满足这种非常特殊的情形外，如果我们沿其它方向转移到第

二点，新法线与原来的法线将不在同一平面上，从而没有公共的交点。

所讨论的两个方向有一个非常值得注意的性质，即它们互成直角。事实上，无论我们考虑的是什么样的曲面和曲面上哪一点，我们总可以假设这样来选取起初位置任意的三个直角投影平面，使得曲面在这一点的切平面与 xy－平面平行。在这一假设下，p，q 这两个量都等于零，方程(E)变为

$$\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0$$

现若用 m 和 m' 表示该方程所给出的两个 $\frac{dy}{dx}$ 值，则我们将有

$$mm'+1=0$$

因此这两个方向在 xy－平面上的投影互成直角，但由于这两个方向本身是在切平面上，因此它们将与自己的投影平行，从而自身也互成直角。

III

方程(D)关于 $z-z'$ 也是二次代数方程，显然三个方程(B)，(C)，(D)对 x'，y'，z' 中的每一个都给出两个值，这两个值将分别对应于原来的法线与另外两条跟它同平面的法线的两个交点。

让我们来仔细研究这两个交点，并从第一个开始。如果我们设想有一个以该交点为中心的球，球面通过曲面上所考虑的一点，那么曲面在球心相交的两条法线也是此球面的法线。这样曲面与球面就有两条相邻的公共法线，从而也就有两个相邻的公共切平面；于是它们在通过这两条法线的平面方向具有相同的曲率。这就是说，在相应的 $\frac{dy}{dx}$ 值所确定的方向上，曲率中心恰好是这两条法线的交点，因此也就是球心本身。

……[1]

因此每个曲面在它的每一点都有两个曲率，它们的方向是在两个相互垂直的法平面上，而曲率中心则在同一条法线上。

设三个量 x,y,z 是曲面上点的座标，另外三个量 x',y',z' 是曲率中心的座标，那么显然这两点之间的距离，即曲率半径的值，正是方程(A)中的量 R。因此，如果在四个方程(A)，(B)，(C)，(D)之间消去 $x-x',y-y',z-z'$ 这三个量，我们就得到一个二次方程，它将给出 R 的以 p,q,r,s,t 表示的两个值，也就是两个曲率半径的值。

如果我们采用简写

$$g=rt-s^2$$
$$h=(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t$$
$$k^2=1+p^2+q^2$$

那么消元结果就得到

$$gR^2+hkR+k^2=0$$

由此可推出两个曲率半径的表达式为

$$\text{(F)}\qquad R=\frac{k}{2g}\left[-h+\sqrt{h^2-4k^2g}\right]=\frac{-2k^3}{h+\sqrt{h^2-4k^2g}}$$

Ⅳ

因为曲面的每一条法线都与另外两条无限接近的法线相交，这两条法线位于两个相互垂直的法平面上，那么让我们设想从曲面上第一点的法线转移到与它相交并无限接近的两条法线中的一条；然后又从这第二条法线按同样意义转移到与它相交的另一条法线；再从这第三条法线按同样意义转移到与它相交的另一条法线，如此在整个曲面范围进行下去。显然我们将得到一个可展曲面，它处处都与原来的曲面垂直并相交成一条曲线，该曲线的元素

① 蒙日接着以同样的方法求出与$\frac{dy}{dx}$的另一个值相应的第二个球。

将与曲面的一个曲率保持相同的方向，这条曲线就叫第一曲率线。对曲面上其他所有的点采取同样的做法，我们将得到由所有的第一曲率线组成的曲线族，该曲线族将把曲面分成许多宽度不等的带。

……①

这两族曲线将把曲面分成许多可看作是相互垂直的元素。(例如在一个回转曲面上我们将得到子午线与平行圆)。

我们已经看到：方程(E)表示$\frac{dy}{dx}$与五个量 p,q,r,s,t 之间的关系，使得两条相邻的法线保证相交；因此它就是曲率线在 xy 平面上的投影方程。这样如果我们将已知的曲线方程微分二次，得到以 x,y 表示的 p,q,r,s,t 的值，并把这些值代入方程(E)，那么我们将得到一个关于 $x,y,\frac{dy}{dx}$的常微分方程，也就是曲率线方程。但这个方程是关于$\frac{dy}{dx}$的二次方程，因此如果我们已积出这个方程，并用一个以 A 表示的任意常数来完成积分，那么这个常数将是一个二次常数，而方程的积分将具有一般形式

$$A^2+Ag(x,y)+f(x,y)=0$$

其中 g,f 是由积分给出的两个函数。

……

如果在曲率线方程(E)中，我们用根据 $dp=rdx+sdy$ 和 $dq=sdx+tdy$ 确定的值来代替 r,t，这时量 s 将消失，再借助关系 $dz=pdx+qdy$，该方程将变为

$$\text{(E)}\qquad dp(dy+qdz)=dq(dx+pdz)$$

我们将看到这是它的常用形式。

① 蒙日接着用同样的方法定义了第二曲率线，并证明每一条第二曲率线都垂直于所有的第一曲率线。

……[1]

如果我们在由两个曲率中心之一形成的第一叶曲面上考虑一条脊线(edge of regression)，该叶曲面可看作是脊线的轨迹，那么这条脊线是其上任意两点间在曲面上所能画出的最短联线。实际上，这条脊线的密切面，即通过两相邻切线的平面，将与该脊线所属的可展曲面相切，而可展曲面则是其切线的轨迹，因此这个密切平面也将与另一个曲率中心所形成的第二叶曲面相切，从而将在该密切点与第一叶曲面相垂直。

然而，曲面上的一条曲线若在其上每点的密切平面在此密切点与该曲面垂直，则它是其上任两点在曲面上的最短联线，也就是说它是在这两点之间绷紧的一条绳线所描成的曲线。

(李文林 译　胥鸣伟 校)

① 蒙日在接下去的第V章中讨论了由曲面的法线形成的可展曲面；在第VI章中则讨论了由这些可展曲面的脊线所形成的曲面，也就是曲面的主曲率中心的轨迹，该曲面由两叶组成。本译文以下一段摘录蒙日在这方面陈述的一个重要结果。

70. 高斯:《关于曲面的一般研究》摘要

高斯的论文《关于曲面的一般研究》(Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. Soc. Gött. 6, 1828)开创了微分几何发展的新时代。高斯以前的几何学家在研究曲面时总是将其与外围空间相联系,高斯这篇论文提出了全新的观念,即一个曲面本身就是一个空间,建立了以研究曲面内在性质为主的内在几何学。高斯推广了欧拉等人的曲率概念而定义了曲面在一点的总曲率,也就是现在所称的高斯曲率,并证明了一条他叫做"极妙定理"的著名结果:若曲面或其一部分可以展在另一曲面上,则对应点的曲率保持不变。《关于曲面的一般研究》后载《高斯全集》(C. F. Gauss: Werke IV. pp. 217～258, Göttingen, 1880),原文较长,以下选录高斯本人撰写的该文摘要,刊于 Göttingische Gelehrte Anzeigen, No. 177, pp. 1761～1768(1827)(亦载 Werke IV. pp. 341～347),转译自 H. O. Midonick (ed.): The Treasury of Mathematics, pp. 399～405, Philosophical Library, Inc. New York, 1965.

关于曲面的一般研究
——高斯提交给格丁根皇家学会的论文摘要

尽管几何学家们很重视曲面的研究,其成果也在高等几何中占了相当的比例,然而对于曲面的彻底了解依旧十分遥远,以至于可以贴切地把它比喻成一块极为多产的土地,但是迄今为止仅只耕耘了一小片而已。几年前,作者解决了在保持最小元素不变的条件下,一个给定曲面到另一个曲面上的所有表示的问题,从而给出

了曲面研究的一个新方向。本摘要旨在介绍其他的一些新观点以及因此变得容易理解的一些新事实。在此之前，我想先说明一点：这些新定理以及新想法的陈述，如果具有最一般的形式，那么必定已省略了某些必要的限制以及进一步的论证。

当问题涉及空间中无穷多个方向时，将它们用固定球面上的点来表示是有好处的。这些点是该球面上与这些方向平行的半径的端点。这一附属球面(auxiliary sphere)的球心和半径可以任取，比如半径可选为单位长。这与天文学中常用的做法不谋而合。在那里，所有的方向由一个假想的半径无限大的球形天体上的点表示。从而球面三角学以及其它一些定理(其中包括作者得到的一个应用很广的定理)可以用来处理涉及不同方向上几何量比较的问题。

如果我们用上述方法来表示球面上各点的法方向，即：曲面上任一点对应于附属球面上一点，则一般地，曲面上一条曲线将对应附属球面上一条曲线；曲面的一部分对应附属球面的一部分，并且曲面这一部分和平面差别越小时，附属球面上相应的面积就越小。由此，一个十分自然的想法是以附属球面上相应部分的面积作为曲面给定部分的全曲率的度量。因此作者称它为曲面上该部分的总曲率。除了该部分的大小外，它的位置也应同时考虑在内。这两个部分的位置可以是相同的或者相反的，与它们的大小完全无关。这两种情形可以用全曲率的正负号来加以区别。然而，要使这样的区分有明确的意义，只有当这些图形被看作是在这两个曲面确定的一侧才行。在球面的情形，作者将图形看成在外侧，而在曲面的情形则看成在曲面的法线竖起的那一侧。因此，在两个曲面为凸—凸或凹—凹这两种(无本质差别的)情形，我们取正号，在凹—凸或凸—凹的情形取负号。如果所涉及的曲面的那一部分可以由不同类型的部分构成，尚需更细致的定义，在此略去。

正如质量与体积之比导致密度的概念，附属球面上相应部分面积与曲面上给定部分的面积之比也导致新的概念。作者定义曲面在某点处的曲率测度(measure of curvature)为一比值，分母为

该点处无穷小邻域的面积，分子为附属球面上相应于曲面上那一部分的面积，即相应的总曲率。很明显，作者在曲面情形提出的总曲率和曲率测度的概念类似于曲线情形的放大率(amplitude)和曲率。作者不愿意沿袭旧的术语，原因是采用这些旧术语不过是出于习惯而并非恰当。采用新术语不仅仅是词语选择的问题，其合理性将为后面的许多定理所证实。

在曲面上任一点的曲率测度的表达式会因曲面表达方式不同而不同，在空间直角坐标系中，曲面最简单的表达方式是将某一坐标表成其余两坐标的函数。此时曲率测度的表达也最简单，而且由此可以得到曲率测度与由该曲面以及与其正交的平面所截成的曲线的曲率之间的一个重要关系。众所周知，欧拉首先发现在所有与该曲面正交的平面中，存在彼此垂直的两个平面，它们与曲面所截曲线的曲率半径分别取最大值和最小值。从而由上述的最简单的曲率测度表达式，它是这两个极值乘积的倒数。当曲面由 x,y,z 的一个方程式给出时，曲率测度的表达不会这么简单。而当曲面是用将 x,y,z 表为两个新变量 p,q 的函数的方式给出时，曲率测度的表达式将更复杂，其中涉及 15 个变量，即：x,y,z 关于 p,q 的一阶和二阶偏导数。这种表达式的重要之处在于它便于更换成另外的表达式，而这些表达式是与一些十分著名的定理联系在一起的。在该表达式下，曲面的线素 $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ 具有形式 $\sqrt{(Edp^2+2Fdp\cdot dq+Gdq^2)}$，其中 E,F,G 为 p,q 的函数。曲率测度的这个新的表达式只包含 E,F,G 及它们的一阶和二阶偏导数。因此我们注意到：只要知道了曲面的线素，则曲率测度被唯一确定，而不需要知道曲面关于 x,y,z 的具体表达式。由此可得一个重要的定理：若曲面，或其一部分可以展① 到另一曲面上，则曲率测度在对应点处保持不变。特别地，若一曲面可展成平面，则其曲率测度处处为零。由此立刻得到可展曲面的特征方程

① 展即等距嵌入。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

其中 z 看成 x,y 的函数，该方程以前已为人所知。但据作者判断，其严格性始终没有建立起来。这些定理使我们以一个新的角度来考虑曲面理论——这个广袤而尚待开发的处女地。如果我们不是将曲面看为几何体的边缘，而是看成某个一维消失了的三维立体，同时如果我们认定它们只具有柔韧性而没有延展性，那么有两种本质上不同的表述必须加以区分。其一是预先假定空间曲面已具有确定形状的那类论述，另一类论述则与曲面可能具有的形状无关。本文涉及的是后一类。根据我们前面所述，可知曲率测度即属此类。考察曲面上的图形，容易看出它们的夹角、面积、总曲率，以及两点间的最短联线之类，均属于这类情形。所有这些论断必定出自于曲面上用形如 $\sqrt{(Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2)}$ 的线素给出的属性。作者把数年前所作的在这个领域中的部分研究成果归进了现在这篇论文中，不过作为介绍性文章不想走得过远，同时希望对进一步的研究多少有所帮助。作为摘要自然必须更加简要，只引用一些定理作为典型的例子。为此目的，引述以下一些定理。

如果从曲面上某点出发有无穷多条等长的最短线，则过这些最短线另一端点的曲线和其中的每条最短线都正交。如果从曲面上某一固定曲线的每点出发引出与该曲线正交的等长最短线，则这些最短线与过它们另一端点的曲线也正交。这两个定理（其中后一个可看作前一个的推广）在论文中采用分析方法藉助简单的几何考虑而得到。由最短线组成的三角形(triangle of shortest lines)[①] 内角和与两直角之差等于该三角形的全曲率，这里取圆周上与半径等长的弧所对的圆心角(57°17′45″)为单位角，全曲率的单位取为附属球面上面积等于半径的平方的部分。显然，这个重要的定理也表明了如下的事实：当作为总曲率的那一部分趋近于整个附属球面时，测地三角形的内角和与两直角之差则趋近直角的

① 下文中径译为"测地三角形"。

八倍。一般地由最短线组成的 n 边形，其内角和与 $(2n-4)$ 倍直角之差等于该 n 边形的总曲率。

该定理被用来研究测地三角形。我们在此介绍几个有关的重要定理。设 a,b,c 为测地三角形的边长(精确到小数点后 1 位)，A，B，C 为对应角，α,β,γ 为顶点处的曲率测度，σ 为该三角形的面积，则在精确到小数点后 4 位意义下，$A+B+C$ 与两直角之差为 $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\sigma$. 并且在相同精确度下，与该测地三角形有公共顶点的平面三角形的相应三个内角分别为

$$A-\frac{1}{12}(2\alpha+\beta+\gamma)\sigma$$

$$B-\frac{1}{12}(\alpha+2\beta+\gamma)\sigma$$

$$C-\frac{1}{12}(\alpha+\beta+2\gamma)\sigma$$

我们马上看到这一定理是勒让德(Legendre)的一个熟知的定理的推广。用同样的方法可得：在同样精确度下将球面三角形的每一个角减去三分之一该球面三角形的总曲率，就得到相应的平面三角形的各内角。在曲面不是球面的情形下，要对测地三角形的各内角进行不同的修正，一般来讲，其精确度在小数点后 3 位。但是那怕曲面与球面仅是略有差别，这种修正也不应忽略。因此具体算出修正值并由此说明在地球表面测地三角形的情形下，这些偏差微不足道是十分重要的。作者使用的一个地表测地三角形即为一个例子。该三角形最大边长近 15 里①，其内角和与两直角之差约等于 15″。相应的平面三角形的修正值分别为 4″.95113、4″.95104、4″.95131. 除此之外，作者还给出了小数点 4 位后的估计项。当然若地球为球面则情形更简单，但就地表的可测测地三角形而言，差别是无足轻重的。例如在该例子中，只要将第一个修正值小数点后

① 这一德制里等于赤道上与 4′球心角对的弧长，即 7.42 千米，约等于 4.6 英里。

5 位减 2，第三个修正值小数点后 5 位加 2 即可。

（成　斌 译　胥鸣伟 校）

71. 罗巴切夫斯基:《论几何原理》

19 世纪几何学最富革命性的成就是非欧几何的确立,这是从公元前 3 世纪以来试图证明欧几里得平行公理的漫长努力的结果。欧几里得平行公理的独立性在 18 世纪已有人认识到(G. S. Klügel, 1763; J. H. Lambert, 1786,等),用与之相矛盾的另外的平行公理来构造逻辑上相容的全新的几何体系,则首先由高斯、罗巴切夫斯基和波尔约几乎同时和互相独立地完成。

虽然高斯从 1813 年起就开始发展他所称的"反欧几里得几何",但他的工作生前均未发表。历史上最早公开发表的非欧几何文献是罗巴切夫斯基的《论几何原理》(О Началах Геометрии),刊于 1829 年《喀山通讯》(Казанский Вестник),主要内容取自作者 1826 年 2 月 12 日在喀山大学数理系会议上的讲演《附有平行线定理的一个严格证明的几何原理简述》(Сжатое Изложение Начал Геометрии со Строгим Доказательством Теоремы о Параллельных),讲演原稿则已遗失。罗巴切夫斯基(Николай Иванович лобачевский, 1792～1856),生于俄国下诺夫哥罗德(今高尔基市)一个土地测量员家庭,1807 年入喀山大学,毕业后留校工作,1822 年起任教授,1827～1846 年间长期担任喀山大学校长。

罗巴切夫斯基创立的非欧几何今天就以他的名字命名,但上述第一篇论文当时并未受到重视,他后来为发展和阐释这种新几何学而付出了毕生心血,最有代表性的著述还有:《具有完备的平行线理论的新几何学原理》(Новые Начала Геометрии с Полной Теорией Параллельных,

Ученые Записки Казанского Университета, 1835～1838)、《平行理论的几何研究》(Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, 1840)等，后者用德语出版，引起高斯关注，这使罗巴切夫斯基于1842年成为格丁根科学协会会员。以下节录罗巴切夫斯基的第一篇论文《论几何原理》，转译自 А. П. Нордин: Об Основаниях Геометрии, стр. 27～49.

论几何原理[①]

概念的复杂性似乎视其接近自然界原始真理的程度而扩大，正像在另一方面，在走向智慧所致力的新知识的境界时，这一复杂性同样在增长。正因为如此，几何学中的疑难首先应当属于对象本身，其次是在这里为了达到最终严格性所应使用的工具，未必能符合该学说的目的和单纯性。那些希冀满足于这种要求的人们，把自己禁锢在狭隘的圈子之中，他们所有的努力都不可能获得成功。终于，我们看到，从牛顿和笛卡儿的时代以来，被分析学改造了的整个数学，以如此迅速的步伐向前迈进，远远地把那些学说甩在自己的后边：没有这些学说数学已经能够对付得了，同时这些学说也不再受到原先所博得的重视。这样，欧几里得的原理尽管历史悠久，尽管它在数学中的成就辉煌，到此时还保存着自己最初的缺陷。

事实上，谁不同意，无论怎样的数学学科都不应当肇始于那种狭隘的观念，据欧几里得的观点，我们由这种概念才开创了几何学；谁不同意，数学中无论何处都不能容忍这种严格性的不足，它是在平行线理论中才被勉强允许的。诚然，我们的头脑对各种对象本身的认识可以预先警告我们防止因几何学中初始的和一般的概念含糊不清而导致的错误结论，而我们之所以深信那些不经证明

① 由作者本人从题为《[附有平行线定理的一个严格证明的]几何原理简述》一文中抽出，该文曾于1826年2月12日在[喀山大学]数理系会议上宣读。——原注(方括号内文字系译者所加)

就被接受的真理是正确的，则由于这些真理是朴素的，由于我们具有诸如天文观察之类的经验；然而所有这一切依然一点也不能使惯于严格判断的智慧满足。何况当解决问题的方法尚未揭晓，当我们还不知道这种方法是否还可用来解决别的问题的时候，我们也无权藐视这种方法。

在这里我打算说明，我想用什么样的方式补充几何学中的这些遗漏。我对应有联系的全部研究，叙述起来将要用太多的篇幅，并要求对整个学科有面目全新的概念。关于几何学其他的缺点，例如难度，这并不重要，我认为没有必要详加说明；我只限于对与数学的方法有关的缺点作一些简评。无论谁也不希望能够区别开：什么才唯一地属于几何学，在何处这一学科却变成了另一种，即分析学。

无论什么样的学科据以发端的初始概念，都应当清晰和简化到最少的数目，只有它们才能充当学说的可靠和充分的基础。不应相信，这样的概念要靠天赋的知觉（врождённые чувства）而获得。

无论什么都不可能比作为算术基础的那些概念更简单的了。我们轻易地认为，自然中的一切都应当受测量，一切都能够被计数。力学的情况却不是那样：人借助于自己的一些日常经验不可能做到这些。在一次被触发的运动的永恒与同一性那里，速度是该运动和各种物体质量的尺度 ——这种类型的真理，它需要时间、其他知识的参考材料，并期待着天才[①]。

……

我们看到[②]，直边三角形各角之和不可能$>\pi$。留下的假设是这个和$=\pi$或$<\pi$。两者都可以被采纳而结果毫不矛盾，由此而产

---

① 在这篇序之后，罗巴切夫斯基转入叙述几何概念与原理，这部分（约 5 页）从略。

② 从这个地方开始叙述“虚几何学”（Воображаемая геометрия）的基础。它表述得非常简要，没有证明。在罗巴切夫斯基后来的著作《平行线理论的几何研究》（参见 Н. И. Лобачевский，Полн. собр. соч. ，Т. I，стр. 79～127）和《具有完整平行线理论的几何学新原理》（同上书，Т. Ⅱ，стр. 267～345）中有证明。

生两种几何学：一种是就其单纯性而言迄今通用的，承认所有事实上的度；另一种是虚想的，更加一般的，因而它的计算是困难的，它容许直线依赖于角的可能性。

如果在一个直边三角形中认为各角的和为 π，那么在所有的三角形中都已是这个和。相反地，在一个直边三角形中允许各角和小于 π，易于证明，它随三角形边的增长而减少。

因此，平面上两直线当同第三条直线构成角、而这些角的和为 π 时，这两直线总不能相交。在另一种情况下，当这个和 $<\pi$，如果对此假设三角形各角和 $<\pi$ 时，它们也能不相交。

这样，平面上任何直线同一条直线的关系可分成会聚的(сходящиеся)和非会聚的(несходящиеся)。如果它们具有界限(они представляют границу)，或者换句话说，在由一点引出的所有直线之间，它们可以从一些直线过渡到另一些直线，这种非会聚的直线将称为平行的。

我们设想从一点作垂线 a 垂直于已知直线，并从该点向这直线作平行线；记 $F(a)$ 为 a 和平行线间的角①。易于证明，如果三角形中各角和 $=\pi$，对于任何直线 a 都有角 $F(a)=\frac{\pi}{2}$；但在另一假设中角 $F(a)$ 随 a 而变化，随直线 a 的[无限]增长而减少到零，并经常保持 $<\frac{\pi}{2}$。为了推广，在这后一假设中，把所有直线 a 上的角记作 $F(a)$，我们将取

$$F(0)=\frac{\pi}{2}, \qquad F(-a)=\pi-F(a)$$

为了使任何锐角 $A=F(a)$，对 A 可以设想直线 a 是正的；而对任何钝角 A，可以设想直线 a 是负的。

不过，在这两个假设中，平行线都具有以下性质。

当两直线平行，那么过这两直线的两平面相交后给出的直线

---

① 罗巴切夫斯基在自己的其他著作中称 $F(x)$ 为平行角。他为此引入了记号 x' (在《虚几何学》[Воображаемая геометрия，1835]中)和 $\Pi(x)$ (在《具有完备的平行线理论的新几何学原理》和《平行理论的几何研究》中)。

同样平行于该两直线。

平行于第三条直线的两直线互相平行。

当二平面相交于平行直线，则平面内角和$=\pi$。

假设三角形内角和$<\pi$，就导致出圆随半径的增长不趋于直线，而趋于一特种曲线，我们称它为极限圆(предельный круг)。球面在这种情况下也趋向于一曲面，类似地，我们称它为极限球面(предельная сфера)。在与平面相交时，这一曲面给出或者圆、或者极限圆。

在极限球面上的几何学同我们在平面上所知的完全一样。极限圆最终代替了直线，而在其中有极限圆的平面间的各角代替了直线间各夹角的位置。

极限圆的弧越小，它们就越向直线靠近，因此直线与弧长相比的差可为任意小。所以，如果取弧与直线之长均为特别小，则任意弧既算弧也算直线。

这样，如果在自然界中存在着的几何学是两平行线与第三直线交角之和可以$<\pi$，那么我们通用的几何学与那些三角形各角和同π有可觉察到的区别的几何学相比，是特别小直线的几何学。

刚才说过，极限球面上的几何学亦即平面上的几何学。在前者中极限圆代替了直线；其中有极限圆的平面间的各角代替了直线间各夹角的位置。然而，在极限球面上三角形的度量应当发生在三角函数学说之前；至于几何结构，则在极限球面上的三角形，应当处理得如同球面上的一样。在其中有极限圆并可称为法面(нормальные плоскости)的平面，是球面大圆的平面，而前者自己相交的交线，也就成了法线或极限球面的轴(оси)，亦即普通球面的直径。

在此之后，我们将不加区别地谈到关于直边三角形，用这个词时指的也有极限球面上由极限圆弧组成的三角形。

在直边三角形中，我们记a，b为直角边，A，B为所对的角，c为斜边。

……①

现在我们开始着手研究三角形的度量和平行线问题的解。

只有这种判断我们才认为是正确的，即垂直于一平行线的垂线与另一平行线相交成锐角。我们已约定，当 a 为垂线时，将这样的锐角记为 $F(a)$。另一判断，即迄今几何学家认为可能的，也包含在这一般判断之中，它带有限制：直线应当看成无限小，因此，在计算中与一阶无限小相比，应忽略它们的乘积、二阶和以上各阶的无限小。

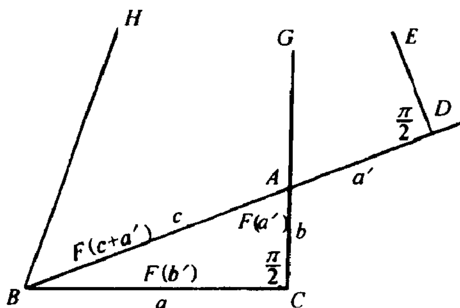


图 1

这样，在直角三角形中，与直角边 a，b 相对的锐角应当是 $F(a')$，$F(b')$，这里 a'，b' 是带＋号的直线[段]，＋号记在表示其度量的数字之前。

我们把直角边 b 和斜边 c 通过它们的交点 A 延长（图 1）。取 c 的延长线 $AD=a'$，在 b 的延长线 AG 的同侧过端点 D 作垂线 DE，从角 $F(b')$ 的顶点 B 到与 AG 同侧的平行线 BH。三条直线 BH，AG，DE 是平行的，也同 b 平行，b 与 a 的交点记作 C。

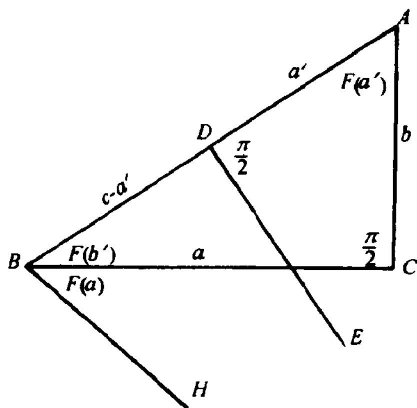


图 2

这里

① 以下略去普通三角学概念与公式的段落。

$$\angle HBA + \angle ABC = \angle HBC$$

亦即

$$F(c+a') + F(b') = F(a) \tag{1}$$

在此 ΔABC 中，如果把 a' 从 A 到 B 沿直线 C 放下，过端点 D 作垂线 DE，并过点 B 引它的平行线 BH，那么，和平行于 b 的直线一起我们将得到直线 c,a,a',b' 间的新关系。然而，需要区别三种情况：

如果 $c>a'$（图 2），则得

$$\angle DBH = \angle DBC + \angle CBH$$

或

$$F(c-a') = F(b') + F(a) \tag{2}$$

如果 $c=a'$（图 3），则

$$\frac{\pi}{2} = F(b') + F(a)$$

如果 $c<a'$（图 4），则

$$\pi - F(a'-c) = F(b') + F(a)$$

然而在第二种情况下 $\frac{\pi}{2} = F(0) = F(c-a')$，而在后一种情况下

$$\pi \quad F(a'-c) = F(c-a')$$

因而，在所有三种情况下等式(2)成立。

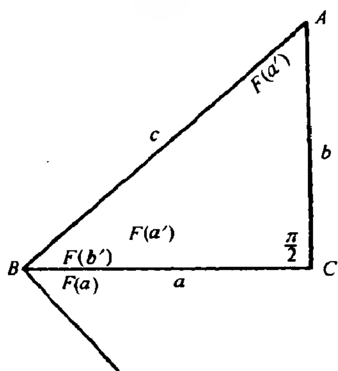


图 3

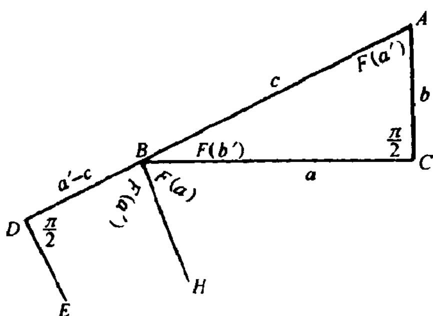


图 4

合式(1),(2),给出

$$2F(a)=F(c-a')+F(c+a') \tag{3}$$

$$2F(b')=F(c-a')-F(c+a') \tag{4}$$

再过点 A 延长 b 和 c(图 5),过点 C 延长 a;做 $AI=a'$,$CN=b'-a$;作 IK,NO 分别垂直于 CI 和 CN,则 IK,AL,ON 是平行线。再向它们引平行线 CM;于是

$$\angle MCN+\angle MCI=\frac{\pi}{2}$$

亦即

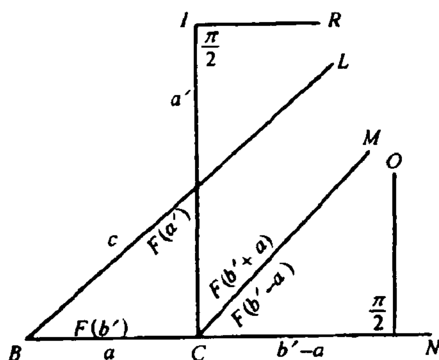


图 5

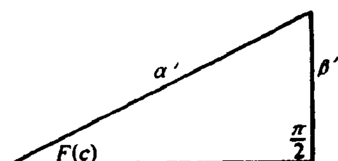


图 6

$$F(b'-a)+F(a'+b)=\frac{\pi}{2} \tag{5}$$

现在把等式所确定的直线记为 α

$$F(\alpha)+F(a)=\frac{\pi}{2}$$

与 b,c,a',b' 相比,把类似的直线记为 $\beta,\gamma,\alpha',\beta'$,等式(4)另可表为

$$2F(\beta')=F(a'-c)+F(a'+c)$$

假设存在直角三角形,它的 a' 是斜边,β' 是直角边,$F(c)$ 是 β' 相对的角(图 6)。

在这以后就可以推出,在等式(3),(4),(5)中,就象直角三角

形中边和角的所有假设的依存关系一样，随着 a' 变成 b'，不仅可以使 a 变成 b，而且可以使

a 变成 β'	α 变成 b'
c 变成 a'	γ 变成 α'
a' 变成 c	α' 变成 γ
b' 变成 α	β' 变成 a

与此同时余下 b 和 β 没有变化，这样式(3)和(4)给出

$$\left.\begin{aligned}2F(a)&=F(c-a')+F(c+a')\\2F(b)&=F(c-b')+F(c+b')\\2F(b)&=F(a'-\alpha)+F(a'+\alpha)\\2F(a)&=F(b'-\beta)+F(b'+\beta)\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}2F(b')&=F(c-a')-F(c+a')\\2F(a')&=F(c-b')-F(c+b')\\2F(c)&=F(a'-\alpha)-F(a'+\alpha)\\2F(c)&=F(b'-\beta)-F(b'+\beta)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}2F(a')&=F(\alpha-\beta)-F(\alpha+\beta)\\2F(b')&=F(\beta-\alpha)-F(\alpha+\beta)\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

式(5)给出：

$$\left.\begin{aligned}F(b'-a)+F(a'+b)&=\frac{\pi}{2}\\F(c-a)+F(\beta+\alpha')&=\frac{\pi}{2}\\F(a'-\beta')+F(\beta+\gamma)&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}F(b'+a)+F(a'-b)&=\frac{\pi}{2}\\F(c+a)+F(\beta-\alpha')&=\frac{\pi}{2}\\F(a'+\beta')+F(\beta-\gamma)&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

所有这些等式，作为直角三角形边和角的各种形式的依从关

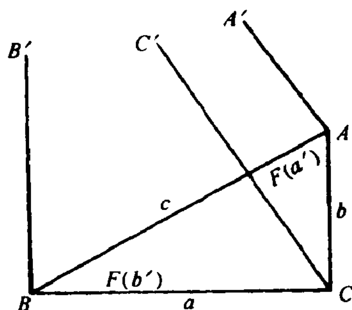


图 7

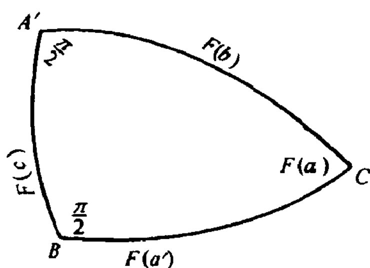


图 8

系，都是任意直线 a 依赖于角 $F(a)$的定义；然而对于解决这后一问题可用以下的方法。

对直角三角形 ABC 所在平面过点 B 作垂线 BB'（图 7）。过点 A 和 C 向 BB'引平行线 AA'，CC'。在其上有三条平行线的平面的内角和由在棱 AA'附近的角$\frac{\pi}{2}-F(b')$给出。设想在 A 附近，以 A 为中心作球面；它与直线 AA'，AB，AC 相交构成球面直角三角形 $A'BC$（图 8），这里 $A'C=F(b)$为斜边；$A'B=F(c)$，$BC=F(a')$为直角边，$F(a)$和$\frac{\pi}{2}-F(b')$为相对角。

在这里可顺便提及，这样的三角形的存在须以直边的直角三角形（图 6）为前提，在那里 a' 是斜边，β'，b 是直角边，$F(c)$，$\frac{\pi}{2}-F(a)$是它们的相对角；因此，正是这种三角形，其构成上边已经证明，在两个假设中留下的一个不著名，却是真的，就必须这样来检查结论。

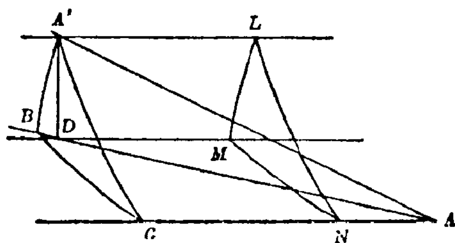


图 9

再设想一个球面三角形 $A'BC$，其球面中心为 A（图 9）。从 A' 作 $A'D$ 垂直于 AB。引 AC 的平行线：在平面 ABC 内过点 D 引

DM；在平面 $A'AC$ 内过点 A' 引 $A'L$。使 LMN 为极限球面上的三角形，$A'L$，DM，CA 为其轴。

可以证明，半径 AC 越长，在 $\Delta A'BC$ 和 ΔLMN 中边长的区别就越小，或者直线 a' 成为 $BC=F(a')$，这个差能够取成任意小。两直线之比所趋向的极限，我们在前边记作 lim，于是写成：

$$\lim\frac{A'C}{BC}=\frac{LN}{NM}\qquad \lim\frac{A'B}{BC}=\frac{LM}{NM}$$

亦即 $$\lim\frac{F(b)}{F(a')}=\frac{1}{\cos F(a)};\qquad \lim\frac{F(c)}{F(a')}=\operatorname{tg}F(a)$$

由此 $$\lim\frac{F(b)+F(c)}{F(a')}=\frac{1}{\cos F(a)}+\operatorname{tg}F(a)$$

$$\lim\frac{F(b)-F(c)}{F(a')}=\frac{1}{\cos F(a)}-\operatorname{tg}F(a)$$

由式(6)和(7)

$$F(b)+F(c)=F(a'-\alpha),\quad F(b)-F(c)=F(a'+\alpha)$$

由此 $$\lim\frac{F(a'+\alpha)}{F(a')}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(\alpha)$$

$$\lim\frac{F(a'-\alpha)}{F(a')}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}F(\alpha)$$

前一个等式表明，后一个等式对所有负直线 α 也是正确的。基于后者，我们将任意两直线 α,β 概括为

$$\lim\frac{F(a'+\alpha)}{F(a'+\beta)}\cdot\lim\frac{F(a'+\beta)}{F(a')}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(\alpha)$$

亦即

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(\beta)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(\alpha)\tag{11}$$

这要求

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(\alpha)=e^{-\alpha}\tag{12}$$

这里 e 是一个不定常数(неопределённое постоянное число)，它指的是纳皮尔对数的底，由于在度量直线[段]时取什么样的直线[段]做单位尚不明确之故。

借助于由以上(6)，(7)，(8)得出的等式(12)，给出：

$$\left.\begin{aligned}
&\sin F(c)=\sin F(a)\sin F(b)\\
&\operatorname{tg} F(c)=\operatorname{tg} F(a)\sin F(a')\\
&\cos F(b)=\cos F(c)\cos F(a')\\
&\sin F(c)=\operatorname{tg} F(a')\operatorname{tg} F(b')\\
&\operatorname{tg} F(a')=\cos F(a)\operatorname{tg} F(b)\\
&\sin F(b')=\sin F(a)\cos F(a')
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

以及其他直接由此得出的等式。

这样,在直角三角形中,直角边为 a,b,相对角为 A,B,斜边为 c,有:

在直边形中:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin F(c)=\sin F(a)\sin F(b)\\
&\operatorname{tg} F(c)=\operatorname{tg} F(a)\sin A\\
&\cos F(b)=\cos F(c)\cos A\\
&\sin F(c)=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\\
&\operatorname{tg} A=\cos F(a)\operatorname{tg} F(b)\\
&\sin B=\sin F(a)\cos A
\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

在球面上:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos c=\cos a\cos b\\
&\sin a=\sin A\sin C\\
&\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} c\cos B\\
&\cos C=\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\\
&\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} A\sin b\\
&\cos A=\cos a\sin B
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

这些是球面三角学的著名等式,用它们很容易得到对于任何球面三角形均成立的下列等式,这里,边 a,b,c 相对角为 A,B,C:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos A\sin b\sin c+\cos b\cos c=\cos a\\
&\sin a\sin B=\sin b\sin A\\
&\operatorname{ctg} A\sin C+\cos C\cos b-\operatorname{ctg} a\sin b=0\\
&\cos a\sin B\sin C-\cos B\cos C=\cos A
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

测量球面三角形因而不依赖于平行线假设。测量直边三角形

却并非如此。类似地，如式(15)给出(16)，我们也可得到下列等式对于任何直边三角形均成立，其边为 a,b,c，相对角为 A,B,C：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tg}F(a)\sin A=\mathrm{tg}F(b)\sin B\\&\cos A\cos F(b)\cos F(c)+\frac{\sin F(b)\sin F(c)}{\sin F(a)}-1=0\\&\mathrm{ctg}A\sin B\sin F(c)+\cos B-\frac{\cos F(c)}{\cos F(a)}=0\\&\cos C+\cos A\cos B-\frac{\sin A\sin B}{\sin F(c)}=0\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

假设当 a,b,c 很小时，则允许忽略更高阶的无限小和乘积，于是可设

$$\sin F(a)=1-\frac{1}{2}a^2,\cos F(a)=a(1-\frac{1}{3}a^2)$$

通过式(17)变成：

$$b\sin A=a\sin B$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\sin(A+B)=\frac{c}{a}\sin A$$

$$\cos C+\cos(A+B)=0$$

前两式是平面三角学的著名等式；而后两式表明：$A+B+C=\pi$。

我们叙述的平行线理论假设直线与角间的那种依从关系①，正如以后将要看到的，在自然界中是否存在，谁也未能证明。至少天体观察使人深信不疑：所有归我们测量的直线，甚至天体间的距离，与在平行线理论中取作单位的直线相比都太小了，迄今通用的平面三角学的公式没有能感觉到的误差，应当是正确的②。

一般说来，在直角三角形中，a,b 为直角边，$\pi-2\omega$ 为各角和，则有

---

① 式(17)和由它导出的公式，已由作者增补文后。此文于1826年提交[俄国喀山大学]数学物理系。——原注

② 至此以下省略了星际距离的讨论。

$$\mathrm{tg}\omega=\left(\frac{e^{a}-1}{e^{a}+1}\right)\left(\frac{e^{b}-1}{e^{b}+1}\right)$$

因而三角形越小，它的各角之和同两直角的区别越小。此外可以认为，我们的平行线理论据以建立的这个差[1]，证实了通用几何学的全部计算的精确性，并允许把所采纳的通用几何学的原理看作犹如经过了严格的证明。

同时，不能不重视格·拉普拉斯的见解：我们所见到的星星和银河只属于天体的一部分，就象微弱的、若隐若现的斑点，类似于我们在猎户星座、仙女星座、摩羯星座及其他星座中所看到的一样。于是，且不说在想象中空间可以无限地延伸，自然界本身向我们显示的距离，甚至同我们的地球到恒星的距离相比，后者也因微小而可忽略。此外，不能进而断言，假定直线的度量不依赖于角——这一假设，许多几何学家想采纳它作为毋须证明的严格的真理——可能在我们过渡到可见世界的极限之前，就会发现它有可以觉察到的错误。

另一方面，我们尚无力了解，在实物自然界中能够存在什么样的联系，以及在自然界中什么样的边和角能连接起如此不同的量。于是，非常可能，欧几里得的原理只有一些是正确的，尽管它始终是未被证明的。

无论如何，新的几何学，它的基础已在此被规定，如果不存在于自然界中，那也可以存在于我们的虚想之中，它无助于实际测量，但对几何学和分析学的互相应用，却开拓了一个新的、广阔的领域。

……[2]

---

① 在罗巴切夫斯基几何学中，这个特别小的差记作 2ω，它是三角形各角和同两直角 π 之间的差。

② 罗巴切夫斯基著作以下的基本部分包括非欧空间的解析几何和微分几何的原理，面积、曲面和体积的测量。罗巴切夫斯基由此得到的公式在一些情况下是有限的形式，在另一些情况下是定积分的形式。比较用各种方法计算出的结果，他得到的一些定积分的值，既有已知的，也有新的。

结 论

在我们得到表示三角形角和边的依从关系的等式（17）之后，我们终于给出了物体的直线、面积和体积元素的一般公式，几何学中其他任何公式都已是解析的了，这里的计算必须自相吻合，并且，无论什么方法都不能够给我们揭示出新的、在前边等式中不包含的公式，应当从这些公式中表达出几何量间的所有相互关系。这样，如果现在需要假设：以后无论什么样的矛盾强行推翻我们在这新几何学中所采纳的原理，那么这个矛盾也只可能隐藏在等式（17）本身之中。然而我们注意到，当我们置 $a\sqrt{-1}$，$b\sqrt{-1}$，$c\sqrt{-1}$以代替边 a，b，c 时，这些等式就变成了球面三角学的（16）；但在通常的几何学和球面三角学中处处皆是一些线性关系，因此通常的几何学、三角学和这个新的几何学总是彼此吻合的。

如果现在分析学同新的——我们称之为**虚想的**以区别于**通用的**——几何学已经互相一致，那么就可以期望彼此之间相互作为参考。这一期望似乎也不无根据，因为本来假设要达到的只有一个目的——对测量所有的几何量给出一般的原则，——在直接走向这一目的的时候，顺便地允许它可有某些应用：我们已经能够解出一些定积分的值。没有几何学的参考材料，分析学中为认识定积分而铺平道路就要感到困难了。

余下该研究由于把虚想的几何学引入力学将发生何种变化，在这里是否会遇到已被接受的、不容置疑的关于实物自然界的概念，但这概念将迫使我们不得不作出限定、或完全放弃直线和角的依从关系。然而，可以预见，几何学的新原理在力学中引起的变化，正是拉普拉斯在《天体力学》(Mécanique céleste，T. I，Liv. I，Ch. Ⅱ）中所指出的那种变化，假设速度对于力的各种依从关

系是可能的，或者——更准确地说——假设永远被速度量度的力，与其说是服从于已被接受的、力的加法的规律，不如说是服从于另一力的合成的规律。

(罗见今 译[①])

---

① 本译文原载中国科学院自然科学史研究所数学史组、中国科学院数学研究所数学史组编《数学史译文集续集》，第1～17页，上海科学技术出版社，1985年。

72. 波尔约:论非欧几何

另一位非欧几何创始人 J. 波尔约(Janos Bolyai, 1802～1860),生于匈牙利克劳森堡(Klausenburg,今罗马尼亚的卢日),其父 F. 波尔约(Farkas Bolyai)也是一名数学家,与高斯过从甚密。波尔约受父亲影响研究欧氏平行公理,并于 1825 年左右完成一篇论文,以简洁概括的形式提出了一个完整的、无矛盾的非欧几何体系。F. 波尔约将论文寄给高斯请求评论,高斯答称:"称赞他(指 J. 波尔约)就等于称赞我自己。整个文章的内容,您儿子所采取的思路和获得的结果,与我在 30 至 35 年以前的思考几乎完全相合"。波尔约这篇论文后来作为他父亲的著作《向好学青年介绍纯粹数学原理的尝试》(Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos purae…, 2 vols. Maros-Vásárhely,1832～1833)第 1 卷的附录出版,后便以《附录》著称。《附录》也是 J. 波尔约发表的唯一的数学著作,原作为拉丁文,后被译成法文(1867)、意大利文(1868)、德文(1872)和英文(1891)多种文字。以下是这篇论文的全译,转译自 D. E. Smith: A Source Book in Math. pp 375～388,英译底本则是匈牙利科学院为纪念 J. 波尔约诞生 100 周年而出版的《附录》新版(Ioannis Bolyai de Bolya, Appendix, editio nova, Budapest, 1902).

附录 展示独立于欧几里得第 XI 公理[①] (不能先验决定)的空间

① 即欧几里得平行公理,亦称"第五公设"。

的绝对真实的科学[1]，以及在它不成立的情形中圆的几何求积

符号的阐释

$\overline{AB}$[2]表示包含点 A，B 的一条线上所有点的复合形。

$A\bar{B}$表示线 AB 的截于 A 而包含点 B 的一半。

$\overline{ABC}$表示包含 A，B 与 C 三个点（它们不在同一直线内）的同一平面中所有点的复合形。

$AB\bar{C}$表示平面 ABC 的由$\overline{AB}$所截，包含点 C 的一半。

ABC 表示由 $B\bar{A}$和 $B\bar{C}$的线丛划分的$\overline{ABC}$中较小的部分，或以 $B\bar{A}$与 $B\bar{C}$为边[3]的角。

$ABCD$[4]表示 $AB\bar{C}$ 的由 $B\bar{A}$，BC和 $C\bar{D}$所围的部分（如果 D 在 ABC 内，并且 $B\bar{A}$与 $C\bar{D}$互不相交）。但 $BACD$ 是指平面$\overline{ABC}$在$\overline{AB}$与$\overline{CD}$之间的部分。

R 表示直角。

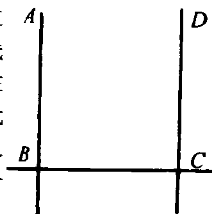
---

① 注意这里“空间的绝对真实的科学”(absolutely true science of space)与后来的提法“空间的绝对科学”(absolute science of space)或“绝对几何”(absolute geomety)不同。虽然 J. 波尔约本人可能有时用过后两个术语，但它们在《附录》中并未出现。

② 两个或两个以上字母上面不加任何标记表示有界图形。当一个图形的一部分是无界时，则在表示无界部分的字母上加注一个标记。AB（表中未给出）表示线$\overline{AB}$从 A 到 B 的线段；因此在下面的 $ABCD$ 定义中，BC 表示一个线段，但要注意 ABC 表示一个角而非一个三角形，当作者要命名一个三角形时，他说“三角形 ABC”或插入符号“Δ”（例如见 § 13）。我们也要注意他的一个角是一个平面的一部分。两个有一条公共边但在不同平面内的角形成一个二面角。例如，见 § 7。

③ 波尔约称它们为腿（Legs）。

④ 如果一个平面内的两条线被第三条线所截，我们说这第三条线一边的半线位于两已知线的一个方向，另一边的半线位于另一个方向。此处给出的两个定义的第一个我们理解为在两条线上所取的两组点对是在相反的方向，而第二个定义中我们理解它们是在同一方向，在 § 2 开始我们有第一个定义 $MACN$ 的一个图示，在 § 7 的开始有第二个定义 $BNCP$ 的一个图示。 原注



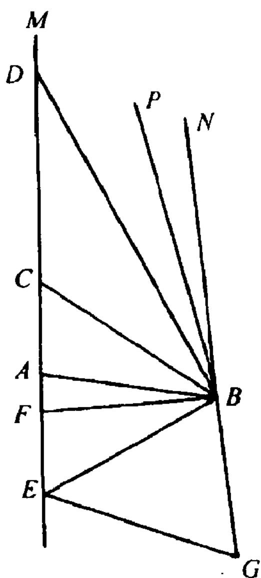
$AB \frown CD$[1] 表示 $CAB = ACD$。

$\simeq$ 表示全等[2]。

$x \to a$[3] 表示 x 以 a 作为极限而趋于 a。

$\frown r$ 表示半径为 r 的圆的周长。

$\odot r$ 表示半径为 r 的圆的面积。



§ 1

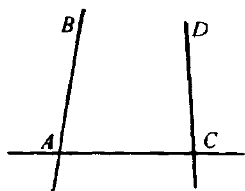
给定 $A\overline{M}$,如果同一平面内的 $B\overline{N}$ 与它不相交,而 ABN 内[4] 的每一条半线 $B\overline{P}$ 都与它相交,则表示为

$$BN \parallel\!| AM.$$ [5]

存在这样一条 $B\overline{N}$ 是显然的。事实上 $\overline{AM}$ 外任一点 B 仅有这样一条 $B\overline{N}$,并且 $BAM + ABN$ 不 $> 2R$;当 BC[6] 绕 B 转动至 $BAM + ABC = 2R$ 时,在某一点 $B\overline{C}$ 第一次不与 $A\overline{M}$ 相交,此时 $BC \parallel\!| AM$,又显然 $BN \parallel\!| EM$,无论何种情形 E 可在 $\overline{AM}$ 上(假设所有情形中 $AM > AE$[7])。

如果点 C 在 $\overline{AM}$ 上趋于无穷,我们总有 $CD = CB$,也总有

① 在由这种符号阐述的关系式中,AB 和 CD 是在一个平面内的两条线,它被第三条线相交于 A 与 C,并且点 A 与 B 在一条线上,点 C 与 D 在同一方向的另一条线上。这种符号常用于 $A\overline{B}$ 与 $C\overline{D}$ 相交时,也用于它们不相交时,例如见 § 5,在那里 $EC \frown BC$。



② 在几何中至高无上的高斯用这符号表示同余数,由于不必担心结果的意义不明确,它也可表示几何的全等。——原注。

③ 波尔约使用了符号"$\frown$"。

④ 指角 ABN,"在 ABN 内"最初用括号括注。

⑤ 这是两条半线的关系,但作者常省略第二个字母上的标记号。

⑥ 这里作者说的是线段 BC,因为他设想点 C 沿 $A\overline{M}$ 运动,但对极限位置他写 $B\overline{C}$。

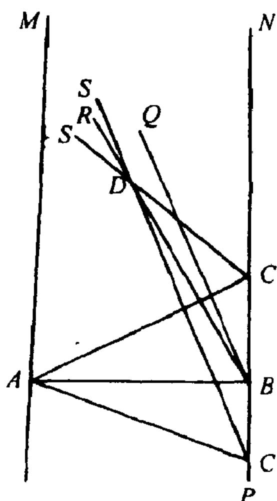
⑦ 这里似乎意味着 E 不在 $A\overline{M}$ 上 M 那边,或者 M 已被置于我们要选取的 E 以外的这条线上足够远的地方。

$$CDB=CBD<NBC$$

但 $NBC\to 0$，所以 $ADB\to 0$。

§ 2

如果 $BN \parallel AM$，则也有 $CN \parallel AM$[①]。



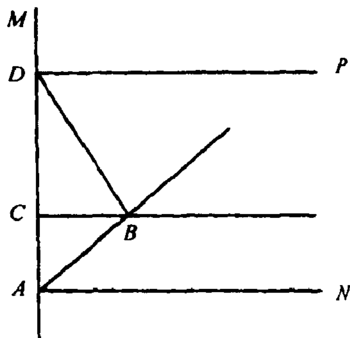
设 D 是 $MACN$ 中的某一点，如果 C 在 $B\overline{N}$ 上，由于 $BN \parallel AM$，则 $B\overline{D}$ 将与 $\overline{AM}$ 相交；$C\overline{D}$ 也将与 $A\overline{M}$ 相交；但如果 C 在 $B\overline{P}$ 中，设 $BQ \parallel CD$，则 $B\overline{Q}$ 落在 ABN 中（§ 1）[②]且与 $A\overline{M}$ 相交，从而 $C\overline{D}$ 与 $A\overline{M}$ 相交，因此 $C\overline{D}$ 与 $A\overline{M}$ 在两种情形中都相交，但 $C\overline{N}$ 不与 $A\overline{M}$ 相交，故总有 $CN \parallel AM$。

§ 3

如果 $BR \parallel AM$，$CS \parallel AM$，且 C 不在 $\overline{BR}$ 中，则 $B\overline{R}$ 与 $C\overline{S}$ 互不相交。

因为如果 $B\overline{R}$ 与 $C\overline{S}$ 有一个公共点 D，则将同时有 $DR \parallel AM$，$DS \parallel AM$（§ 2），从而 $D\overline{S}$ 将落在 $D\overline{R}$ 上（§ 1）且 C 落在 $\overline{BR}$ 上，与假设矛盾。

§ 4



如果 $MAN>MAB$，则对 $A\overline{B}$ 内的每一点 B 存在 $A\overline{M}$ 中特定的一点 C 使 $BCM=NAM$。

因为有一给定的 $BDM>NAM$（§ 1）[③]，也有 $MDP=MAN$，且 B 落在 $NADP$ 中，所

---

① 如图所示，C 是 BN 的一个点，在有图示时作者常省略这种说明。

② BN 不与 $C\overline{D}$ 相交，$C\overline{D}$ 也不与 BN 相交，甚至即使它旋转趋于 $B\overline{A}$ 时，只要这两条线相交于 B 点之下，都是如此。

③ 若设 D 在 $A\overline{M}$ 上离去，角 ADB 将趋于零，因此在某一时刻变为小于 NAM 的补角。此时如果 M 远于 D 的位置，将有 ADB 的补角 BDM 大于 NAM。

以如果沿 AM 移动NAM 直到 $\overline{AN}$ 抵达 $D\overline{P}$，某一时刻 $A\overline{N}$会经过 B，即有 $BCM=NAM$。

§5

如果 $BN \parallel\!| AM$（见§1中的图），则 $A\overline{M}$中有一点 F 使 $FM \triangleq BN$。

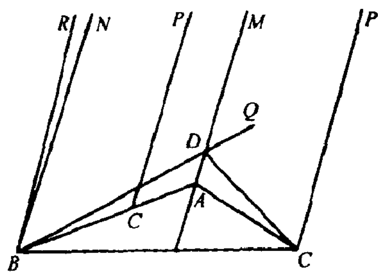
因为有 $BCM>CBN$（§1），如果 $CE=CB$，同样有 $EC=BC$，显然 $BEM<EBN$。设 P 经过 EC，角 BPM 称为 u，角 PBN 称为 v①，显然 u 起初小于 v（同位角）值，而后来大于它，由于不会没有一个角大于 BEM，小于 BCM 且与 u 在某一时刻相等（§4），所以 u 从 BEM 到 BCM 连续增大，同理 v 从 EBN 到 CBN 连续减小，因此 EC 上有确定的一点 F 使 $BFM=FBN$。

§6

如果 $BN \parallel\!| AM$，E 是$\overline{AM}$中的任一点，G 是$\overline{BN}$中的任意一点，则有 $GN \parallel\!| EM$ 且 $EM \parallel\!| GN$。

因为 $BN \parallel\!| EM$（§1），由此得 $GN \parallel\!| EM$（§2），如果再有 $FM \triangleq BN$（§5），则 $MFBN \equiv NBFM$。这样由于 $BN \parallel\!| FM$，也有 $FM \parallel\!| BN$，如前所述 $EM \parallel\!| GN$。

§7



如果 BN 与 CP 都$\parallel\!| AM$，且 C 不在$\overline{BN}$内，则有 $BN \parallel\!| CP$。

因为 $B\overline{N}$与 $C\overline{P}$互不相交（§3）。进一步 AM，BN 与 CP 或者在一个平面内，或者不在。在第一种情形中又分两种情况：AM 落在 $BNCP$ 内②，或不在其内。

① 如§1图所示，P 点应置于 A 点处。

② 注意点 B 与 N 取自一条线上，且点 C 与 P 取自同一方向的另一条线上，此处“在 $BNCP$ 内”指在$\overline{BN}$与$\overline{CP}$之间的全部带域内，并非单指在此带域的 BC 以上的部分。在此段中我们应置 CP 于§7中图右边并考虑整个图形位于一个平面内。在第二段中我们置 CP 于左边，在第三段中我们又置 CP 于右边，但这时三条线不在一个平面内。

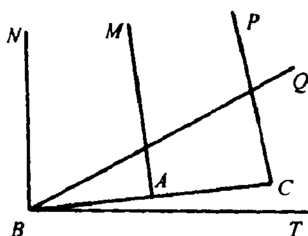
如果 AM,BN 和 CP 在同一平面内且 AM 落在 $BNCP$ 中,因为 $BN \parallel AM$,则 NBC 中的任意 $B\overline{Q}$与$\overline{AM}$相交于一点 D;并且由于 $DM \parallel CP$(§6),显然有 $D\overline{Q}$与$C\overline{P}$相交,所以 $BN \parallel CP$。

但是,如果 BN 与 CP 落在 AM 的同一侧,则它们中的一个,例如 CP 将在其他二者之间,即$\overline{BN}$与$\overline{AM}$之间,从而 NBA 中的任意 $B\overline{Q}$将与 $A\overline{M}$相交,也与$\overline{CP}$相交,所以 $BN \parallel CP$。

如果 MAB 与 MAC 形成一个角[①],则 CBN 与 ABN 的公共部分只有 $B\overline{N}$。但 $A\overline{M}$与 $B\overline{N}$在 ABN 中,因此 NBC 与 $A\overline{M}$没有公共部分。因为 $B\overline{D}$与 $A\overline{M}$相交,而 $BN \parallel AM$,所以通过 NBA 中任意 $B\overline{D}$划出的 $BC\overline{D}$将与 $A\overline{M}$相交,因此如果 $BC\overline{D}$绕 BC 移动[②] 直至它首次离开 $A\overline{M}$,最终 $BC\overline{D}$将落在 $BC\overline{N}$中,同理,它也将落在 $BC\overline{P}$中,因此 BN 落在 $BC\overline{P}$中。此时如果有 $BR \parallel CP$,因为也有 $AM \parallel CP$,BR 将因同一理由落在 BAM 中。又因 $BR \parallel CP$,BR 也将在 BCP 中,因此 $B\overline{R}$是 MAB 与 PCB 的公共部分,即是 $B\overline{N}$本身[③]。所以 $BN \parallel CP$。

如果有 $CP \parallel AM$ 且 B 点在$\overline{CAM}$之外,则 BAM 与 BCP 的交线 $B\overline{N}$同时$\parallel AM$ 与 CP[④]。

§8



如果 $BN \parallel CP$,且 $BN \simeq CP$(或简记为 $BN \parallel \simeq CP$),AM 在 $NBCP$ 中垂直平分 BC,则 $BN \parallel AM$。

因为如果 $B\overline{N}$与 $A\overline{M}$相交,由于 $MABN \equiv MACP$,$C\overline{P}$也将与 $A\overline{M}$相交于同一点。尽管 $BN \parallel CP$,这一点却

---

① 一个二面角,见第 590 页注②结尾。

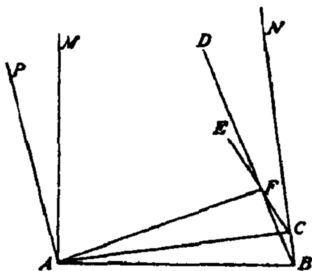
② 点 D 在 $A\overline{M}$上无限地移去,这使得 $B\overline{D}$与 $B\overline{N}$重合,$C\overline{D}$与 $C\overline{P}$重合。

③ 理由是:$\parallel AM$ 的 BN 位于 BCP 中,也在 BAM 中,因此是它们的交线,但以同一方式我们能说 $\parallel CP$ 的 BR 位于 BAM 中,也在 BCP 中,也是它们的交线。

④ 如果这第三种情形已在最初发生,其他两种情形可在§10 中更简洁优雅地解决。——原注

是 $B\overline{N}$与 $C\overline{P}$的公共点。但是如果 CBN 中的 $B\overline{Q}$与 $C\overline{P}$相交，则它也与 $A\overline{M}$相交，因此 $BN \parallel\!| AM$。

§ 9[①]



如果 $BN \parallel\!| AM$，$MAP \perp MAB$，且 NBD 与 NBA 在 MAP 所在的 $MABN$ 一边构成的角 $<R$，则 MAP 与 NBD 互交。

因为设 $BAM=R$，$AC \perp BN$（不论 B 是否落在 C 点），在 NBD 中设 $CE \perp BN$，由假设 ACE 将 $<R$，且 $AF \perp CE$ 时，AF 将落在 ACE 中。设 $A\overline{P}$是 $AB\overline{F}$与 $AM\overline{P}$的交线（A 是 $AB\overline{F}$与 $AM\overline{P}$的公共点），则 $BAP=BAM=R$（因为 $BAM \perp MAP$）。最后，如果 $AB\overline{F}$被置于 $AB\overline{M}$之上，A 与 B 保持固定[②]，$A\overline{P}$将落在 $A\overline{M}$上。由于 $AC \perp BN$，$AF<AC$，显然 AF 将终止于 $B\overline{N}$的这一边，并且 BF 将落在 ABN 中，但是因为 $BN \parallel\!| AM$，$B\overline{F}$将在这个位置与 $A\overline{P}$相交，而且也是在它们的第一种位置 $A\overline{P}$与 $B\overline{F}$将互交，交点是 $MA\overline{P}$与 $NB\overline{D}$的一个公共点，所以 $MA\overline{P}$与 $NB\overline{D}$互交。

继而容易推出 $MA\overline{P}$与 $NB\overline{D}$彼此互交，如果它们与 $MABN$ 构成的内角之和 $<2R$[③]。

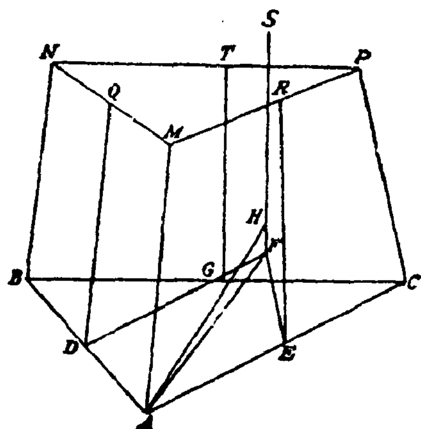
---

① 对此节中的字母使用要特别注意，作者有时用一字母命名一条线或一个平面，后来对此字母有更特殊定义，例如在开始 $\overline{BN}$与 $\overline{AM}$是任意给定的，$BN \parallel\!| AM$，但 A 与 B 在这些线上都不是任意给定的，因为稍后取 $AB \perp AM$。作者称 $MA\overline{P}$为半平面，后来又使 $A\overline{P}$为此半平面与另一个 ABF 的交线，在他使 $AF \perp CE$ 前两次提到 $NB\overline{D}$，于是显而易见，当划过 F 时确定 $B\overline{D}$。

② 应该说，如果 $AB\overline{F}$绕 AB 旋转以便落在 $AB\overline{M}$上。

③ 如果作者的意思包括了两个平面都不⊥MABN，则至少可以说他没有证明它，见第 596 页注①。

§10



如果 $BN ||| \simeq AM$，$CP ||| \simeq AM$，则也有 $BN ||| \simeq CP$[①]。

MAB 与 MAC 或者构成一个角，或在一个平面内。

如果是前者，设$\overline{QDF}$垂直平分线段 AB，DQ 将$\perp AB$，且有 $DQ ||| AM$（§8）。类似地，如果$\overline{ERS}$垂直平分 AC，则 $ER ||| AM$，因此 $DQ ||| ER$（§7）。由此易证（通过§9）$\overline{QDF}$与$\overline{ERS}$彼此互交[②]，交线$\overline{FS} ||| DQ$（§7），且由于 $BN ||| DQ$，也有 $FS ||| BN$。此时由于$\overline{FS}$上的每一点都有 $FB=FA=FC$[③]，FS 落在垂直平分线段 BC 的平面 TGF 中。但是（由§7），由于 $FS ||| BN$，也有 $GT ||| BN$，同理可证 $GT ||| CP$，继而 GT 垂直平分线段 BC，且有 $TGBN \equiv TGCP$（§1）[④] 与 $BN ||| \simeq CP$。

如果 BN，AM 与 CP 在一个平面内，设 FS 落在此平面外，$FS ||| \simeq AM$，则（通过前述）$FS ||| \simeq BN$，$FS ||| \simeq CP$，因而 $BN ||| \simeq CP$。

§11

设点 A 与所有这样的点 B 的复合形为 F，其中任一个 B 满足：若 $BN ||| AM$，则 $BN \simeq AM$；另 F 的由任意包含线 AM 的平面所截的线称为 L。

---

① §7 中已证明了第一个符号$|||$表示的定理，此处仅证符号$\simeq$表示的角的等量关系。

② §9 的定理似乎不能直接用于这里的证明，因为这两个平面都不垂直于 $D\overline{Q}$ 与 $E\overline{R}$的平面，但易于给出一个类似于§9 中的证明。

③ FS 的每一点与 A，B 和 C 等距离。

④ 如果 $TGCP$ 置于 $TGBN$ 之上（绕 TG 旋转），GC 落在 GB 上，CP 与 BN 由相同的点画出，它们都$|||GT$，由§1，两者必重合。

在任意$\parallel AM$的线中,F有且仅有一个点,显然L被AM分为两个全等的部分。设$\overline{AM}$称为L的轴,也显见任意包含AM的平面有一个以$A\overline{M}$为轴的L。在所考虑的平面中任意这样的L叫作以$A\overline{M}$为轴的L。如果L绕AM旋转,显然F将被画出,$A\overline{M}$称为轴,反之F归于轴$A\overline{M}$。

§ 12

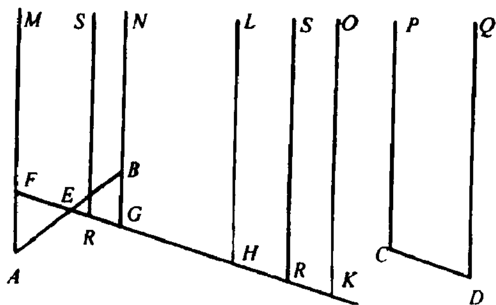
如果B是$A\overline{M}$的L中的任意点,$BN \parallel \triangleq AM$(§ 11),则$A\overline{M}$的$L$与$B\overline{N}$的$L$重合。

为了区别,设$B\overline{N}$的L称为l,C是l中的任一点,$CP \parallel \triangleq BN$(§ 11)。由于也有$BN \parallel \triangleq AM$,则有$CP \parallel \triangleq AM$(§ 10),所以$C$也将落在$L$中,如果$C$无论在$L$中的哪里都有$CP \parallel \triangleq AM$,则$CP \parallel \triangleq BN$(§ 10),$C$也将落在$l$中(§ 11)。因此$L$与$l$相同,任意的$B\overline{N}$也是$l$的轴,且与$L$的所有轴有$\triangleq$关系。

同样的情形,显然F也是相同的。

§ 13

如果$BN \parallel AM$,$CP \parallel DQ$,且$BAM+ABN=2R$,则有$DCP+CDQ=2R$。



设$EA=EB$,$EFM=DCP$(§ 4)。由于$BAM+ABN=2R=ABN+ABG$,则将有$EBG=EAF$;如果也有$BG=AF$,则$\triangle EBG=\triangle EAF$,$BEG=AEF$且$G$落在$F\overline{E}$中,于是$GFM+FGN=2R$(因为$EGB=EFA$)。又由于$GN \parallel FM$(§ 6),所以如果$MFRS \equiv PCDQ$,则$RS \parallel GN$(§ 7),$R$落在$FG$内或者落在$FG$外(如果$CD$不$=FG$,事情是显然的)。

Ⅰ. 第一种情形,因为$RS \parallel FM$,所以FRS不$>2R-RFM=FGN$。但是由于$RS \parallel GN$,也有FRS不$<FGN$,因此$FRS=$

FGN，且

$$RFM+FRS=GFM+FGN=2R$$

所以 $DCP+CDQ=2R$。

Ⅱ. 如果 R 落在 FG 之外，则 $NGR=MFR$，可设 $MFGN=NGHL=LHKO$，继续下去直至 FK 第一次 $=$ 或 $>FR$。这时 $KO \parallel HL \parallel FM$(§7)。如果 K 落在 R 上则 KO 落在 RS 上(§1)，且 $RFM+FRS=KFM+FKO=KFM+FGN=2R$；但如果 R 落在 HK 中，则(由 Ⅰ) $RHL+HRS=2R=RFM+FRS=DCP+CDQ$。

§14

如果 $BN \parallel AM$，$CP \parallel DQ$，$BAM+ABN<2R$，则也有 $DCP+CDQ<2R$。

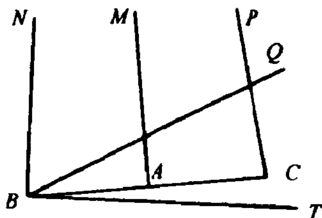
因为如果 $DCP+CDQ$ 不 $<2R$，则由(§1) $=2R$，因而(由§13)也有 $BAM+ABN=2R$，与假设矛盾。

§15

慎重仔细地考虑§13 和§14 的结论，设依赖于欧几里得公理Ⅺ的真实性假设的几何体系为 Σ，而另一个构筑于相反假设的几何体系为 S，所有未明确声明是在 Σ 中或 S 中的命题应理解为绝对地宣布：无论 Σ 还是 S 为真，它们都是成立的。

§16

如果 AM 是任意 L 的轴，则 L 在 Σ 中是一条 $\perp AM$ 的直线。



因为在 L 的任意点 B，设轴是 BN。在 Σ 中

$$BAM+ABN=2BAM=2R$$

因此 $BAM=R$，又如果 C 是 $\overline{AB}$ 中的任意点，且 $CP \parallel AM$，则(由§13) $CP \simeq AM$ 而且 C 在 L 中(§11)。

但是在 S 中不存在 L 或 F 中的三个点 A,B,C 在一条直线中。

因为轴 AM,BN 或 CP 中的一个(例如 AM)落在其它两个中间,则(§14)BAM 与 CAM 都$<R$。

§17

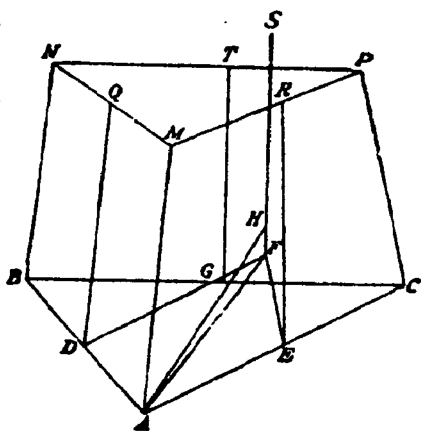
L 在 S 中也是一条线而 F 也是一个面。

因为(由§11)任意一个垂直于轴 $A\overline{M}$的平面通过 F 的任意点将与 F 相交于一个圆的圆周中。此圆的平面不垂直于任何其它轴 $B\overline{N}$(§14)。设 F 绕 BN 旋转,F 的每一个点将保持于 F 中(§12),并且 F 的由一个不垂直于 $B\overline{N}$的平面所得截口将画出一个面,无论怎样点 A 与 B 在 F 中(§12),F 能以 A 落在 B 这样一种方式做得与它自己全等。所以 F 是一个始终一致的面。

因此显然(§11 与§12)L 是一个始终一致的线①。

§18

在 S 中任意一个经过 F 的一个点 A 且不垂直于轴 AM 的平面与 F 的截线是一个圆的圆周。



设 A,B,C 是这种截线上的三个点,BN 与 CP 是轴。$AMBN$ 和 $AMCP$ 将构成一个角,否则由 A,B,C 确定的平面(§16)将包含 AM,与假设矛盾。因此垂直平分 AB 与 AC 的两个平面将互交(§10)于 F 的一个轴 FS 中,且 $FB=FA=FC$。设 $AH\perp FS$,绕 FS 旋转 FAH,A 将画出半径为 HA 并经过 B 与 C 的一个圆,它同时位于 F 与 $\overline{ABC}$ 中,并且 F 与 $\overline{ABC}$ 除了 OHA 外无任何公共部分。

---

① 限定于对 S 的证明不是必要的,可容易地作出这种陈述,使之绝对地(对 S 和 Σ)成立。——原注

线 L 的 FA 部分(类似一个半径)的末端在 F 中绕 F 旋转[①]描画出 OHA 也是显然的。

§19

落在 L 的平面内与 L 的轴 BN 垂直的 BT 在 S 中相切于 L。(见§16中的图)。

因为 L 除 B 以外在 $B\overline{T}$ 中无其它点(§14)。但如果 BQ 落在 TBN 中,则过 BQ 且垂直于 TBN 的平面与 $B\overline{N}$ 的 F(形成的)平面截线的中心明显地位于 $B\overline{Q}$ 中[②],如果 BQ 是直径,显然 $B\overline{Q}$ 与 $B\overline{N}$ 的 L 相交于 Q 内。

§20

通过 F 的任意两点,一条线 L 被确定(§11与§18),并且,因为从§16与§19来看,L 垂直于其所有的轴,所以在 F 中任意 L 角等于通过它自身的垂直于 F 的边形成的平面角。

§21

若两条在同一 F 中的 L 线与第三条 L 线 AB 构成的内角和 $<2R$,则这两条线彼此互交。(在 F 内 $\overline{AP}$ 是指 L 画过 A 与 P,而 $A\overline{P}$ 是指其一半开始于 A 且 P 落在其中,见§9中的图。)

因为如果 AM 与 BN 是 F 的轴,则 $AM\overline{P}$ 与 $BN\overline{D}$ 彼此相交(§9)[③],F 截于它们的相交处(§7与§11),所以 $A\overline{P}$ 与 $B\overline{D}$ 彼此相交。

由此看来,以 L 线取代直线的位置,公理Ⅺ及所有在平面几何与三角学中断言的事情绝对地在 F 上推出是显然的。所以三角函数如同 Σ 中相同的意义下被接受,在 F 中半径是 L 线 $=r$ 的圆的圆周 $=2\pi r$,同样地在 F 中 $\odot r=\pi r^2$(在 F 中 π 是 $1/2\odot 1$ 或 $3.1415926\cdots$)。

---

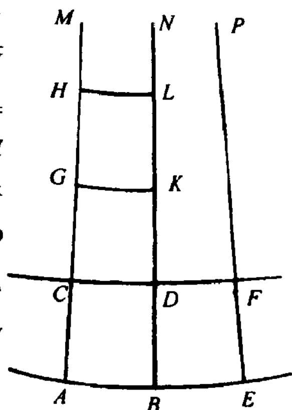
① 在面 F 中绕点 F,最初没有这种混乱,因为点由小写德文字母表示,此处的点 F 位于 FS 上且使 $AM\simeq FS$。

② 显然是因为全部图形关于平面 TBN 是对称的,因此截线关于线 BQ 是对称的。

③ 在§9中仅证明了当其中一个角是直角的情形。

§ 22

如果$\overline{AB}$是$A\overline{M}$的L,C在$A\overline{M}$内,由直线$A\overline{M}$和L线$A\overline{B}$构成的角CAB先沿$A\overline{B}$后沿$B\overline{A}$移向无穷,则C的轨迹$\overline{CD}$是$C\overline{M}$的L。



因为(称后者为l),设D是$\overline{CD}$中的任一点,$DN \parallel CM$,L的点B落在$\overline{DN}$中,$BN \triangleq AM$,$AC=BD$,故也有$DN \triangleq CM$,所以D将在l中,但如果D是在l中[①]且$DN \parallel CM$,B是L与$\overline{BN}$的公共点,则$AM \triangleq BN$且$CM \triangleq DN$,由此$BD=AC$是明确的,而且D落在点C的轨迹中,l与$\overline{CD}$是相同的,我们通过$l \parallel L$指定这样一个l。

§ 23

如果L线$CDF /\!/ ABE$(§ 22),$AB=BE$,AM,$B\overline{N}$与$E\overline{P}$是轴,则显而易见$CD=DF$;又如果任意三个点A,B和E属于AB,且$AB=n \cdot CD$,则有$AE=n \cdot CF$,所以(对不可通约的AB,AE和CD也易见),

$$AB : CD = AE : CF$$

并且$AB : CD$独立于AB而直接由AC确定,设这一量由大写字母(如X)标记,而用同名的小写字母(如x)标记AC。

§ 24

对任何x与y,有$Y=X^{\frac{y}{x}}$(§ 23)。

因为两个字母x与y中之一将是另一个的倍数(例如y是x的倍数)或不是。

如果$y=nx$,设$x=AC=CG=GH$等等,直至使$AH=y$,设$CD /\!/ GK /\!/ HL$,则(§ 23)

---

① 这是一个新D,起初他取C的轨迹上的任意点,证明了它在l上,后来又取l上的任意点,并证明它是C的轨迹上的一个点,此处$\overline{CD}$不必是直的。

$$X=AB:CD=CD:GK=GK:HL$$

继而

$$\frac{AB}{HL}=\left(\frac{AB}{CD}\right)^{n}$$

或

$$Y=X^{n}=X^{\frac{y}{x}}$$

如果 x 与 y 是 i 的倍数,设 $x=mi$,$y=ni$,则由前述 $X=I^{m}$,$Y=I^{n}$,所以 $Y=X^{\frac{n}{m}}=X^{\frac{y}{x}}$

同理,容易扩展到 x 与 y 是不可通约的情形,但如果 $q=y-x$,则显然有 $Q=Y:X$。

至此,在 Σ 中对任意 x 有 $X=1$ 是明显的;但在 S 中,$X>1$。并且对任意 AB 与 ABE,存在一个 $CDF /\!/ ABE$,使得 $CDF=AB$。由此 $AMBN \equiv AMEP$①,虽然后者是前者的一个倍数。这确实奇异,但显然不能证明 S 的荒谬性。

(王青建 译　沈永欢 校)

① $AMBN$ 指位于两条完整线 AM 与 BN 之间的平面部分,$AMEP$ 指位于完整线 AM 与 EP 之间的部分(见第590页注②)。

73. 黎曼:《关于几何基础中的假设》

1854 年,黎曼在格丁根的就职演说《关于几何基础中的假设》(Über die Hypothesen,welche der Geometrie zu Grunde liegen),推广高斯的内蕴几何思想,首先提出了 n 维流形的概念,定义了流形上邻近两点 (x_i) 与 (x_i+dx_i) 间的距离 $ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx_i\, dx_j$,并以此为出发点建立了一般的黎曼几何。黎曼几何不仅包括欧几里得几何和各种非欧几何作为其特例,而且引起了整个空间观念的深刻变革。黎曼几何的进一步发展尤其是微分形式与张量分析的研究,使它在现代物理学中获得了辉煌的应用。黎曼的演讲后正式发表于 Abhandlungen der Ges. der Wiss. zu Göttingen,XⅢ,pp. 1~20,1868,亦载 Bernhard Riemann Gesammelte Mathematische-Werke,(2nd. ed. 1892),pp. 272~287. 以下是黎曼这篇论文的全译,转译自 D. E. Smith:A Source Book in Math. pp. 411~425.

关于几何基础中的假设

研讨的方案

众所周知,几何中预先假设了空间的概念,并且假定了在空间中进行构造的最基本的观念。但它仅给出它们名称上的定义,而从本质上规定它们的方法却是以公理的形式出现的。这些预先给出的假设之间有些什么关系却不甚明了;我们既不清楚这些关系是否或在多大程度上是必需的,也不清楚它们是否早已存在。

从欧几里得到勒让德这位当代最为声名显赫的几何著作家,

这种不甚明了的状态始终没有被在几何方面工作的数学家和哲学家搞清楚。这或许是由于包括了普通空间的大小观念在内的多重广义尺度的一般概念完全没有被仔细考虑的缘故。因此我首先想做的就是，从数量的一般观念出发去建立一个多重广义尺度的概念。由此可知，一个多重广义尺度应包容各种各样的度量关系，而通常的空间仅是三重广义尺度的一个特殊情形。从它得到的必然结论是，几何的命题不是从数量的一般概念推导出来的，而那些通常空间的不同于由三重广义尺度所能得到的性质只能来自经验。这便引出了下一个问题，即寻求能规定空间度量关系的一些最简单的事实；这不是个在性质上十分明确的问题，因为可以举出若干个由简单事实组成的体系，它们都足以把空间的度量关系确定下来。对于当前所要阐明的问题而言，正如其他一些体系一样，欧氏的这个体系同样并不是必然的，而仅仅具有由经验上得到的确定性；它们是一些假设；因而人们可以问及它们的可靠性：哪一个在观察的范围内最为真实；而后确定将它们推广到观察范围之外时的可接受性，不仅仅在大到无法测量时也在小到无法测量的情形。

I. n 度广义流形的概念[1]

在试图首先解决这些问题中的第一个，即建立多重广义尺度的概念前，我感到特别需要一个宽容的批评。因为解决这个问题的困难主要是概念上而非构造上的，而我对这个困难的哲学方面思考得很少；况且除了枢密顾问高斯发表在他的关于二次剩余的第二篇论文及在他写的纪念小册子之中的非常简短的提示和 Herbart 的一些哲学研究外，我不能利用任何以前的研究。

1[2]

只有具有了一个包容各种不同的界定方式的一般性概念之后才有可能谈及数量的观念。这些界定方式或者构成连续的流形或

---

① 黎曼用的“流形”一词与现代通行的概念有出入。更多地含有这个词的原意，即“多种样式的集合”。

② 本节及后几节均是对度量的哲学思考，所用的词“概念”“观念”“界定”等等均是哲学上的用语。

者构成离散的流形，这取决于各个方式间的变化是否连续；构成连续流形的每个方式称为点，构成离散流形的称作元素。由元素构成了离散流形的那种概念有很多，以至于对任给的事物都可以找到一个相应的概念。至少在更加高度扩展的语言中是这样的，因为它包容了所有这些概念(有的数学家在离散数量的研究中已能毫不犹豫地从这样的假定出发，即给出的事物被认作是同一类型的)；另一方面，在日常生活中能给出连续流形概念的机会很小，以至于颜色和物体的位置可能是产生连续流形仅有的简单例子。产生和发展连续流形机会最多的首先出现在高等数学中。

由一个标记或者由一条边界确定的流形中的特殊部分称为量块①。这些量块间数量的比较在离散情形由数数给出，在连续情形则由测量给出。测量要求参与比较的量能够迭加；这就要求有一种能将一个作为标准的量进行移动的方法，从而可以测量其它的量。否则人们只能比较当一个量是另一个量的一部分时的两个量，并且只有"多"或"少"的概念，而没有"多多少"的概念。在连续情形，进行下去的研究构成了数量科学的一个广泛分支，这个分支独立于测量．在这个分支中，大小的观念就是指流形的区域，而不是那种独立于位置而存在的量，也不是由一个固定单位表出的量。这样的研究对数学的一些分支很有必要，例如处理多值解析函数，而且大概正是这样的研究造成了著名的阿贝尔定理和拉格朗日、蒲丰及雅可比对一般微分方程理论的贡献还迟迟没有得到有意义的发展的主要原因之一。从广义尺度的学说出发，由于所需要的东西均含在概念自身中而无须作进一步的假设就是以直接得到下面两个推论：第一，它使高维广义流形这一概念的产生变得明白易懂；第二，可根据定量的方法来确定所给流形中的位置并得到 n 维扩张的本质特点。

2

在一个由界定方式构成了连续流形的那种概念中，如果我们

---

① 原词"quanta"是"量子"一词的复数形式。

从一个界定方式通过一种确定的方式运动到另一界定方式，则我们所经过的点构成一个简单的广义流形。这个简单流形的本质特点是从其上任何一点出发的连续运动只有两个可能的方向，向前或者向后。如果我们想象一个简单流形也通过一种确定的方式运动到另一个完全不同的简单流形，所谓确定的方式是指每个点变到另一个流形的确定的点，如此得到的所有规定方式构成了一个广义二维流形。相似地，当我们想象一个二维流形通过一种确定的方式运动到另一个完全不同的二维流形时，我们得悼一个三维流形，而且如何把这样的过程进行下去是非常明了的。在上述过程中，如果我们认为考虑的对象是变化的而不是将概念当作固定的，则上述的构造过程可以刻划为从具有 n 个自由度的变量和具有一个自由度的变量合成一个具有 $n+1$ 个自由度的变量的过程。

3

现在我将从相反的一面来说明我们怎样将在一个给定区域上的变量分成一个具有一个自由度的变量和一个自由度的较小的变量。我们考虑一个一维流形的可变的一段，从一个固定的起点或原点计算起，从而可以比较在不同点的值，换句话说，我们在一个给定的流形上给出了一个同位置有关的连续函数，沿着变动的每一段不取常值。每一个具有相同函数值的点的集合构成具有比给定流形较低维的流形。这些具有较低维数的流形随着函数值的改变而从一个连续地运动到另一个。我们可以进一步假设这些流形都是由其中固定的一个生成的。粗略地讲是这样生成的：从这个固定流形的每一个点可以运动到其它流形上一个确定的点；当然也有例外的事情发生，并且对这种情况的研究也很重要，但现在我们不必去考虑。如此确定给定流形中点的位置就简化成确定一个数量和具有较低维数的流形中点的位置。现在容易看出，如果给定的流形是 n 维的，则那个有较低维数的流形是 $n-1$ 维的。重复 n 次这样的过程，一个 n 维流形中点的位置就由 n 个数量来确定，从而在一个给定流形中确定点的位置可简化到由有限个数量来确定。但是也有一些流形，要确定其点的位置所需的不是有限个数量，而是

一个无限序列或是具有流形上点那么多的数量来确定。例如一个给定区域上的所有可能的函数，一个立体所有可能具有的形状构成的流形等等。

Ⅱ. n 维流形上可容许的度量关系

——假设曲线具有与其所在位置无关的度量，即每条曲线均能被其他曲线所度量

现在，n 维流形的概念已经建立起来了，并且知道它的本质特点是其上点的位置可以用 n 个数值来确定。接着，就上面提到的第二个问题，我们要讨论一个流形能容许的度量关系和确定度量关系的充分条件。这些度量关系只能通过一些抽象的尺度观念来讨论，且只能通过公式相连来表达。在某些假定下，我们还可以把它们分解为一些具有各自几何意义的关系，从而使计算的结果也有几何意义。如果要得到一个坚实的基础，用公式来进行抽象讨论必定是不可避免的，但得到的结果却可以用几何的形式表达。关于这个问题的两个方面的基础包含在枢密顾问官高斯关于曲面的著名论文中。

1

测量要求尺度不依赖于位置，即物体的状态，而它却有多种表现形式。这个要求正是我要建立的假设，即每条曲线有一个不依赖于其状态的长度从而曲线可以相互测量。如果位置的确定归结为用数值来确定，那么一个给定的 n 维流形中点的位置可以由 n 个变量 x_1, x_2, x_3 直到 x_n 表出。确定一条曲线就化成把这些变量 x 表成某个单个变量的函数。接下来的问题是建立曲线长度的数学表达式，为此，x 一定要理解成是由单位表出的量。我将在一些限定条件下解决这个问题。首先我只注意那些具有增量 dx 的曲线增量，即 x 的相应的改变是连续变化的情形。我们认为曲线分成了一些小线段，每一小线段的增量 dx 当作常量。问题就化成给出小线段长度在每一点的一般表达式，这个表达式包含了量 x 和 dx。第二点我假定一个小线段上的所有点都经过同样的无穷小变化时，小线段的长度在不计其二阶量下保持不变，这表明，如果所

有的 dx 以同样的比例增加，则小线段长度也以同样的比例变化。在这些假定下，小线段长度可能是量 dx 的某个一阶齐次函数，而且当所有的 dx 改变符号时保持不变，其系数是 x 的连续函数。为了寻找小线段长度的最简单的表达式，我首先去找与离小线段起点有相同距离的点构成的 $n-1$ 维流形的表达函数，或者说我要找一个有关位置的连续函数，它能把不同的位置区别开。这个函数在离开原点的各个方向上必须是减函数或者增函数；我假定它在各个方向上均是增函数从而在原点有一个最小值。如果这个函数在原点的一阶导数和二阶导数都是有限的，那么一阶导数一定为零而二阶导数非负；假定二阶导数在原点附近是正的。这个函数在原点的展开式中的二阶项当 ds 不变时也保持不变；并且当 dx 同时也是 ds，以同一比例增长时，它以平方的形式增长；即它等于一个常数乘以 ds^2，相应地 ds 等于一个处处为正的 dx 的二次齐次函数的平方根，并且系数是 x 的连续函数。在空间情形，如果我们用直角坐标系，则有 $ds=\sqrt{\sum(dx)^2}$。空间的度量关系就包含在这个最简单的情形中。其次简单的情形可能是 ds 能用四次微分形式的四次方根表达的流形。对这个比较一般的情形的研究实际上并不要求本质上不同的方法，但这样的研究比较费时间并对空间没有增加新的认识，而计算的结果也缺少几何意义；所以我把自己的研究限制在那些使 ds 能用二次微分形式的平方根表出的流形。当用 n 个新的变量来代替原来的 n 个变量，我们可以把 ds 的表达式变换成新的相似表达式。然而我们通过这种方式不能把一个 ds 的每一种表达式变换成其它变量下的每一种形式，因为 ds 的表达式包括 $n\cdot\frac{n+1}{2}$ 个系数，它们是这些独立变量的任意函数；通过引入 n 个新的变量，我们只能使它们满足 n 个条件，从而只能使其中的 n 个系数等于指定的量。余下的 $n\cdot\frac{n-1}{2}$ 个系数由这个流形度量性质完全决定，从而要求 $n\cdot\frac{n-1}{2}$ 个与位置有关的函数来决定它的

度量关系。象平面和空间那样的流形，其中 ds 可以表成 $\sqrt{\sum(dx)^2}$ 的形式，仅构成我们在这里讨论的流形的特殊例子；它们值得有一个特殊的名字，我称 ds 的平方可以表成整体一次微分式的平方和的流形为平坦流形。为了要得到具有这种表示形式的流形与其他流形间本质上的差别，必须摆脱那些由于表达方式而出现的差异。因此我们可以通过确定的原理来选择新变量的办法来做到这一点。

2

为此，假设已经构造了一个从给定点出发的最短曲线的体系；任何点的位置可由它所在的最短线的初始方向和沿该最短线从给定点到该点的距离决定，从而可由增量 dx^0 表出，即在原点的 dx 和曲线的长度 s 比的极限代替 dx^0，我们可以引入 dx^0 的线性组合 $d\alpha$ 使得在原点的 $ds=\sqrt{\sum(dx)^2}$，所以独立的变量是 s 和增量 $d\alpha$。最后我们再选择和 $d\alpha$ 成比例的变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代替 $d\alpha$ 使得 $s^2=\sum(x)^2$。如果我们选择了这样的变量，那么对于 x 的无穷小的值，$ds^2=\sum dx^2$，但是 ds^2 的在原点的展开式中下一个阶的量是 $n\cdot\frac{n-1}{2}$ 个量 $(x_1dx_2-x_2dx_1),(x_1dx_3-x_3dx_1),\cdots,(x_{n-1}dx_n-x_ndx_{n-1})$ 的二次齐次式，从而是一个四阶的无穷小量。所以当我们用三个顶点的坐标分别是 $(0,0,\cdots,0),(x_1,x_2,\cdots,x_n),(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$ 的无穷小三角形的面积的平方去除上面提到的四阶无穷小量，我们就得一个有限值。当 x 和 dx 经过线性组合或者从原点分别到 x 和 dx 的两条最短线在同一个曲面片中，这个有限值保持不变，从而我们得到的数值仅与曲面片所处的位置和方向有关。如果流形是平坦的，即 $ds^2=\sum(dx)^2$，这个数值就显然是零；从而在一般流形上，这个数值可以用作衡量曲面片在这一点偏离平坦的程度。当这个数值乘以 $-3/4$ 时得到的值就是枢密顾问高斯所谓的曲面的曲率。

为了确定一个以上述方式表示的 n 维流形的度量关系，找出

前面提及的 $n\cdot\frac{n-1}{2}$ 个与位置有关的函数是必要的；所以当在每一点的 $n\cdot\frac{n-1}{2}$ 个曲面片方向的曲率给定，并且在这些曲率间没有等式的关系存在（确实在一般情形下这样的事情不会发生），那么这个流形的度量关系就确定了。对于 ds 可以表成二次微分式的平方根的流形，其上的度量关系不依赖于坐标变量的选择而如上面的方式完全确定下来。对于 ds 是用不怎么简单的形式如四次微分式的四次方根表出的那些流形，用相似的方法也能做同样的事情。在这个情形下，ds 一般不能简化成二次微分式的平方根，从而衡量偏离平坦的程度在前一种情形是一个二维的无穷小量，在后一种情形是一个四维的无穷小量。前一种情形的这种特殊现象可以叫作在最小部分上的平坦性。目前而言，我们已经仔细讨论过的流形最特殊的地方是：二维流形的度量关系可以用曲面来几何地表出；高维流形的度量关系可以简化到它们中曲面片的情形，对此还需要一个简明的讨论。

3

关于曲面，只与它上面的路径长度有关的内在度量常常和曲面在外围空间中点的状态联系在一起。但是我们可以通过考虑保持曲面上曲线的长度不改变的曲面形变来从外围空间的束缚中解放出来，即考虑曲面的没有伸缩而可以弯曲的任意变形，并且认为这样获得的曲面彼此等价。例如，任意的柱面或锥面与平面等价，因为它们可以由平面通过保持内在的度量的形变获得。从而与平面有关的所有定理，即所有的平面几何，在柱面和锥面上也有效。另一方面，它们和球面有本质上的区别，球面不通过有伸缩的形变是不能变成平面的。根据前面的讨论，如曲面那样，在 ds 可以用二次微分式的平方根表出的广义二维流形上，每一点的度量关系可以由这一点的曲率来刻划。对曲面来说，在一点的曲率值可以形象地解释成曲面在这一点的两个主曲率的乘积，或由下面的事实得到形象的解释：曲率值和在这点邻近的由最短线构成的无穷小三角形面积的乘积等于这个无穷小三角形的内角和超过两个直角的

部分的一半(这时用弧度作为测量单位)。前一种解释蕴含着曲面的两个主曲率半径的乘积在曲面不伸缩的形变时是不改变的这个定理,后一种解释蕴含着在每一点的无穷小三角形的内角和超过两个直角的部分和它的面积成比例。为了给出 n 维流形在一点的一个曲面方向的曲率的形象解释,我们必须由这样一个原则出发,即从一点发出的最短线被初始方向完全确定。从而我们将位于同一个曲面片从一点发出的所有初始方向延长得到所有的最短线,这就给出一个确定的曲面;这个曲面在原点有一个确定的曲率,这个曲率就等于这个 n 维流形在这一点的沿着这个曲面方向的曲率。

4

在把以上的讨论应用到空间之前,有必要对平坦流形,即 ds^2 可以表成整体微分形式的平方和的流形作一些一般性的考察。

在一个 n 维平坦流形上,每点的沿每个曲面方向的曲率均为0;但由前面的讨论,为了决定度量关系只须知道在 $\frac{1}{2}n\cdot(n-1)$ 个独立的曲面方向上曲率为0就可以了。曲率处处为0的流形可以看作曲率处处为常数的流形的特例。曲率处处为常数的流形的共同特征如下:其上的图形可以不伸缩地在流形上运动。当流形的曲率在任一点和任一方向不都是一样时,图形不能自由地移动和旋转。另一方面,度量性质由曲率完全确定;从而常曲率流形的度量性质在每点和每一方向都是一样的,图形的构造从那一点开始都是一样的;所以在一个常曲率流形上,图形可以被放在任意的位置上。这些流形的度量关系仅与曲率的值有关,我们可以指出当考虑 ds 的解析表达式时,如果设曲率等于 α,那么 ds 可取下面的形式:

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x_i^2}\cdot\sqrt{\sum(dx_i)^2}$$

5

我们对常曲率曲面的思考值得给出这些曲面的一个几何描述。容易看到正常曲率的曲面可以铺在半径是曲率平方根的倒数

的球面上;然而为了浏览常曲率曲面的多样性,我们让其中的一个具有球面的形状,其它的曲面具有旋转曲面的形状并且和这个球面在赤道上接触:如果曲面的曲率比这个球面的曲率大,则它将在这个球面内侧和球面接触,而且具有如环面上离轴较远的那部分曲面的形状;它们可以铺在一个半径较小的球面上,但复盖的次数不止一次。具有较小正常曲率的曲面可以由较大半径的球面上切除由两个大半圆界定的区域,然后粘合边界得到。零曲率曲面是和赤道相切的柱面,具有负常曲率的曲面和这个柱面从外侧接触,而且具有如环面上离轴较近的那部分曲面的形状。

如果我们把这些常曲率曲面想像成在它们上移动的曲面片的轨迹,就象空间是物体移动的轨迹那样;则这些曲面片在这些常曲率曲面上可以不伸缩地移动。具有正常数曲率的曲面可以由它上面的曲面片以不伸缩也不弯曲地移动构成,即球形曲面;然而对于负曲率曲面却并非如此。对于零曲率的曲面,除了曲面片的形状不随位置而改变这个性质以外,方向也不随位置而改变;对于其他常曲率曲面,这个性质是不成立的。

Ⅲ. 对空间的应用

1

在关于 n 重广义尺度中确定度量关系的方式的讨论之后,可以来叙述在通常空间中规定度量关系的充分必要条件了,这时预先假定了曲线与位置无关,线素可由二次微分表达式的平方根表示,即假定了最小部分的平坦性。那么就可以给出确定空间度量关系的充分必要条件。

首先,这些充分必要条件可以表述为:在任何一点的三个曲面方向的曲率等于零,从而度量关系由三角形的内角和等于两直角给出。

其次,如果我们象欧几里得那样假定曲线和立体的存在均与其状态无关,那么空间任一点的曲率都是一样的,而且任一个三角形的内角和都是一样的。

最后,代替假定曲线的长度不依赖于其所处的位置和方向,我

们甚至可以假定曲线的长度和方向独立于曲线所处的位置。相对于这个假定,位置的改变和差别可由三个独立的单位量决定的数组给出。

2

在前面的讨论过程中,首先把大小观念的各种推广扩充(或各种范围)的关系与测量关系区别开来,并发现对同一种推广可以有不同的度量关系。然后,去寻找规定度量的简单体系,这个体系完全确定了空间的度量关系,而有关这个度量关系的所有定理是这个体系的必然推论。现在还要考虑的问题是,凭经验怎样,以何种程度,在什么范围内能保证这些假定为真。与此相关地,这些扩充关系与测量关系之间存在着本质的差异:前者中所有可能的情形构成离散流形且由经验得到的论断从来不十分可信但是它们并不缺乏准确性;后者中所有可能的情形构成连续流形,每个基于经验的规定总是不准确的,然而从总体上看却几乎是完全正确的。当这些经验性的界定推广到观察的界限之外,到了大或小到不可测量的地步时,这种相反的情形是重要的;在超出观察的限度后,第二种关系显然地会变得愈加不准确;而第一种关系则不然。

当空间中的构造被扩大到不可测量的程度时,无界性与无限大这两个概念必须区分开;前者属于推广和扩充关系而后者属于测量关系,空间是个无界的广义三维流形的论述是应用于外部世界的每个构思中的一个假设;每时每刻它补充着真实的认知范围,它构筑着所要探索对象的可能的位置,并在这些应用中不断地得到验证。空间的无界性,从实践上说,远比外部的任何经验要更为可靠。但是由此绝对推不出它的无限大性质,正好相反,如果假定立体与所处状态无关,从而赋予空间以常曲率,并且假设不管曲率多小,总取正值,则空间必定是有限的,如果把曲面片中每个方向拓展为最短曲线(测地线)就会得到一个无界的具有正常曲率的曲面,因此在三维广义流形中,它会有一个球形曲面的样子从而是有限的。

3

对于解释自然而言,涉及无限大面积的问题是无意义的。然而涉及无限小的问题则完全不同了。各种现象间因果关联的知识主要是建立在精确性基础上的,而正是以这种精确性我们一直将这些现象穷究到无限小的程度。最近几个世纪的关于自然的力学知识的进步几乎全部依靠无穷小分析的发明带来的综合过程的准确性和由阿基米德,伽里略及牛顿奠定的简洁的基本概念;这些概念在现代物理中仍然有效地使用着。然而在自然科学中,仍然缺少关于综合方法的简洁的基本概念;为了探测自然现象的细微联系,人们只能观察到显微镜允许的小空间内的现象,所以关于无穷小的空间度量关系的问题不是无用的问题。

如果我们假定物体的形状不随位置而改变,那么在各点的曲率就是常数,并且从天文观测知道这常数不能不是零;至少这个常数与零相差的值在我们的望远镜的精确度范围内是可以忽略的。但是如果物体的形与物体的位置有关系的话,那么我们就不能把属于无穷小范围的度量关系从大范围的性质中得出来;此时,在一点三个曲面方向的曲率可以是非常任意的,只要这些曲率值满足在空间中的每一个可测部分上的全曲率在我们能达到的精确度内是零。而且如果 ds 不象我们前面假定的那样可以表示成二次微分式的二次方根,情况将会更复杂。此时,作为我们以前的空间度量关系基础的实践经验,刚体和光线的概念在无穷小范围内将失去作用;而且可以非常确定地相信在无穷小范围的度量性质和几何中的公理并不一致;而且一旦在这样情况下我们能找出解释自然现象的简单方法,我们就必须接受这个情况。

关于在无穷小范围几何公理的有效性问题是和关于空间度量关系基础的问题有联系。关于空间度量关系的问题,事实上也是空间研究的一部分,我们上面的讨论是适当的,即在离散流形时,度量关系的准则已经包含在流形的概念之中;而在连续流形情形,度量关系的准则必须从另外的地方去找。所以,或者实际存在的空间就是一个离散流形;或者度量关系的基础要从流形之外寻找,从作

用在其上的各种因素的总体上去寻找。

要回答这些问题必须从迄今为实验所证实的自然现象的结构出发;关于这个结构,牛顿已经打下了基础,而且由于牛顿理论不能解释的一些事实,人们又逐渐地对这个结构进行修正。我们刚才作的从一般概念出发的讨论仅是为了说明我们的工作不会被非常严格的概念所困扰,我们对事物间联系的认识的进步也不会被传统偏见所阻碍。

这条道路将把我们引到另一门科学领域,进入到物理学的王国,进入到现在的科学事实还不允许我们进入的地方。

(方为民 译 胥鸣伟 校)

74. 贝尔特拉米:《关于非欧几里得几何的解释》

黎曼的工作为非欧几何开辟了新的前景,但非欧几何获普遍接受主要是在贝尔特拉米(1868)、克莱茵(1871)和庞加莱(1886)等在欧几里得空间实现了非欧几何模型之后。贝尔特拉米(Eugenio Beltrami,1835~1899)生于意大利克雷莫纳,早年攻读于帕维亚大学,曾先后受聘为波伦亚大学、比萨大学、帕维亚大学和罗马大学教授,1873当选山猫学院院士,去世前一年出任院长。他在微分几何、非欧几何、解析函数论和数学物理等方面均有贡献。1868年发表论文《关于非欧几里得几何的解释》(Saggio di inter pretarione della geometria non-euclidea,Giornale di Mathematica,6,1868,pp. 284~312),其中给出了第一个罗巴切夫斯基几何的模型——具有负常曲率的伪球面。以下摘录该文的开始部分,这部分概括了贝尔特拉米的思路,但未涉及模型的具体描述,转译自J. Fauvel & J. Gray :The History of Math. A Reader,pp. 533~535.

在近代,数学大众开始对某些新概念发生兴趣,如果他们成功,则注定会深深地改变经典几何学的整个面貌。

这些概念并非特别新近,大师高斯在他科学生涯之初就掌握了它们。虽然其著作对此没有明确的说明,但他的书信却进一步证实高斯一直在培植这些概念,并且表明他对罗巴切夫斯基学说的全力支持。

这种对基本原理作根本性改革的努力,在思想史上并不鲜见。今天它们是批评精神的一个自然结果,而这种批评精神伴随着所

有的科学研究。当这些努力表述为谨慎和笃实的研究成果时，当它们得到有影响的、无可争辩的权威支持时，冷静地、同时避免狂热与非难地讨论它们是科学家的职责。而且，在数学科学中，新概念的成功不能否定业已取得的事实，它仅能改变前后关系或解释推理，增加或减少其使用价值和次数。没有导致一种更牢固基础发现的原则性的批判不会损害科学大厦的坚固性。

在这种我们所追求的精神中，就我们的才智而言，罗巴切夫斯基学说的结果使我们自己信服。遵循科学研究的传统，我们试图为这一学说寻找一种现实的基础，而不是容许对本质和概念的一种新规则的需求。我们认为我们对该学说的平面部分已达到这一目标，但我们也相信进一步作下去是不可能的①。

为使对所提出的阐释的内在意义能作出最直接的判断，我们在这一论著中主要试图发展这些论题的首要部分，其次要部分则在结尾处作简明扼要的概述。

为避免频繁中断地讲解，我们把某些必要的分析结果推至结尾处一个专门的注记中。

在初等几何中证明的基本原理是：相等图形的可叠加性。

这一原理不仅适应于平面，也可用于在不同位置有相等图形的所有曲面，也即用于任一部分通过简单的弯曲能被映到任意其他部分的所有曲面。由此可见，图形所在曲面的刚性对该原理的应用不是一个必要条件，因此，例如在欧几里得平面几何中，图形位于一个圆柱面或圆锥面上，而不位于一个平面上，这不影响证明的正确性。

通过高斯的一个著名定理可知，具有上述性质的曲面是那些在所有点上主曲率之积为常数的曲面，因此球面曲率是常数。这样对其上图形不满足叠加原理的曲面就有一个随位置而变化的结构。

初等几何中最基本的图形是直线。它的特殊性质是由两个点

① 作者在当年已开始将他的结果扩展到高维空间。

完全确定，因此两条经过同样两个点的线延长后自始至终完全重合。

这些想法是我们目前研究的起点。我们通过下述评注证明的结论，必然包括该证明假设被满足的所有情形。如果该证明陈述于一种特殊整体范畴的术语中，实际上没有使用任何将它们从一个更广泛的范畴中区别的性质，则显而易见，证明的结论比最初的探索获得一种更大的普遍性。很可能出现表面上与最初期望的整体性质不相容的推论，因为一种为一已知整体范畴普遍保持的性质可以为某些特殊类型完全更改或消失。这种研究结果表面上不一致，精神上也不能使其一致，这是由于开始时没有充分意识到所做研究的一般性。

开始时这种观点被理解，我们认为在平面几何中证明仅依赖于迭加原理和线的公设，这恰恰是非欧几里得平面几何的那些观点。这样证明的结论无条件地成立，只要这种原理和公设都被满足。这种情况必然被常曲率曲面的学说所包括，但它们也许不能扩展到具有特殊点的曲面上。事实上叠加原理不因例外而受到损害，但我们已看到线的公设（对测地线）在球面上遇到例外，因而在所有正曲率曲面上都有例外。常数负曲率曲面上也有例外吗？即是说能存在这样一个曲面，其上的两个点不能确定唯一的测地线吗？

这个问题仍然悬而未决。如果能证明这种例外是不可能的，那么非欧几里得平面几何的定理在所有负常曲率曲面上无条件地成立就会先验地成为显然的结论。在那种情形中某些与平面性质看来不相容的结果在这种曲面上变得可以解释了，并得到一个完全令人满意的说明。目前我们能用零曲率曲面和常数负曲率曲面之间的不同来阐明从欧几里得到非欧几里得平面几何的过渡。

以上便是为下列研究引路所作的考虑。

（王青建 译　沈永欢 校）

75. 欧拉:论哥尼斯堡七桥问题

列昂纳德·欧拉(Leonard Euler,1707～1783)生于瑞士巴塞尔一个牧师家庭,早年曾师从约翰·伯努利。1727 年被推荐到彼得堡科学院,1733 年起任数学教授,1741 年应普鲁士腓特烈大帝之邀赴柏林科学院任数学部主任,25 年后重返俄国,在彼得堡科学院继续任职,直至 1783 年逝世。

欧拉可能是数学史上最多产的数学家,尤为惊人的是,他有许多著述是在 1771 年双目完全失明后完成的。由瑞士自然科学协会从 1907 年开始组织编纂的《欧拉全集》(Leonhardi Euleri opera omnia, Berlin-Göttingen-Leipzig-Heidelberg,1911～　),共有 3 辑 72 卷(另设第Ⅵ辑书信、手稿,拟出 11 至 13 卷),第Ⅰ辑数学部分就有 29 卷,已于 1956 年出齐。

欧拉的贡献几乎涉及数学的每个领域,除了分析、数论、代数、几何、力学等方面,欧拉的名字还与拓扑学的起源联系着。他在 1736 年发表的《与位置几何有关的一个问题的解》(Solutio problematics ad Geometriam Situs Pertinentis, Comm. Acad. Sci. Petrop. ,8, pp. 128～140, 1736)一文中解决了所谓"哥尼斯堡七桥问题",被看作是拓扑学与图论的先声。欧拉的原文亦载 Opera Ⅰ. vol 17, pp. 1～10,以下全文选录,转译自 J. R. Newman (ed.): The World of Mathematics, vol. 1. pp. 573～580, Simon & Schuster, 1956.

1. 讨论长短大小的几何学分支一直被人们热心地研究着,但

是还有一个至今几乎完全没有探索过的分支；莱布尼茨最先提起过它，叫它“位置的几何学”(geometria situs)。这个几何学分支讨论只与位置有关的关系，研究位置的性质；它不去考虑长短大小，也不牵涉到量的计算。但是至今未有过令人满意的定义，来刻划这门位置几何学的课题与方法．近来流传着一个问题，它虽然无疑是属于几何学的，却不是求一个尺寸，也不能用量的计算来解答；所以我毫不犹豫就把它归入位置几何学，特别还因为要解答它只需要考虑位置，不用计算．在这里我要讲一讲我所发现的解答这类问题的方法，它可以作为位置几何学的一个例子。

2. 问题——据我了解它是相当著名的——是这么说的：在普鲁士的哥尼斯堡镇有一个岛，叫“奈发夫”，普雷格尔河的两支绕流其旁(见图1)。七座桥 a,b,c,d,e,f,g 横跨这两条支流。问，一个人能不能设计一次散步，使得每座桥都走过一次，而且不多于一次。人家告诉我说，有些人否定这样做的可能性，也有些人怀疑，但是没人坚持一定可能。在这个基础上我向自己提出了下面这个很一般的问题：给定任意一个河道图与任意多座桥，要判断可能不可能每座桥恰好走过一次。

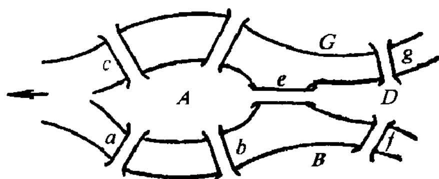


图 1

3. 哥尼斯堡七座桥这个特殊问题可以这样来解决：细心地把所有可能的走法列成表格，逐一检查哪些(如果有的话)是满足要求的．然而，这种解法太乏味而且太困难了，因为可能的组合的数目太大，而对于别的桥数更多的问题它根本就不能用，如果照刚才说的办法去分析，就要引出许许多多与问题无关的枝节；这无疑是这种方法所以麻烦的原因。因此我放弃了它，去寻求另一种更专用的方法；那就是说，这种方法要只告诉我们怎样能一下子找出满足

要求的路线；我相信，这样的方法会简单得多。

4. 我的整个方法的根据是，以适当的并且简易的方式把过桥记录下来：我用大写字母 A,B,C,D 表示被河分割开的各块陆地。当一个人从 A 地过桥 a 或 b 到 B 地时，我把这次过桥记作 AB，第一个字母代表他来的地方，第二个字母代表他过桥后所到的地方。如果步行者接着从 B 过桥 f 到 D，这次过桥记作 BD；这接连的两次过桥 AB 与 BD 我就用三个字母 ABD 来记录。中间的字母 B 既表示第一次过桥时进入的地方，又表示第二次过桥时离开的地方。

5. 类似地，如果步行者继续从 D 过桥 g 到 C，我把这接连的三次过桥用四个字母 $ABCD$ 来记录。这四个字母表示原在 A 处的步行者过河到 B，然后到 D，最后到 C；既然这些地方之间都被河隔开，步行者必须过三座桥。过四座桥将用五个字母表示，而且，如果步行者过任意多座桥，代表他的路线的字母个数比桥数多一。例如，过七座桥要用八个字母。

6. 按这方法，我不去注意用的是哪些桥；那就是说，当从一地过河到另一地有好几座桥时，不去管他走的是哪一座。于是，如果有一条路线走过哥尼斯堡的七座桥每座恰好一次，我们就能用八个字母来表示这条路线；而且在这串字母里，AB（或 BA）这组合要出现两次，因为有两座桥连结 A,B 两地区；类似地，AC 这组合要出现两次，而 AD,BD,CD 这些组合各出现一次。

7. 于是我们的问题已经化成，怎样能用四个字母 A,B,C,D 排成八个字母的串，使得刚才提到的各种组合在其中出现所需要的次数。然而，在努力寻求这样的排法之前，我们即使考虑一下在理论上它是不是可能存在，也是好的。因为若是能够证明这样的排法其实是不可能的，那么我们去求它就等于白费力气。所以我就去寻找一个法则，对于这个问题或所有类似的问题，用这个法则能简易地判断所要求的字母排法是不是行得通。

8. 为了寻找这样的法则，我取出一个地区 A，有任意多座桥通到 A，譬如 a,b,c,d 等等（图 2）。



图 2

我先只考虑桥 a，如果步行者过这座桥，他必定过桥前在 A 或者过桥后到 A，所以按上述的记录方法，字母 A 一定出现一次。如果有三座桥 a、b、c 通到 A，而步行者三座桥都走过一次，那么不管他是不是从 A 出发，字母 A 将在他的路线的表示式里出现两次。如果有五座桥通到 A，在走过所有这些桥的表达式里字母 A 将出现三次。如果桥的个数是奇数，加上一再取其半；所得的商恰好代表字母 A 出现的次数。

9. 现在让我们回到哥尼斯堡问题(图 4)。因为有五座桥 a,b,c,d,e 通往岛 A，在那路线的表示式里字母 A 必须出现三次；因为有三座桥通 B，字母 B 必须出现两次；类似地，D 与 C 必须各出现两次。那就是说，在代表过七座桥的路线的那八个字母的串里，必须有三个 A，各两个 B,C,D；但是对于八个字母的串来说这当然是不可能的。这就看出，按所要求的方式走遍哥尼斯堡的七座桥是不能实现的。

10. 用这方法我们总能判断，当通到各地区的桥数都是奇数时，能否在一次散步里走过每座桥恰好一次。如果桥数加一等于各字母应出现次数的和，这样的路线就存在。另一方面，如果这和数大于桥数加一，象在我们的例子里那样，那么所希望的路线就作不出来。我所提出的(第 8 节)从通 A 的桥数来定出字母 A 出现次数的规则，是与这些桥通往同一地区(图 2)或通往几个地区无关的，因为我只考虑地区 A，只想定出 A 出现的次数。

11. 当通到 A 的桥数是偶数时，我们必须考虑这路线是不是从 A 开始。例如，如果有两座桥通到 A 而且路线从 A 开始，那么字母 A 要出现两次。一次表示从 A 出发过一座桥，第二次表示从另一座桥回到 A。然而如果步行者从另一地区开始他的行程，字母 A 将只出现一次，因为按我的记法，A 的这次出现既能表示进入 A

又能表示离开 A。

12. 假定有四座桥通到 A，而且路线从 A 开始，那么字母 A 在这整个路线的表示式里将出现三次；如果路线从别处开始，A 只出现两次。对于有六座桥的 A，当 A 是起点时字母 A 出现四次，否则只有三次。一般地说，如果桥数是偶数，那么字母 A 的出现次数当起点不在 A 时等于桥数的一半，当起点在 A 时等于一半加一。

13. 当然，每条路线必定从一个地区开始。因此，根据通到各地区的桥数，我按下面的办法来定出各相应的字母在整个路线的表示式里出现的次数：当桥数是奇数，加上一再拿二除；当桥数是偶数，就用二除它。这时如果所得各数的和等于实有桥数加一，这散步是可以实现的，不过必须从通奇数座桥的地区出发。如果这和数比桥数加一少一，这散步也可以实现，只要它的出发点是通偶数座桥的地区，因为这时那和数又该加一。

14. 为判断在任意给定的河——桥系统里是不是可能走过每座桥恰好一次，我的程序是：①先把被水隔开的各地区用 A，B，C 等等代表。②取桥的总数，加上一，写在表格的顶端。③表的第一列列出字母 A，B，C 等等，第二列写下通往各该地区的桥数。④在对着偶数的字母上打星号。⑤把第二列里各偶数的一半，及各奇数加一的一半，写在第三列。⑥把第三列各数加起来，如果这和数比顶上的数少一或相等，我断定所要求的路线是作得出的。但是要注意，当和数比顶上的数少一时，路线必须从带星号的地区出发，而在另一情形，当这两数相等时，必须从没有星号的地区出发。

对于哥尼斯堡问题，我列出下面的表：

桥数 7，		7+1=8
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

最后一列加起来超过 8，所以所希望的路线是作不出的。

15. 让我们看一个四条河两个岛的例子，图 3。十五座桥，标以

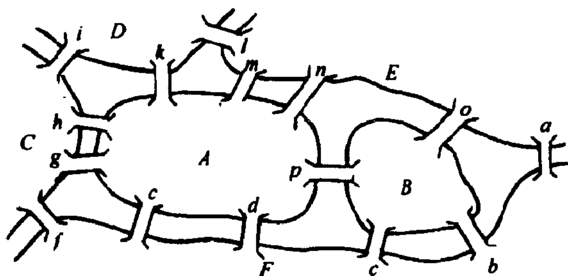


图 3

a,b,c,d 等等，跨在各河上，问能不能安排一条路线，通过所有的桥恰好一次。①我先把被水分隔的各地区用字母 A,B,C,D,E,F 标出，一共六个。②我把桥数(15)加一，16，写在顶上。③我把字母 A,B,C 等等写成一列，在旁边一列里写出联到各该地区的桥数，例如，A 是 8，B 是 4，等等。④对应于偶数的字母标上星号。⑤在第三列里我写下各偶数的一半或各奇数加一的一半。⑥最后我把第三列的数加起来，得到和数 16。

		16
A^*	8	4
B^*	4	2
C^*	4	2
D	3	2
E	5	3
F^*	6	3
		16

这与顶上的数 16 相同，所以这路线是能实现的，只要它从地区 D 或 E 开始，这两个字母没有星号。下面的式子代表一条这样的路：

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD。$$

这里我也用夹在大写字母之间的小写字母指出了过的是哪些桥。

16. 即使在相当复杂的情形，用我们的方法也总能简易地判断顺次走过每座桥是不是的确可能。但是我现在还想指出另一种更简单得多的方法，它很容易从上面的方法引伸出来，只要稍作准

备就行了。首先我注意到，通到各地区的桥数，即表格里第二列的各数，加起来必定是实有桥数的两倍。理由是，在列出通各地区的桥的表格时每一座桥被数了两次，一头一次。

17. 从这一事实推出，第二列各数的和一定是偶数，因为它的一半等于实有的桥数，所以这些数目(它们代表与各地区相连的桥数)里不会恰有一个奇数，也不可能有三个或五个奇数。换句话说，如果这些数里有奇数，奇数的个数一定是偶数。譬如，在哥尼斯堡问题里，字母 A,B,C,D 所对应的四个数全是奇数(第 14 节)，而在刚才的例子(第 15 节)里只有两个数是奇数，即 D,E 所对应的那两个。

18. 由于 A,B,C 等等所对应的数字的和是桥数的两倍，如果这和数加二再除以二显然将得出写在顶上的数。当第二列的数全是偶数时，第三列里是各数的一半，这列的总和将比顶上的数少一。这时总可以走遍所有的桥。因为不管路线从什么地方开始，这地方一定与偶数座桥相连，符合我们对起点的限制。譬如说，在哥尼斯堡问题里我们可以安排得每座桥走过两次，这等于说把每座桥分成两座，这时通到每个地区的桥都成了偶数座。

19. 进一步，当第二列的数里只有两个奇数而其余都是偶数时，所求的路线是可能的，但须从通奇数座桥的地方出发。按我们的程序取各偶数的一半与各奇数加一的一半，这些一半的和就将比桥数多一，所以等于顶上的数。

类似地，当第二列里有四个(或六个、八个等等)奇数时，显然第三列里的和将比顶上的数多一(或多二、多三等等)。所以所求的路线是不可能的。

20. 于是，对于任意的河——桥图，要判断可能不可能把所有的桥走一次，最简单的办法是采用下列法则：

如果通奇数座桥的地方不止两个，满足要求的路线是找不到的。

然而如果只有两个地方通奇数座桥，可以从这两个地方之一出发，找出所要求的路线。

最后，如果没有一个地方是通奇数座桥的，那么无论从哪里出发，所求的路线总能实现。

这些法则完全解答了最初提出的问题。

21. 在我们断定了路线的确存在以后，还要把它找出来。这时下面的法则是有用的：如果可能的话，我们在心里把连结同一对地区的任意两座桥抹去；这样做常常可以使桥的数目大大地缩小。然后——这不会很难——我们在剩下的桥上描出所要求的路线。在我们找到这样的路线以后，不须大改动就能把起先抹掉不看的桥补上，这只要稍为一想就明白了；所以我觉得，关于怎样找这些路，我不用多说了。

(姜伯驹 译①)

① 本译文原载姜伯驹《一笔画和邮递路线问题》，pp. 33～39，人民教育出版社，1964。

76. 德·摩尔根:论地图四色定理

地图四色定理最先是由一位叫古德里(Francis Guthrie)的英国大学生提出来的。德·摩尔根(A. De Morgan,1806～1871)1852 年 10 月 23 日致哈密顿的一封信提供了有关四色定理来源的最原始的记载。他在信中简述了自己证明四色定理的设想与感受。一个多世纪以来,数学家们为证明这条定理绞尽脑汁,所引进的概念与方法刺激了拓扑学与图论的生长、发展。1976 年美国数学家阿佩尔(K. Appel)与哈肯(W. Haken)宣告借助电子计算机获得了四色定理的证明,又为用计算机证明数学定理开拓了前景。以下摘录德·摩尔根致哈密顿信的主要部分,译自 J. Fauvel and J. Gray(eds.),The History of Mathematics:A Reader,pp. 597～598.

德·摩尔根致哈密顿的信(1852 年 10 月 23 日)

我的一位学生① 今天请我解释一个我过去不知道,现在仍不甚了了的事实。他说如果任意划分一个图形并给各部分着上颜色,使任何具有公共边界的部分颜色不同,那么需要且仅需要四种颜色就够了。下图是需要四种颜色的例子(图 1)。现在的问题是是否会出现需要五种或更多种颜色的情形。就我目前的理解,若四个不可分割的区域两两具有公共边界线,则其中三个必包围第四个而使其不与任何第五个区域相毗邻。这事实若能成立,那么用四种颜色即可为任何可能的地图着色,使除了在公共点外同种颜色不会

① 指弗朗西斯·古德里的弟弟弗里德里克·古德里,二者都是德·摩尔根的学生。当时已离开伦敦大学学院的弗朗西斯写信告诉仍在那里学习的弗里德里克自己关于地图着色问题的发现并求证明,后者百思不得其解,遂转而请教老师。

相遇。

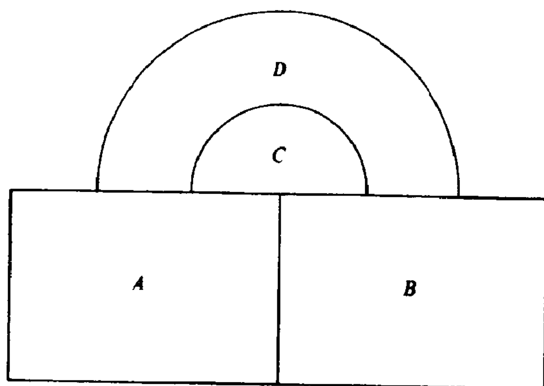


图 1 (A,B,C,D 是颜色名称)

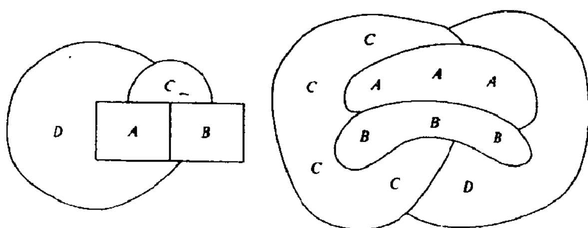


图 2 (B 被包围)

现画出三个两两具有公共边界的区域 ABC,那么似乎不可能再画第四个区域与其他三个区域的每一个都有公共边界,除非它包围了其中一个区域(图 2)。但要证明这一点却很棘手,我也不能确定问题复杂的程度 —对此您的意见如何呢?并且此事如果当真,难道从未有人注意过吗?我的学生说这是在给一幅英国地图着色时提出的猜测。我越想越觉得这是显然的事情。如果您能举出一个简单的反例来,说明我像一头蠢驴,那我只好重蹈史芬克斯[①]的复辙了……。

(李文林 译)

① 史芬克斯(Sphynx):希腊神话中的人面狮身怪兽,它提出奇怪的谜语让过路人猜,猜不中就将过路人杀死。一次当它提出的谜被猜破后,它因羞惭跳崖而死。

77. 庞加莱:《位置分析》

庞加莱(H. Poincaré,1854～1912)从 1892 年开始发表了一系列以所谓"位置分析"为主题的论文,奠定了组合拓扑学的基础。这些论文中最主要的一篇就叫《位置分析》(Analysis situs),刊于 1895 年巴黎《综合工科大学杂志》(Jour. de l'Ecole Poly. tome 1,pp. 1～121,1895),接着是直到 1904 年发表在几种刊物上的五篇补充论文①。在 1895 年的基本论文中,庞加莱定义了高维流形、同胚、同调等基本概念,特别是定义了贝蒂(Betti)数和基本群,还推广欧拉示性数、首次引进了庞加莱对偶定理,但他对对偶定理的最初表述与证明均有错误,经丹麦数学家希加德(Heegaard)指出后,庞加莱在第一篇补充论文中即进行了修正,利用单形分解法再次证明了对偶定理;在第二篇补充论文中引进挠系数概念,完全建立同调概念;第三、第四篇补充论文则应用拓扑方法研究代数曲面,计算其基本群及同调;最后一篇补充论文包含了著名的"庞加莱猜想",至今尚未解决。现代代数拓扑学的发展受到了庞加莱思想与方法的深刻影响。以下节选《位置分析》一文中的有关段落[77. 1],庞加莱上述第五篇补充论

---

① 这五篇补充论文是:(1)Complément àL'Analysis situs,Rend. Circ. Mathem. Palermo,t. 13,pp. 285～343(1899);(2)Second Complément àl'Analysis situs,Proc. London Math. Soc. , vol. 32. pp. 277 ～ 308 (1900);(3) Sur certaines surfaces algébriques,troisième complément à l'Analysis situs,Bull. Soc. Math. Fr. ,t. 30,pp. 49～70 (1902);(4) Sur les cycles des surfaces algebriques,quatrième complément à l'Analysis Situs,Jour. Math. pure et appl. ,t. 8,pp. 169～214, (1902);(5)Cinquième Complément àl'Analysis situs, Rend Circ. Mathem. Palermo, t. 18, pp. 45 ～ 110 (1904)。

文中关于庞加莱猜想的陈述也摘录于后[77.2]，均译自：Oeuvres de Henri Poincaré, Tome Ⅵ, pp. 193～288, pp. 435～498. Gauthier-Villars, 1953。

77.1. 位置分析

引言

n维几何学具有实在的对象，现在人们对此已不怀疑。超空间中的存在对象已经可以像通常空间中的存在对象一样容许精确地定义，要是我们不能表示它们，我们就不能思考它们和研究它们。因此，如果说，高于3维的力学由于缺乏其研究对象而被禁止的话，对于超几何学可不是这样。

事实上，几何学没有什么独特的理由，只是去直接描写作用于我们感官的物体，首先它是对一个群进行分析的研究。因此，什么也不能妨碍我们开始研究其他类似的群以及更为一般的群。

但是，有人会说，为什么我们不能保留分析的语言，而代之以几何的语言，而几何的语言已经失掉所有可以诉诸感官的优越性。这是因为新的语言更加精密，因为它是由同通常几何学类比而得出，它能创造富有成果的思想之间的联系，并且提示有用的推广。

或许这些理由还不够充分？事实上，为了使一门科学合法化这还不够，这门学科还必须具有不容置疑的有用性。既然有那么多各种各样的对象吸引我们的注意力，也只有最重要的有权利得到它。

在超几何学中也存在一些分支不太有兴趣。例如，那些关于n维空间中曲面的曲率的研究，我们事先就能肯定会得到同通常几何学同样的结果，我们无须走多远，就可以见到我们平常在自己身边常常遇到的类似的景色。

但是，还有许多问题，分析的语言完全不适用。

……

我们使用图形的首要目的是认识我们研究对象之间的某些关系，研究这些关系的几何分支我们称之为位置分析（analysis situs），它描述点、线、面之间的相对位置，而对其大小完全不予考

虑。

在超空间中存在的对象之间也有同样性质的关系，因此我们有大于 3 维的位置分析，正如黎曼(Riemann)和贝蒂(Betti)已经在 3 维情形所证明的那样，这门科学就是让我们认识这类的关系。

根据黎曼，把代数曲线按种(亏格)分类是奠基于从位置分析的观点出发，对于实闭曲面的分类。由此我们可以马上理解，代数曲面的分类以及它们的双有理变换理论同按照位置分析的观点对 5 维空间中实闭曲面的分类有紧密的联系。皮卡(Picard)先生在给科学院一篇论文中已经坚持这一点。

另一方面，在我在刘维尔(Liouville)杂志上发表的题为“微分方程所定义的积分曲线”一系列论文中，我已经使用三维的通常的位置分析来研究微分方程，同样的研究也由迪克(W · Dyck)先生继续进行。不难看出广义位置分析可以使我们能够处理高阶方程特别是天体力学的问题。

若尔当(Jordan)先生已经用分析方法定出 n 变元线性群中的有限阶群。克莱因(Klein)先生在此之前，用极为罕见的漂亮方法解决 2 变元线性群的同样问题。我们是否能推广克莱因先生的方法去解决 n 变元群或者任意连续群的问题，在我看来似乎这种解法应该依赖于位置分析问题并且欧拉关于多面体的著名定理的推广应该起一定作用。

……

§1　流形的第一个定义

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个变元，我们把它们看成是 n 维空间中一点的坐标。

我们假设这 n 个变元总是取实数值。

某个 n 个变元组称为一个点。

我们考虑由 p 个等式和 q 个不等式形成的 n 个变元组

$$
(1) \quad \begin{cases}
F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\
F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\
\cdots\cdots\\
F_p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\
\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0\\
\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0\\
\cdots\cdots\\
\varphi_q(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0
\end{cases}
$$

假设诸函数 F 和 φ 均为单值连续函数，且都具有连续导数，而且进一步假设，造一个表

$$
\begin{array}{l}
\frac{dF_1}{dx_1},\quad \frac{dF_1}{dx_2},\cdots,\ \frac{dF_1}{dx_n}\\
\frac{dF_2}{dx_1},\quad \frac{dF_2}{dx_2},\cdots,\ \frac{dF_2}{dx_n}\\
\cdots\cdots\\
\frac{dF_p}{dx_1},\quad \frac{dF_p}{dx_2},\cdots,\ \frac{dF_p}{dx_n}
\end{array}
$$

我们取表中任意 p 列，造出诸 p 行 p 列的行列式永远不同时等于0。

我们称满足条件(1)同时满足上述假设的点集构成一个 $n-p$ 维流形。

……

满足下列 q 个关系组

$$
(3) \quad \begin{cases}
F_a=0,\ \varphi_1=0,\ \varphi_r>0\ (r \gtrless 1)\\
F_a=0,\ \varphi_2=0,\ \varphi_r>0\ (r \gtrless 2)\\
\cdots\cdots\\
F_a=0,\ \varphi_q=0,\ \varphi_r>0\ (r \gtrless q)
\end{cases}
$$

之一称为由(1)定义的流形的完全边界(frontière complète)，它具有 $n-p-1$ 维。

可能不存在任何 $n-p-1$ 维流形满足 q 个等式及不等式(3)的任何一个。在这种情形下,由条件(1)定义的流形称为无边的(illimitèe),否则称为有边的(limitèe)。

如果一个流形同时有限、连续且无边,则称为闭的(fermée)。

……

§5 同调

我们考虑 p 维流形 V,现在设 W 是 V 中的 q 维($q \leqslant p$)流形。我们假定 W 的完全边界由 λ 个 $q-1$ 维连续流形

$$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\lambda$$

构成,我们用下列记号表示这个事实

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\lambda \sim 0$$

更一般地,我们引入下面记号

$$k_1\nu_1 + k_2\nu_2 \sim k_3\nu_3 + k_4\nu_4$$

其中诸 k 都是整数,诸 ν 都是 $q-1$ 维流形,这个记号就表示:V 中存在一个部分流形 W,其完全边界由 k_1 个没有差别的流形 ν_1[①],k_2 个没有差别的流形 ν_2,k_3 个没有差别的反流形 ν_3[②]与 k_4 个没有差别的反流形 ν_4 构成。

这种形式的关系将称为同调(homologies)。

……

§6 贝蒂数

V 中具有相同维数的部分流形

$$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\lambda$$

称为线性独立,如果它们之间没有任何整系数的同调关系。

如果在 V 中 m 维部分闭流形中存在 $P_m - 1$ 个线性独立的,而且只有 $P_m - 1$ 个线性独立,我们就称 V 关于 m 维流形的连通阶(l'ordre de connexion)等于 P_m。

对于 m 维流形 V,同样可以定义 $m-1$ 个数,我们记作:

---

① 即与 ν_1 同胚的流形拷贝。

② 庞加莱在§4中定义 ν 的反流形,大致相当于取 ν 的相反定向,下同。

$$P_1, P_2, \cdots, P_{m-1}$$

它们分别对应 V 关于

$$1, 2, \cdots, m-1$$

维的连通阶。

以后，我把这些数称为贝蒂数(nombres de Betti)[①]

我们可以举例来阐明这个定义。

……

对于球面的内部

$$P_2=1, \qquad P_1=1$$

对于两个球面共有的区域

$$P_2=2, \qquad P_1=1$$

对于环面的内部

$$P_2=1, \qquad P_1=2$$

对于两个环面共有的区域

$$P_2=2, \qquad P_1=2$$

……

§9　两个流形的交截

[庞加莱宣布所谓庞加莱对偶定理]

对于 h 维闭流形

$$P_p=P_{h-p}$$

对于所有闭流形，距两端等距的贝蒂数相等。

……

§12　基本群

我们现在导出一个流形(V)的基本群的概念。

……

现在我们考虑 V 上从一个始点 M_0 出发的闭回路 M_0BM_0，如果这个闭回路退化成一条闭路径，我就约定记作

$$M_0BM_0 \equiv 0$$

① 庞加莱定义的贝蒂数比现在通用的贝蒂数大 1。

现在设 M_0AM_1，M_0BM_1，M_0CM_1 是 V 上从 M_0 到 M_1 的三条不同路径，我们约定记

$M_0AM_1CM_0 \equiv M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0$。必须注意 $M_0AM_1CM_0$ 和 $M_0CM_1AM_0$ 不是一回事，同样，$M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0$ 同 $M_0BM_1CM_0 + M_0AM_1BM_0$ 也不是一回事，在和式中各项的次序不能颠倒。

按照这种约定，如果闭回路 M_0BM_0 构成 V 的二维部分流形的完全边界，则有

$$M_0BM_0 \equiv 0$$

事实上，这个闭回路可以分解成大量的闭路径[①]。

现在我们考虑如下形式的关系

$$k_1C_1 + k_2C_2 \equiv k_3C_3 + k_4C_4$$

其中诸 k 是整数，诸 C 是 V 上由 M_0 出发的闭回路，这种关系，我们称为等价，类似于我们上面谈到的同调，但是它们有所不同。

(1) 因为在同调情形下，回路可以从任何一个起点出发。

(2) 因为在同调情形下，我们可以改变和式中各项的顺序。

这样，我们就可以把两个等价一个加在另一个之上，但是项的先后顺序不能颠倒，从而我们有，由

$$A \equiv B \quad 和 \quad C \equiv D$$

可以推出

$$A + C \equiv B + D$$

但是推不出

$$C + A \equiv B + D$$

而且由

$$2A \equiv 0$$

不能推出

$$A \equiv 0$$

这样，显然我们可以考虑到存在一个群 G 满足下列条件：

① 这句话不对，后来庞加莱在第 V 篇补充中改正。

（1）对于每个闭回路 M_0BM_0 都对应群中的一个代换 S；

（2）S 能约化或恒等代换的充分且必要条件是

$$M_0BM_0 \equiv 0$$

（3）如果 S 和 S' 对应回路 C 和 C'，且 $C'' \equiv C + C'$，则对应于 C'' 的代换是 SS'。

这群 G 称为流形 V 的基本群(le group fondamental)。

77.2.《位置分析》第五补篇："庞加莱猜想"

……

事实上，我造出一个流形的例子，其所有贝蒂数及挠系数均等于 1，但它不是单连通的[①]。

……

于是，就留下一个问题有待解决：

是否可能存在流形 V，其基本群可约化为恒等代换，但 V 不是单连通的？[②]

（胡作玄 译）

---

① 这里单连通的意思是同胚于(超)球面。

② 这就是"庞加莱猜想"。

78. 克莱茵:《埃尔朗根纲领》

对推广欧几里得几何而得到的各种几何空间及相应的几何学如何进行分类?这是克莱茵在 1872 年出任埃尔朗根大学教授时发表的就职演说中提出的问题。这篇就职演说题为《关于新近几何学研究的比较考察》(Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen),后以《埃尔朗根纲领》著称,其主要思想是将几何学定义为研究图形在某类变换群下保持不变的性质的学问。在这种群论原则下,19 世纪出现的各种表面上互不相干的几何学获得了统一的解释。

克莱茵(Felix Klein,1849～1925)生于德国杜塞尔多夫,1865 年入波恩大学,1868 年获博士学位,曾游学格丁根、柏林和巴黎,后历任埃尔朗根大学、慕尼黑技术大学、莱比锡大学教授,1886 年到格丁根大学任教,直至去世。克莱茵另一项载入史册的成就是与庞加莱各自独立地创立了自守函数理论。晚年热心于数学教育改革与科学组织工作,他是著名的格丁根数学研究所的创建人。

《埃尔朗根纲领》后来刊于 Math. Ann. 43,1893,pp. 63～100(亦载 F. Klein:Ges. Math. Abh. 1,pp. 460～497,Springer,1921),其思想方法支配了其后几十年间的几何研究,对群论的发展亦有深远影响。以下摘录该文的前 3 节,系据 M. Padé 法译本(Le Programm D'Erlangen,Collection《Discours de la Méthode》,Gauthier-Villars,1974)译出,并据德文原文校对。

关于新近几何学研究的比较考察

——1872年为加入埃尔朗根城弗里德里希·亚历山大大学哲学院与评议会而提出的纲领

五十年来，在几何学领域取得的成果中，射影几何学的发展占有头等地位(见本文末注释一)。如果说，起初所谓度量关系由于它们在射影之下不是保持不变的，似乎难于用射影几何学来处理，那么近来人们已经学会也用射影的观点来理解这些关系了，以至于现在，射影的方法囊括了整个几何学。可是在那里，度量性质不再作为空间实体的内在性质出现，而是作为这些实体和一个基本元素即无穷远虚圆的关系出现。

如果把通常(初等)几何学的诸概念同由于考察空间实体而逐渐积累起来的方法相比较，就会引导人们去探索一个普遍原则，根据这个原则，可以建立起这两种方法。由于除了初等几何学和射影几何学之外，还有发展很缓慢然而也必须给予同样的存在权利的其他方法，所以这个问题就显得更加重要。比如反演几何学、有理变换几何学等几何学就是这样。此后，我们还要提及和阐述这些几何学。

当我们在此着手建立一个这样的原则的时候，我们的确没有发挥什么本质上新的想法。我们只是把许多人认为或多或少确定了的东西，给以一个清晰明显的表达罢了。几何学尽管本质上是一个整体，可是，由于最近期间所取得的飞速发展，却被分割成为许多几乎互不相干的分科(见注释二)，其中每一个分科几乎都是独立地继续发展着，于是，公开发表旨在建立几何学的这样一种内在联系的综合考虑，就显得更加必要了。我们还特别想陈述一下由李(Lie)和我在最近的工作中发展起来的方法和观点。我们双方工作的论题尽管不同，但却一致集中到这里阐明的考察事物的一般方法上；因而，再次讨论考察事物的一般方法并从这方面刻划这些工作的内容和趋势是很有必要的。

如果说，迄今为止我们只谈到了几何研究，那么这种研究事实上应该把任意维流形[①] 的研究和普通的几何研究一起包括在内。这种任意维流形是人们从几何学中舍弃了从纯数学观点看来并非本质的图形而抽象出来的。关于流形的研究包含着与几何学同样多的各种类型，并且，象几何学的研究一样，主要是强调彼此独立开展的研究之共同点和不同点。从抽象的观点看来，下文中只需要谈论多维流形；但是，如果把这个论述和我们最熟悉的空间概念联系起来，它就变成最简单的并且是一目了然的了。从考察几何实体出发，并把它们作为例子来阐明和展开一般性想法，我们就是遵循着科学在它自己的发展中走过的道路，同时以此作为我们阐述的基础通常也是最有利的。

要在这里预先展示一下下文的内容是不可能的，因为难以把这些内容归纳成较简洁的形式[②]；而各节的标题将给出思想的一般发展过程。最后我加了一系列的注释。在这些注释中，当我感到对理解正文有用时，就对一些特定点作了进一步的阐述；要不然，我就尽力在那些地方把对正文研究具有权威性的抽象数学观点和同它类同的诸观点区分开来。

一、空间变换群　主群　一般性问题的提出

在下面阐述中所需要的最本质的概念，就是空间**变换群**的概念。

任意多个空间变换[③]的组合，总是又给出一个这样的变换。现在我们假定，一个给定的变换集合有这样的性质，即变换集合中任意多个变换的组合构成的每一变换也属于这个集合，那么，这样的

---

① 克莱茵德语原文为“ausgedehnte Mannigfaltigkeiten”。

② 这种表达形式的过于简洁是我的文章的一个欠缺。我担心，这会把对文章的理解变得明显地更难接受。可是，我不能用一个非常冗长的表达式来弥补这个欠缺，因为那样的话，在这里仅仅涉猎一下的一些特定的理论，就得详细加以发挥。——原注

③ 我们的意思是说，变换总是应用于空间的全体元素，因而我们简单地称作空间变换。一些变换，例如对偶变换，可以不是点的变换而引入新的元素。在本文中，这种情况和别的情况不加区别。——原注

集合就构成一个变换群[①②]。

位移(每一个位移被看作在整个空间上实行的一次运算)的集合提供了变换群的一个例子。例如,环绕一点的旋转[③]所构成的群就是其中的一个。反之,包含位移群的群可以由直射变换的集合构成。相反,对偶变换的集合并不构成群,因为两个这样的变换的组合给出一个直射变换;但是,人们把对偶全体和直射全体结合在一起,就重新获得了一个群[④]。

有一些空间变换,它们不变更图形的几何性质。这些几何性质,按其概念来说,独立于被考虑的图形在空间中占有的位置,独立于图形的绝对量,最后还独立于图形的各部分被安置的定向[⑤]。那么,空间的位移、相似变换和对称变换不变更图形的性质。同样,由上述这些变换结合成的变换也不变更图形的性质。我们称所有这些变换的集合为空间的变换主群[⑥];图形的几何性质在变换主群的变换之下保持不变。逆定理同样是正确的:图形的几何性质由它们在主群变换之下的不变性所刻划。诚然,如果人们暂时把空间看作不能位移,看作一个刚性流形,那么每一个图形就有它自己的个性。在这个图形中,作为个体所具有的诸性质中只有那些在主群的变换下不变的性质才真正是几何的性质。在这里不很确定地提

① 这个定义还需要下面的补充。在本文的群中,实际上暗含着如下的假定,在那里出现的一切运算都伴随着它的逆运算;但是在有无穷多个运算的情况下,这当然不是群概念本身的一个必然结果;因此,这应当是一个被明确加进群的定义中的假定,如同在本文中所给的那样。——原注

② 这个概念和名称都是从代换论中借用的,在那里,人们不是把它看作一个连续域的变换,而是看作有限多个离散量的排列。——原注

③ 卡米耶·约当(Camille Jordan)定出了包含在位移群里的所有的群,如关于运动的群。(Annali di Matematica,t. Ⅱ)——原注

④ 此外,一个群的变换在这里连续不断地出现,是毫无必要的,尽管对我们就要谈及的所有的群,总是这种情况。例如,使一个规则物体能够自我覆盖的有限次位移,形成一个群;同样,使一条正弦曲线无限次不连续的自我迭加的位移,也形成一个群。——原注

⑤ 在这里,应该把方向理解为序的性质(定向)。由于序性,一个图形不同于它的对称图形(反射象)。同样,由于定向,右螺旋线不同于左螺旋线。——原注

⑥ 由定义,这些变换必定构成一个群。——原注

出的观点,将在以后的讨论中显得清楚些。

现在,我们将不管从数学的观点看来并非本质的物质图形,在空间中,我们只看到一个多维流形,例如,按照习惯的表达方式把点当成空间元素时,就只看到一个三维流形。与空间的变换类似,我们可以讨论流形的变换,它们也构成群。只是不再象空间情形那样,有一个按其本性来说突出于其他群的群;任何一个群,和别的群具有同等的地位。于是,作为几何学的概括,就产生下列一般性问题:

给了一个流形和这个流形的一个变换群,以在这个变换群的变换之下其性质保持不变的观点研究这个流形的实体。

如果我们采用现时的说法,当然,这里只对一个确定的群即线性变换群用到这种说法,那么还可以这样来表达这个一般性问题:

给了一个流形和这个流形的一个变换群,建立关于这个群的不变性理论。

这便是一般性问题,即不仅囊括了通常的几何学,而且也囊括了我们必需一一考虑的现代几何学方法,以及任意维流形的各种研究方式。尤其需要指出的是,在选择附加于流形的变换群时还有任意性,和由这种任意性所导致的并在此意义上被理解的、所有满足一般性要求的处理方法的同等合理性。

二、一个包含另一个、依次连接起来的变换群 几何学研究的各种类型及其相互关系

因为空间实体的几何性质在主群的一切变换之下都保持不变,所以,研究只对这些变换的一部分保持不变的性质,当然没有任何意义。然而,如果从空间图形与某些被确切地想像的元素的关系方面来研究空间图形,那么,这个问题至少从形式上看是合理的。例如,正象在球面三角学中一样,我们考察空间的诸实体,其中有一特殊的点。那么,首先提出的问题就是:不再对空间的实体本身,而是对它们和这给定点一起构成的系统,来阐明在主群之下不变的性质。

但是,也可以用另外的方式提出这问题:假定这点固定,从在

主群的变换之下的不变性的观点，研究空间的实体本身。换句话说，在空间图形上加进这给定的点，在主群的意义下研究这些空间图形，或者，什么点都不加进，但是用包含在主群中的且不改变某一相应点的变换群代替主群，来研究这些空间图形，这两者是同一回事。

这就是在下文中经常要用到的一个原则，由于这个原因，我们愿意从现在起以下列方式，对它作一般的描述。

给定一个流形，为了研究它，再给定一个与之有关的变换群。现在的问题就是，研究流形的诸实体与其中特定的一个实体。那么，人们或者可以在实体的集合上加进这个特定实体，在已给定的群的意义下研究这个增广系统的性质，或者可以什么实体都不加进，但是，要限制作为研究基础的那些变换，使这些变换属于给定的群，并且不改变特定的实体(这些变换也必定形成一个群)。

现在，我们看一下本节开头提出的问题的逆问题。这个逆问题很容易理解，问题在于：探求空间实体的这样一些性质，它们在包含了主变换群的一个群的变换之下仍然保持不变。在这个研究中获得的每一个性质都是实体的内在的几何性质。但是，逆命题是不正确的。对于这个逆命题，我们刚刚建立的原则开始起作用，这时，主变换群是一个最小的群。于是，我们得到这样的定理：

如果用一个更广的群代替主变换群，那么只有一部分几何性质被保存下来。其他的性质不再作为这些几何实体的内在性质而出现，但仍然是给这些实体加进一个特定的实体后所得到的系统的性质。这个特定的实体，作为确定的[①]实体来说，一般有下述的特点：当它固定时，在给定的群的变换中仍作用于空间的只有主群的那些变换。

我们需要研究的新几何学方法的实质以及它与初等方法的关系就寓于这个定理之中。诚然，它们的实质由这样一个事实刻画，

---

① 例如，如果把主变换群的变换应用于任何一个初始元素，而给定的群中没有一个变换能使这种初始元素再现，这时就引入了这样一个实体。——原注

即它们的考察不是凭依主变换群，而是建筑在一些更广的变换群之上的。这些群既然互相包含，那么，一个类似的法则就确定了它们的互逆关系。这也适用于我们就要考察的多维流形的各种不同的研究方法。现在我们就要对每个特殊方法建立这种法则，并且，本节和前节的关于一般情况的那些定理即将要在具体问题的应用中看得更清楚。

三、射影几何学

空间的每个不属于主变换群的变换可以应用于把已知图形的性质转移到新图形上去。这样，对于能表示在平面上的曲面几何学，就可以利用平面几何学；因此，在真正的射影几何学诞生前很久，人们就已经用曲面在平面上的投影推出的性质来确定一个已知图形的性质。但是，只有当人们习惯于把原来的图形和所有从它通过投影推演出来的图形完全看成本质上等同的东西时，并且只有习惯于表述这些投影性质，使得这种表述与投影带来的变化无关时，射影几何学才得以诞生。这就是采取投影变换群作为第一节意义上的诸考察的基础，并且，由此发现了射影几何学与普通几何学之间的差别。

对于空间的每一种变换，都可以设想出一个类似的发展进程，象我们刚刚叙述的那样；这是我们还要常常重复的。至于射影几何学的问题，这个发展进程还要分两步来进行。第一步在一些概念结构的扩充中通过在基本变换群中纳入对偶变换完成了。根据现代的观点，必须注意两个互为对偶的图形，我们不再把它们看成两个不同的图形，而是看成本质上是单一的和同样的图形。第二步的本质在于，通过采用相应的虚变换来扩充直射变换和对偶变换的基本群。这就要求人们首先采用虚元素来扩充空间固有元素的范围，正象在基本群中采用对偶变换就导致同时引入点和面作为空间元素一样。这里不是讨论引入虚元素是否合适的地方，其实，只有通过虚元素才能使空间理论和先前选用的代数运算的领域准确联合起来；相反，必须特别强调这个事实，即这种引入的理由恰恰在于代数运算的考虑，而不在于射影变换群和对偶变换群上。如同在后

者中，因为实直射变换和实对偶变换已经形成了一个群，我们可以局限于实变换一样，即使我们不立足于投影的观点，我们也可以引入虚元素，并且，只要我们的目的是研究代数实体，我们就应该这样做。

上一节的一般性定理指出了，按投影的观点，应该怎样理解度量性质。这种度量性质必须作为关于一个基本元素的投影关系来考察，这个基本元素就是无穷远虚圆[①]，亦即一个具有只能由也属于主变换群的射影群的变换变为它本身的性质的元素。我们如此明白地陈述的这个定理，还需要一个重要的补充，即限于对空间的实元素（和实变换）作通常的考察。于是，还应该明确地把无穷远虚圆补充到空间的实元素（点）系统上，以便与这个观点完全融洽。初等几何学意义下的性质如果是投影的性质，那么，它们要么是图形的固有性质，要么是一些关于这个实元素系统、或者关于无穷远虚圆，甚至同时关于两者的投影关系。

在这里，大家还可以回想起冯·施陶特（von Staudt）在他的《位置几何学》中怎样建立了射影几何学，这种射影几何学的基本群仅仅包含了实射影变换和对偶变换[②]。

在这部著作中，我们明白了，他如何仅从通常的诸考察的内容里取出在射影变换之下不变的东西。如果我们往后也想这样考察度量性质，那么，就需把这些性质作为相对于无穷远虚圆的关系引入。这样完成的思想进程对在这里提出的诸考察有极大的重要性，因为，它使我们有可能在即将提出的诸方法的每一种意义下建立相应的几何学。

……

---

① 这个概念应该作为 Chasles 最美好的成就之一来看待，只有它才能对于人们乐于放在射影几何学开端的度量性质与投影性质之间的差异给以一个确切意义。——原注

② 仅在《位置几何学》(Beiträge zur Geometrie der Lage)中，冯·施陶特取最宽广的群作为基础，一些虚变换也在其中出现。——原注

注　　释

一、关于现代几何学中综合方法和解析方法的比较

目前，人们不再去注意现代综合几何学和解析几何学之间的实质性差别，因为，它们的研究内容和讨论方式越来越变得完全类似了。因此，在正文中，我们统统采用射影几何学这个词作为两种几何学的共同名称。如果说，综合方法更多地通过空间直观进行研究，并且以它的第一批基本理论而具有特殊的诱惑力的话，那么，一个这样的空间直观领域并不排除解析方法，并且，人们能把解析几何学的公式理解为几何关系的一个清晰而严谨的表达式。另一方面，当然不该低估一个非常合适的表述系统由于在一定程度上超越当时的思维而对后来的研究带来的好处。然而，也不应该放弃这样一个原则，即当一个数学问题还没有变成明显的直观时，就不应当被看作完全彻底解决了的问题；而只有表述系统的推进，才是迈出了很重要的头一步。

二、现代几何学的分科

举例来说，如果我们考察一下，数学物理学家在大多数情况下是怎样不愿借助于那怕是不十分发展的射影直观；而另一方面，射影几何学家又不去接触如曲面的曲率理论所揭示了的丰富多采的数学真理的宝藏，我们就不得不看到几何学知识的当前状况：一方面不十分完全，另一方面又是充满希望的和过渡性的。

三、关于空间直观的重要性

在正文中，当我们把空间的直观看成某种重要的东西时，我们是指根据需要明确表示的诸考察的纯数学内容而言的；直观只不过是使这种考察变为容易感觉到的东西。事实上这种方法的作用，从教育学的观点看，应该认为有不可估量的意义。因此，按这种观点看一种几何模型是非常富有教育意义的，也是非常有趣的。

但是，空间直观的重要性的问题，一般说来，这完全是另外一回事。我把直观看成本身是某种独立存在的东西。这就存在着一种真正的几何学，对于类似正文中的研究，它并不仅仅给抽象考察以可以感觉的形式。在这里，空间图形应该按照它们的本来面貌来

理解，并且（作为数学的一个侧面）应该作为空间直观公设的明显推论来揭示它们的关系。一种模型——它可以被阐述、被直观感觉到，或仅仅明显地摆在眼前，对于这种几何学，并不是一种达到目的的工具，而正是事情的本身。

当我们这样把几何学作为一个独立对象与纯数学互不相关地并列起来时，实际上，我们没有作出什么新的东西。而新近的研究差不多完全忽视了这一点，那么，再一次明确强调指出它当然是大家所希望的。不管怎样，新的研究方法纵然可能被掌握了，倒是难得用于研究空间实体的形式关系，虽然在这个方向上，它们恰恰显得前途无量。

四、关于任意维流形

我们所考察的空间，作为点的存在场所，只有三维，从数学上看，这是无可争议的；但是，人们不知道，这一观点长期以来妨碍了我们去确定是不是有四维或任意维的空间，虽则我们只能亲身感受到三维空间。多维流形的理论在现代数学研究中越来越走在前面，以致在本质上，它的独立性是确定无疑的。同时，基于这种思想，在此当然确立了这样一种见解。人们不再讲一个流形的元素，而是讲一个高维空间的点，等等。就它本身来讲，这种表达方式有许多好处。只要回顾一下几何概念，它就是容易理解的。但是，它也有这样一个不利的结果，就是说，在大多数情况下，关于多维流形的研究被看成仅仅是一个和我们刚刚提到的关于空间本质的那些思想相一致的东西。再也没有什么东西比这个论点更缺乏根据了。如果这些见解是正确的，那么，这类数学研究会立刻找到一个几何应用；但是，它们的作用正如它们的目的一样，与这些见解完全无关，而是寓于纯数学的内容之中。

普吕克（Plücker）指出了完全另外一种形式，它引入依赖于任意多个参数的图形（曲线、曲面等等）作为空间元素（见正文的第五节），从而把真实的空间看作一个任意维流形。

格拉斯曼在《扩张论》（Ausdehnungslehre）（1844）中首先阐述了这样一种看法，即把一个任意维流形的元素当作类似于空间的

点来考察。格拉斯曼完全摆脱了我们刚刚提到的关于空间本质的那些思想;顺便说一下,这些思想可以上溯到高斯提出的见解,并且随着黎曼关于多维流形的研究传播开来了。

格拉斯曼和普吕克的这两种观点,各有所长;这两种方法人们都在使用,根据需要,有时用这种,有时又用那种。

……

(何绍庚、郭书春 译　吴新谋、田方增、胡作玄、贺　霖 校[1])

---

① 《埃尔朗根纲领》中译文全文原载《数学史译文集》,pp. 13~32,上海科学技术出版社,1981。本文摘录的内容系郭书春所译,由贺霖复校。

79. 希尔伯特:《几何基础》

另一条统一几何学的途径是希尔伯特公理化方法。

希尔伯特(David Hilbert,1862～1943)生于德国哥尼斯堡(今俄国境内加里宁格勒),父亲是一位法官。希尔伯特1880年入哥尼斯堡大学,1885年获博士学位,1893年被聘为哥尼斯堡大学正教授,两年后由克莱茵举荐到格丁根大学执教,并继克莱茵而成为格丁根数学的领头人。希尔伯特典型的研究风格是在重大的数学问题中寻找普遍意义的理论与方法,他以这样的方式跨越和影响了代数不变量、代数数域、几何基础、变分法与积分方程、数理逻辑、理论物理等现代数学的广阔领域。

1899年出版的《几何基础》(Grundlagen der Geometrie,Teubner,Leipzig)使希尔伯特成为现代公理化方法的奠基人。公理化方法是从公理出发来建造各种几何学。希尔伯特在这方面的主要功绩在于:他比任何前人都更透彻地揭示出公理系统的内在逻辑结构,并精确地提出了公理系统的相容性、独立性与完备性要求;希尔伯特还对几何对象作了进一步抽象,从而赋予几何公理系统以最大的一般性。希尔伯特公理化方法在20世纪逐步渗透到几乎所有的纯数学领域和一些物理部门。

《几何基础》在希尔伯特生前出到第七版(7th. ed. Leipzig,1930)。希尔伯特去世后,他的学生贝尔耐斯(P. Bernays)又对第七版进行了多次增补、修订,最后出到第十二版(12nd. ed. Teubner,Stuttgart,1977)。以下摘录《几何基础》导言、第一、二章主要内容(第一章给出了历史上第一个完备的欧几里得几何公理系统,第二章则论

述了公理系统的相容性与独立性问题),系据第十二版译出。

导　言

几何和算术一样,它的逻辑结构只需要少数的几条简单的基本原理做基础。这些基本原理叫做几何公理。建立几何的公理和探究它们之间的联系,是一个历史悠久的问题;关于这问题的讨论,从欧几里得以来的数学文献中,有过难以计数的专著。这问题实际就是要把我们的空间直观加以逻辑的分析。

本书中的研究,是从新尝试着来替几何建立一个完备的,而又尽可能简单的公理系统;要根据这个系统推证最重要的几何定理,同时还要使我们的推证能明显地表出各类公理的含义和个别公理的推论的含义。

第一章　五组公理

§1.　几何元素和五组公理

定义　设想有三组不同的对象:第一组的对象叫做点,用 A, B, C, …表示;第二组的对象叫做直线,用 a, b, c, …表示;第三组的对象叫做平面,用 α, β, γ, …表示。点也叫做直线几何的元素;点和直线叫做平面几何的元素;点、直线和平面叫做空间几何的元素或空间的元素。

设想点、直线和平面之间有一定的相互关系,用“关联”(“在…之上”,“属于”)、“介于”(“在…之间”)、“合同于”(“全合于”,“相等于”)等词来表示,下面的几何公理将给这些关系作出精确而又完整的描述。

几何公理共分成五组,其中每一组表达了直观的某种相互联系的基本事实。这五组公理的名称如下:

Ⅰ.　1—8. **关联公理(结合公理,从属公理)**

Ⅱ.　1—4. **顺序公理(次序公理)**

Ⅲ.　1—5. **合同公理(全合公理,全等公理)**

Ⅳ. 平行公理

Ⅴ. 1—2. 连续公理

§2. 第一组公理:关联公理

本组公理是在前文所提的点、直线和平面这三组对象之间建立一种联系,其条文如下:

I_1. 对于两点 A 和 B,恒有一直线 a,它同 A 和 B 这两点的每一点相关联。

I_2. 对于两点 A 和 B,至多有一直线,它同 A 和 B 这两点的每一点相关联。

我们此处和此后说二、三、…点、直线或平面时,都是指不同的点、直线或平面。

替代"关联",我们也用别的说法,例如,替代直线 a 同 A 和 B 的每一点相关联这句话,我们也说:a 通过 A 和 B,a 连结 A 和 B;又如,替代 A 同 a 相关联这句话,我们也说:A 在 a 上,A 是 a 的或 a 上的一点,a 上含有点 A 等等,若 A 既在直线 a 上,又在另一直线 b 上,我们也说:直线 a 和 b 相交于 A;A 是 a 和 b 的交点或公共点等等。

I_3. 一直线上恒至少有两点,至少有三点不在同一直线上。

I_4. 对于不在同一直线上的任意三点 A,B 和 C,恒有一平面 α,它同 A,B 和 C 这三点的每一点相关联。对于任一平面,恒有一点同这平面相关联。

在这种情形下,我们也说:点 A 在 α 上,点 A 是 α 的点等等。

I_5. 对于不在同一直线上的三点 A,B 和 C,至多有一平面,它同 A,B 和 C 这三点的每一点相关联。

I_6. 若一直线 a 的两点 A 和 B 在一平面 α 上,则 a 的每一点都在平面 α 上。

在这种情形下,我们也说:这直线 a 在这平面 α 上等等。

I_7. 若两平面 α 和 β 有一公共点 A,则它们至少还有一公共点 B。

I_8. 至少有四点不在同一平面上。

§3. 第二组公理：顺序公理①

本组公理规定了“介于”亦即“在……之间”这个概念。根据这个概念，直线上的、平面上的和空间中的点才有顺序可言。



图 1

定义 在一直线上的点有一定的相互关系。我们特别用“介于”亦即“在……之间”这个词来描述它。

II_1. 若一点 B 在一点 A 和一点 C 之间(图 1)，则 A，B 和 C 是一直线上的不同的三点，这时，B 也在 C 和 A 之间。



图 2

II_2. 对于两点 A 和 C(图 2)，直线 AC 上恒至少有一点 B，使得 C 在 A 和 B 之间。

II_3. 一直线的任意三点中，至多有一点在其他两点之间。

在这三条直线顺序公理之外，还需要一条平面顺序公理。

定义 我们考虑一直线 a 上的两点 A 和 B；我们把这一对点 A 和 B 所成的点组叫做一条线段，用 AB 或 BA 表示。在 A 和 B 之间的点叫做线段 AB 的点，或线段 AB 内部的点；A 和 B 叫做线段 AB 的端点，直线 a 上的其他的点叫做线段 AB 外部的点。

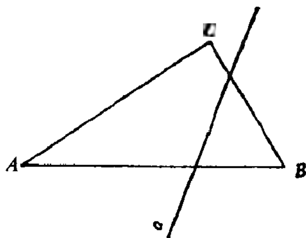


图 3

II_4. 设 A，B 和 C 是不在同一直线上的三点：设 a 是平面 ABC 的一直线，但不通过 A，B，C 这三点中的任一点(图 3)，若直线 a 通过线段 AB 的一点，

① M. 帕士(M. Pasch)在他的书《新几何讲义》(Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig, 1882)中，首先详细地研究了这些公理，特别是公理 II_4. 实质上源于 M. 帕士。——原注

则它必定也通过线段 AC 的一点，或线段 BC 的一点。

§5. 第三组公理：合同公理

本组公理规定“合同”这个概念，利用它就可以规定运动的概念。

线段间有一定的相互关系，我们用“合同”或“相等”这个词来描述。

Ⅲ$_1$. 设 A 和 B 是一直线 a 上的两点，A' 是这直线或另一直线 a' 上的一点，而且给定了直线 a' 上 A' 的一侧，则在直线 a' 上 A' 的这一侧，恒有一点 B'，使得线段 AB 和线段 $A'B'$ 合同或相等；用记号表示，即

$$AB \equiv A'B'$$

这条公理要求线段迁移的可能性。它的唯一性，将在以后予以证明①。

我们曾用 A，B 两点所成的点组规定一条线段，并用 AB 或 BA 表示。所以我们在线段的定义里，并不考虑这两点的顺序；……

Ⅲ$_2$. 若两线段 $A'B'$ 和 $A''B''$ 都和另一线段 AB 合同，则这两线段 $A'B'$ 和 $A''B''$ 也合同；简言之，若两线段都和第三线段合同，则它们彼此也将合同。

合同或相等只是由这两条公理才引入几何的，“每一条线段和它自己合同”，绝不是自明的事实，但它可由前两条公理推出。②……

Ⅲ$_3$. 设两线段 AB 和 BC 在同一直线 a 上，无公共点，而且两线段 $A'B'$ 和 $B'C'$ 在这直线或另一直线 a' 上亦无公共点(图 11)③。若

$$AB \equiv A'B' \quad 而且 \quad BC \equiv B'C'$$

---

① 本摘录中略去了这一证明。

② 以下的推证及有关合同性质的“对称性”和“传递性”的说明从略。

③ 这里保留了原文的图序号。

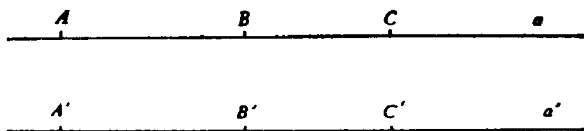


图 11

则

$$AC \equiv A'C'$$

这条公理要求线段能够相加。

就象处理线段的迁移那样，现在我们要同样地处理角的迁移。不过，我们除了用公理要求角的迁移的可能性外，还必须要求它的唯一性，至于传递性和可加性，则将能予以证明。

定义 设 α 是任一平面，而且 h 和 k 是 α 上的，从一点 O 起始的，不属于同一直线的两条射线，我们把这一对射线 h 和 k 所成的线组叫做一个角，用 $\angle(h,k)$ 或 $\angle(k,h)$ 表示，射线 h 和 k 叫做这个角的边；点 O 叫做这个角的顶点。

根据这定义，平角和凸角(大于平角的角)都不在考虑之中。

……①

角与角之间有一定的相互关系，我们用"合同"或"相等"这个词来表示它。

Ⅲ$_4$. 设给定了一平面 α 上的一个角 $\angle(h,k)$，一平面 α' 上的一直线 a'，和在 α' 上 a' 的一侧．设 h' 是 a' 上的，从一点 O' 起始的一条射线，则平面 α' 上恰有一条射线 k'，使 $\angle(h,k)$ 与 $\angle(h',k')$ 合同或相等，而且使 $\angle(h',k')$ 的内部在 a' 的这给定了的一侧；用记号表示，即

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

每一个角和它自己合同，即

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$$

① 以下略去关于"角内"、"角外"的定义。

我们也简单地说：每一个角都能用唯一确定的方式迁移到一个给定了的平面上，使它沿着一条给定了的射线，并且在这射线的给定了的一侧。

如同线段我们不考虑它的方向，在角的定义中我们也不考虑旋转方向。……

Ⅲ_5. 若两个三角形[①] ABC 和 $A'B'C'$ 有下列合同式

$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$

则也恒有合同式

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

……

§7. 第四组公理：平行公理

……

Ⅳ（**欧几里得公理**） 设 a 是任一直线，A 是 a 外的任一点。在 a 和 A 所决定的平面上，至多有一条直线通过 A，而且不和 a 相交。

定义 根据上文和平行公理，我们知道：在 a 和 A 所决定的平面上，恰有一直线，通过 A 而且不和 a 相交。我们把这条直线叫做通过 A 的 a 的平行直线。

……

§8. 第五组公理：连续公理

Ⅴ_1（**度量公理或阿基米德公理**） 若 AB 和 CD 是任意两线段，则必存在一个数 n 使得沿 A 到 B 的射线上，自 A 作首尾相接的 n 个线段 CD，必将越过 B 点。

Ⅴ_2（**直线完备公理**）[②] 一直线上的点集连同其顺序关系与合

---

① 此处以及以后总假设一个三角形的三个顶点，不在一直线上。——原注

② 希尔伯特在《几何基础》第一版中并未列入这一公理，后经庞加莱等学者指出：第一版中的公理系统对于通常意义下的欧几里得几何的结构而言是不充分的。事实上，在通常用笛卡儿直角坐标 x,y,z 表示的欧氏空间中，只保留三个坐标 x,y,z 均为代数数的点而剔除所有其余的点，则在这种"多孔"空间中，希尔伯特的全部公理仍然有效，但这个空间却是不完备的，于是希尔伯特在"几何基础"第二版中又加进了一个"完备公理" Ⅴ_2，它在最后一版里则以较为简化的形式——"直线完备公理"而出现。

同关系不可能再这样地扩充，使得这直线上原来元素之间所具有的关系，从公理 I — Ⅲ 所推出的直线顺序与合同的基本性质以及公理 V_1 都仍旧保持。

……

完备公理中所要求保持的诸公理之一是阿基米德公理，这是完备公理从本质上能以建立所不可缺少的一个条件。其实我们能够证明：若直线上的一个点集能满足上面所列举的关于顺序公理和定理以及合同公理和定理，这点集就恒能够增加新点，使扩充后的点集还满足这里所提到的诸公理；也就是说，如果一条完备公理，只要求保持这里所提到的诸公理和定理，但不要求保持阿基米德公理或一条等价的公理就要产生矛盾。

……

第二章　公理的相容性和互相独立性

§9. 公理的相容性

第一章里所提到的五组公理中的公理是有相容性的（即不互相矛盾的）；这就是说，不可能从所提到的这些公理出发，用逻辑推论得到和其中一条公理相矛盾的事实。我们现在就是要说明这些公理的相容性，我们的方法是用实数作成一组对象，指出这一组对象满足这五组公理中的全体公理。

首先考虑数域 Ω，其中的数都是从 1 这个数出发，作有限次下列五种运算得来的代数数：加，减，乘，除和第五种运算 $|\sqrt{1+\omega^2}|$，这里的 ω 每次都表示运用这五种运算业已得来的某一个数。

然后把数域 Ω 中的任意一个数偶 (x,y)，看作是一个点；把 Ω 的任意三个数的比 $(u:v:w)$，在 u,v 不都等于零的时候，看作是一条直线；而且在方程

$$ux+vy+w=0$$

成立的时候，就把 (x,y) 这个点看作是在 $(u:v:w)$ 这条直线上。我们很容易知道，公理 I_{1-3} 和 Ⅳ 都将满足。数域 Ω 中的数都是实数；考虑到它们可以按大小来排列，我们就能很容易地对我们的点

和直线，作出规定，使得第二组的顺序公理也全体成立。事实上设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots$ 是一条直线上的点。在数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 或 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 是单调递减的或单调递增的序列的时候，我们就把这些点的这里写下的顺序，看作是这些点在这直线上的顺序。为了再满足公理 I_4 的要求，我们只需要规定：所有的点 (x, y)，使 $ux+vy+w$ 大于零的，在 $(u:v:w)$ 这直线的一侧；而使 $ux+vy+w$ 小于零的，在这直线的另一侧。我们很容易看出，这个规定和关于共线点的顺序的规定是符合的。

我们根据解析几何里的方法，规定线段的迁移和角的迁移。下述类型的一个变换

$$x'=x+a$$
$$y'=y+b$$

给定线段的平移和角的平移，而

$$x'=x$$
$$y'=-y$$

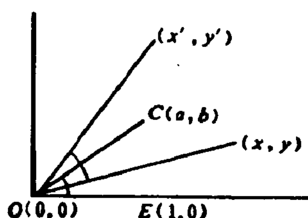


图 28

这个变换给定对于直线 $y=0$ 的一个反射。再用 O 表示点 $(0,0)$，E 表示点 $(1,0)$，C 表示任意一点 (a,b)（图 28）。考虑以 O 为固定点，以 $\angle COE$ 为旋转角的这个旋转。经过这旋转，任意一点 (x, y)，换成 (x', y')，其中

$$x'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y$$

$$y'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y$$

由于

$$\sqrt{a^2+b^2}=b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

这个数仍然属于数域 Ω，所以，在我们的规定下合同公理 III_{1-4} 也成立，而且显然三角形合同公理 III_5 和阿基米德公理 V_1 也是满足的。完备公理 V_2 是并不满足的。

所以直线的和平面的公理 I — IV，V_1 的推论中，若有矛盾，则每一个矛盾必定也在数域 Ω 的算术中出现[1].

若在上文中我们用的不是数域 Ω，而是所有的实数所成的数域，我们所得到的就是通常的平面笛卡儿几何。在这种几何里，不只是公理 I_{1-3}，II，III，IV，V_1 满足，而且完备公理 V_2 也满足，现说明如下：

在笛卡儿几何里，我们只要用顺序的和线段合同的定义，就知道：每一线段都能分成 n 个合同的部分，n 是预先任意给定的一个数；若线段 AB 短于线段 AC，则 AB 分成 n 份中的一份也短于 AC 分成 n 份中的一份。

现在假设平面笛卡儿几何不满足完备公理，即假设一条直线 g 上可增加点，而在 g 上还不破坏公理 II_{1-3}，III_{1-3}，V_1，和定理 5 或迁移线段的唯一性。把增加的点中的一个叫做 N，N 把 g 分成两条射线。根据阿基米德公理，每一条射线都含有在扩充之前就存在的点。我们把这种点叫做旧点。所以 N 把 g 上的旧点分成两条射线。设直线 g 是用参数方程

$$x = mt + n$$

$$y = pt + q$$

表出的，在用点 N 扩充之前，这个参数 t 就已经可以取遍全体实数。因此，由于 N 把直线分成两条射线，我们也就有了实数的一个戴德金(Dedekind)的分割。关于戴德金的分割的两组，我们知道：或者第一组有一个最后的元素，或者第二组有一个最先的元素。设这个元素在直线 g 上所决定的旧点是 A，那末 A 和 N 之间没有旧点。

但是有一个旧点 B，使 N 在 A 和 B 之间。根据阿基米德公理，还有若干个不同的点，姑且说 $n-1$ 个，$C_1, C_2, \cdots, C_{n-2}, D$，使

[1] 关于算术公理的相容性，参看我的关于数的概念的报告(Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung，1900)，以及 1900 年我在国际数学家会议中的讲演“数学问题”(Mathematische Probleme，Göttinger Nachr，1900)，特别是其中的问题 2。——原注

$AN, NC_1, C_1C_2, \cdots, C_{n-2}D$ 这 n 条线段互相合同，而且使 B 在 A 和 D 之间(图 29)。把线段 AB 分成 n 个合同的部分。全体分点都是旧点；把其中离 A 最近的那一个叫做 W。根据本证明之前所提到的直线顺序和合同的要求，因为线段 AB 短于 AD，所以线段 AW 短于 AN。所以 W 这个旧点在 A 和 N 之间。因此我们的假设—g 上可以增加新点而不破坏直线公理的假设，就引起了矛盾。



图 29

所以在平面笛卡儿几何里，全体直线的和平面的公理 Ⅰ — Ⅴ 都成立。

关于立体几何：相应的讨论毫无困难。

所以公理 Ⅰ — Ⅴ 的推论中若有矛盾，则每一个矛盾必定也在实数系的算术中出现。

如所周知，满足公理 Ⅰ — Ⅳ，V_1 的几何有无限多种，而同时还满足完备公理 V_2 的几何只有一种，即笛卡儿几何。

§10. 平行公理的独立性(非欧几里得几何)[①]

我们知道了公理有相容性之后，另一个有趣的问题是研究它们全体是否互相独立。实际上，我们的五组公理的每一个组成部分，都不能够是在它之前的诸组的逻辑推论。

首先，前三组公理中的个别公理，我们很容易证明：同一组中的诸公理基本上是互相独立的。

在我们的叙述中，第一组公理和第二组公理是其余的公理所根据的。所以我们还只要进而证明：第三组、第四组和第五组中的每一组公理都与其余的公理互相独立。

---

① 此外设一种几何里只有公理 Ⅰ — Ⅲ 和 V_1。我们容易证明：在这几何里，平行公理或者对于每一个包含直线 a 和 a 外一点 A 的组都成立，或者对于任一个这样的组都不成立，参看 R. 巴尔都斯，非欧几何(Nichteuklidische Geometrie, Berlin, 1927)。——原注

平行公理Ⅳ和其他公理互相独立；这可以按熟知的方式最简单地证明如下：在§9中所建立的通常的(笛卡儿)几何中，取一固定的球，并考虑使这个球不变的所有的一次变换，用这几何里所有在这个球以内的点和在这个球以内的那部分的直线和平面，而且只限于这些，当作一种空间几何的元素。并通过上述一次变换来定义这种几何的合同关系。我们知道，再加上适当的规定之后，这"非欧几里得"几何里，除去欧几里得公理Ⅳ之外，其它全体公理都满足了，既然§9中的通常的几何已经证明了是可能的，所以这种非欧几里得几何也是可能的。

……

§12. 连续公理的独立性(非阿基米德几何)

要想证明阿基米德公理V_1的独立性，我们必须建立一种几何，它满足除去公理Ⅴ之外的全体公理，但公理Ⅴ却不满足①。

为此，我们作出代数函数域$\Omega(t)$，其中的代数函数都是从t出发，用下列五种运算得来的：加，减，乘，除和第五种运算$\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$，这里的$\omega$表示运用这五种运算业已得来的某一个函数。$\Omega(t)$的元素的集合，如同§9中的$\Omega$的一样，是可数的。这五种运算都是单值的运算，而且不产生虚数；所以域$\Omega(t)$是只含有t的单值的实函数。

设c是域$\Omega(t)$中的任意一个函数，既然c是t的一个代数函数，只有有限个t的值能使c等于零；所以，在t的值是适当大的正值的时候，c的值或者恒是正的，或者恒是负的。

现在，我们把域$\Omega(t)$中的函数看作是一种在下一节§13的意义下的复数。显然，在这样规定的复数系中，通常的运算规律全体成立。我们再进而规定大小。设a和b是这复数系中的任意两个不同的数。按照在t的值是适当大的正值的时候，$c=a-b$这个t的

---

① G. 费罗尼斯(G. Veronese)在他的深奥的著作《几何基础》(Grundzüge der Geometrie，A. 谢卜(A. Schepp)的德译本，Leipzig，1894)里，也作了建立一种独立于阿基米德公理的几何的尝试。——原注

函数恒取正值或恒取负值。我们就说 a 大于或小于 b，用记号 $a>b$ 或 $a<b$ 表示。有了这个规定，我们的复数系中的数就能按照大小而有顺序，和实数的顺序类似；而且很容易看出，对于我们的复数，下列定理成立：若是不等式的两端加以同一个数或者乘以同一个大于零的数，不等式仍然成立。

设 n 表示任意一个正整数。对于域 $\Omega(t)$ 中的 n 和 t 这两数，由于差 $n-t$，作为 t 的函数，在 t 的值是适当大的正值的时候，恒取负值，所以当然 $n<t$。这事实可叙述如下：域 $\Omega(t)$ 中的 1 和 t 这两个大于零的数，具有下述的性质：前一个数的任意一个倍数恒小于后一个数。

我们现在利用复数域 $\Omega(t)$，建立一种几何，犹如在§9 中根据代数数域 Ω 所作的那样。把域 $\Omega(t)$ 中的任意一组三个数 (x,y,z) 看作是一个点；把 $\Omega(t)$ 的任意四个数 $(u:v:w:r)$，在 u,v,w 不都等于零的时候，看作是一个平面，在方程：

$$ux+vy+wz+r=0$$

成立的时候，就把 (x,y,z) 这个点看作是在 $(u:v:w:r)$ 这个平面上，而且把两个具有不同的 $u:v:w$ 的平面的全体公共点看作是一条直线。然后，如同在§9 中一样，规定元素的顺序，线段的迁移和角的迁移。这样就产生了一种"非阿基米德"几何；正如复数系 $\Omega(t)$ 的上述的性质所表明的，在这种几何里，除去连续公理之外，其余公理都满足。实际上，迁移线段 1 到线段 t 上，不管连续迁移多少次，线段 t 的终点都是不会超过的；这和阿基米德公理所要求的矛盾。

完备公理 V_2 也和在它之前的全体公理（公理 I—IV，V_1）互相独立。这是§9 中最先建立的那种几何所表明的；因为在那种几何

里阿基米德公理是满足的。

非阿基米德几何和非欧几里得几何，都具有重大的意义。……

(江泽涵、朱鼎勋 译[1])

---

① 本译文原载希尔伯特《几何基础》(第二版)pp. 1～43，科学出版社，1995，但略去了其后附加的俄译本注释。

Ⅶ. 分析的发展

80. 柯西:论微积分严格化

经过近一个世纪的尝试、酝酿,数学家们在严格的基础上重建微积分的努力到19世纪初开始获得成功。这方面的先声来自捷克学者波尔察诺(B. Bolzano,1781～1848),其代表作《纯粹分析的证明》(1817)以证明连续函数的中值定理为目的,其中包含了对函数连续性、导数等概念的合适定义。但波尔察诺的工作长期湮没无闻。19世纪分析严格化真正有影响的先驱是法国数学家柯西。

柯西(Augustin-Louis Cauchy,1789～1857)出身于巴黎上层家庭。1807年毕业于巴黎桥梁公路学院,初以工程师为业,1816年成为综合工科大学教授和巴黎科学院院士。柯西政治上的保王立场曾造成他科学生涯的波折,但1852年以后,他被作为例外不必宣誓效忠于政府而保留教席,直至去世。

柯西在科学上的多产仅次于欧拉。在数学分析方面,柯西发表的多部巨著,以严格化为目标,对微积分的基本概念(极限、连续性、导数、微分、收敛性等等)给出了精确的定义,并在此基础上重建和拓展微积分的重要事实与定理。现代意义的严格化分析,正是奠基于柯西的经典性工作。以下内容分别摘自柯西两部最具代表性的分析著作:①《分析教程》(Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, 1821)(译文 80.1,80.2,80.3);②《无限小计算教程概论》(Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, 1823)(译文 80.4,80.5,80.6),系根据柯西《全集》(Oeuvres Complètes d'Augustin Cauchy, sér. Ⅱ. Tome Ⅲ, Ⅳ, Gauthier-Villars Paris, 1897～1899)选译。

80.1. 极限与无限小

当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差要多小就多小，那么最后这个定值就称为所有其他值的极限。例如，一个无理数是数值越来越趋近于它的不同分数的极限。在几何中，一个圆周是其边数不断增加的内接多边形周边所收敛的极限，等等。

当同一变量逐次所取的绝对值无限减小，以致比任意给定的数还要小，这个变量就是所谓的**无限小**或**无限小量**，这样的变量将以 0 为极限。

如果同一变量的绝对值不断增加，以致比任意给定的数还要大，那么当所考虑的是正变量时，就说这个变量以正无限大为极限，并用符号∞表示；当所考虑的是负变量时，就说这个变量以负无限大为极限，并用符号$-\infty$表示。正、负无限大统称为**无限大量**。

80.2. 函数的连续性

在属于无限小范畴的研究对象中，我们必须提出与函数的连续性和不连续性有关的概念。让我们首先从这一角度来考察一个单变量函数。

设 $f(x)$是变量 x 的函数，并设对介于两给定限之间的每一个 x 值，该函数总有一个唯一的有限值。如果在这两给定限之间有一个 x 值，当变量 x 获得一个无限小增量 α，函数本身将增加一个差量

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

这个差同时依赖于新变量 α 和原变量 x 的值。然后，如果对变量 x 在两给定限之间的每一个中间值，差 $f(x+\alpha)-f(x)$的绝对值都随 α 的无限减小而无限减小，那么就说函数 $f(x)$是变量 x 在这两个限之间的一个连续函数。换言之，函数 $f(x)$在给定限之间关于 x 保持连续，如果在这两个限之间变量的每个无限小增量总产生函数 $f(x)$本身的一个无限小增量。进一步，我们说函数 $f(x)$是变量 x 在 x 的某个特殊值的邻域内的连续函数，如果它在包含该 x

值的任意接近的两个限之间连续。

80.3. 收敛性

一个序列是量 $u_1, u_2, u_3 \cdots$ 的一个无限延续，其中各量按某个确定的法则分别先后。这些量本身成为所研究的序列的不同项。设

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

是该序列前 n 项的和，这里 n 为某个整数。如果和 s_n 随着 n 值的增大而趋向于一个确定的极限，那么就说这个级数[①] 是收敛的，这个极限就叫做该级数的和。反之，如果部分和 s_n 随着 n 的无限增大并不趋向于任何确定的极限，则级数是发散的，它没有和。在两种情形，与指标 n 相对应的项，即 u_n，被称为通项。为了完全确定一个序列，只要给出作为指标 n 的函数的通项公式就够了。

最简单的序列的一个例子，就是几何序列 $1, x, x^2, x^3, \cdots$，其通项为 x^n，即 x 的 n 次幂。如果将该序列的前 n 项相加，我们得到

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 1/(1-x) - x^n/(1-x)$$

当 n 值无限增大时，分数 $x^n/(1-x)$ 或者趋于零，或者无限增大而超过任意有限的数，这取决于 x 的值小于 1 还是大于 1。因此我们将得出结论：在第一种假设下，级数 $1, x, x^2, x^3 \cdots$ 定义一收敛级数，其和为 $1/(1-x)$；而在第二种假设下，同一级数则定义了一个没有和的发散级数。

根据以上建立的原理，级数

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

收敛的充分必要条件是：当 n 无限增大时，和 $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ 趋向于一个确定的极限。换句话说，该级数收敛的充分必要条件是：对于无限大的 n 值，和 $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots$ 与有限数 s 之差，从而它们相互之差，是无限小量。另外，第一个和 s_n 与随后各和之间的逐次差分别由下列方程确定：

---

① 柯西原文用同一个法文词“série”表示“序列”和“级数”，并用逗号“，”表示级数中的“+”号。

$$s_{n+1}-s_n=u_n, s_{n+2}-s_n=u_n+u_{n+1}, s_{n+3}-s_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}, \cdots$$

因此,级数(1)收敛的必要条件是:随着 n 值无限增大,通项 u_n 无限减小。但这一条件并不充分,对于无限增大的 n 值,不同的和 $u_n+u_{n+1}, u_n+u_{n+1}+u_{n+2}, \cdots$,即量 $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots$ 从第一项起连续取任意多项的和,也必将是一个比任给有限数都小的量。相反,如果所有这些不同的条件全部满足,那么该级数的收敛性就获得保证。

80.4. 导数与微分

如果函数 $y=f(x)$ 在变量 x 的两给定限之间连续,并在这两个限之间指定变量的一个值,那么这变量的一个无限小增量 Δx 将产生函数本身的一个无限小增量。因此,若设 $\Delta x=h$,则下列差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

中的两项均为无限小量。虽然这两项同时趋于零,但比值本身却可能收敛于另一个极限,它可以是正数,也可以是负数。这个极限,如果存在的话,对于每个特殊的 x 值都将有一个确定的值,但这个值将随 x 的变化而变化。这样,例如我们取 $f(x)=x^m$,m 是一(正)整数,则无限小差的比将是

$$\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}h+\cdots\cdots+h^{m-1}$$

其极限等于量 mx^{m-1},也就是说是变量 x 的一个新的函数。同样的事实普遍成立,只是作为比 $[f(x+h)-f(x)]/h$ 的极限的这个新函数的形式将随已给函数 $y=f(x)$ 的不同而不同。为了表明这种依赖关系,我们称这个新的函数为导函数,并用带撇的符号 y' 或 $f'(x)$ 来表示它。

单变量函数的微分

设 $y=f(x)$ 是一个独立变量 x 的函数;设 h 为一无限小量,而 k 为一有限量。如果我们设 $h=\alpha k$,那么 α 将是一个无限小量,同时我们将有恒等式

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+\alpha k)-f(x)}{\alpha k}$$

由此可得：

$$(1) \qquad \frac{f(x+\alpha k)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}k$$

当变量 α 趋于零而 k 保持不变时，方程(1)左端所收敛的极限叫做函数 $y=f(x)$ 的微分。我们用符号 d 来表示这个微分，记作

$$dy \text{ 或 } df(x)$$

如果我们已经知道导函数 y' 或 $f'(x)$ 的值，那就很容易得到微分的值。事实上，在方程(1)两边取极限，我们就得到一般的结论

$$(2) \qquad df(x)=kf'(x)$$

在 $f(x)=x$ 这一特殊情形，方程(2)变成

$$dx=k$$

80.5. 定积分

假设函数 $y=f(x)$ 关于变量 x 在两个有限界限 $x=x_0$，和 $x=X$ 之间连续，我们用 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 来表示 x 的位于这两个限之间的一些新值，并假定它们在第一个限与第二个限之间或者总是递增，或者总是递减。我们可以用这些值将差 $X-x_0$ 划分成元素

$$x_1-x_o, x_2-x_1, x_3-x_2, \cdots, X-x_{n-1}$$

这些元素都有相同的符号。作了这样的划分后，我们将每个元素与该元素左端点所对应的 $f(x)$ 值相乘，即：元素 x_1-x_0 乘以 $f(x_0)$，元素 x_2-x_1 乘以 $f(x_1)$，…，最后，元素 $X-x_{n-1}$ 乘以 $f(x_{n-1})$，同时设

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

是这样一些乘积的和。显然量 S 将依赖于：第一、差 $X-x_0$ 被分成的元素个数 n；第二、这些元素的数值，从而也就依赖于所采用的划分方法。

注意到以下事实十分重要：如果这些元素的值变得非常小而数 n 变得非常大，那么划分方法对 S 的值将没有实质性影响。这一点可具体证明如下[①]。

---

① 柯西在这里给出了上述事实的证明，本译文从略，但我们可以在紧接的段落中看到柯西这一证明的概述。

……

现在我们来考虑差 $X-x_0$ 的两种不同的划分方法，在两种分法中这个差的所有元素的数值都非常小。我们可以将这两种分法与第三种分法进行比较，后者是这样选取的，使得前两种划分中的任一元素，都可以看作是由这第三种划分的若干元素合并形成。为了满足这一条件，只要使前两种划分中位于 x_0 和 X 两限之间的每一个 x 值在第三种划分中全部被用到。我们可以证明，当从第一种或第二种划分转为第三种划分时，S 的值只有很微小的变化——因此从第一种划分转为第二种划分时情形也一样。于是当差 $X-x_0$ 的元素变为无限小时，划分方法对 S 的值的影响无足轻重；这样，如果我们让这些元素的数值随着它们个数的无限增加而无限减小，那么就一切实用的目的而言，S 的值最终将变为常数。或者说，它最终将达到一个确定的极限，而这个极限仅依赖于函数 $f(x)$ 的形式和变量 x 的边界值 x_0 和 X。这个极限就叫做定积分。

80.6. 两个重要的微积分定理

(a) 微积分基本定理

在定积分 $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ 中，我们设两个积分限之一，例如 X 是可变的，积分本身将随着这个量的变化而变化。如果用 x 来代替这个现在已成为可变的积分限 X，我们就得到 x 的一个新的函数，这个新函数被称为是以 $x=x_0$ 为起点的积分。设

(1) $\mathscr{F}(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$

是这个新函数，由公式 $\int_{x_0}^{X} f(x)dx=(X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)]$ 可以推得

(2) $\mathscr{F}(x)=(x-x_0)f[x_0+\theta(x-x_0)], \mathscr{F}(x_0)=0,$

θ 是小于 1 的非负数。同样，由公式

$\int_{x_0}^{X} f(x)dx=\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx+\int_{\xi}^{X} f(x)dx$（此处 $x_0\leqslant\xi\leqslant X$）可以推得

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx-\int_{x_0}^{x} f(x)dx=\int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx=\alpha f(x+\theta\alpha)$$

或

$$(3)\quad \mathscr{F}(x+\alpha)-\mathscr{F}(x)=\alpha f(x+\theta\alpha).$$

从方程(2)和(3)可知：若函数 $f(x)$ 在变量 x 的某个特殊值的邻域内有限且连续，则新函数 $\mathscr{F}(x)$ 在该值的邻域内不仅有限而且也连续，因为 x 的一个无限小增量将对应于 $\mathscr{F}(x)$ 的一个无限小增量。于是如果函数 $f(x)$ 从 $x=x_0$ 到 $x=X$ 保持有限且连续，那么同样的结论对函数 $\mathscr{F}(x)$ 亦将成立。另外，如果公式(3)两边除以 α，则通过取极限我们可以得到

$$\mathscr{F}'(x)=f(x).$$

这样，积分(1)作为 x 的函数将以积分号 $\int$ 下的函数 $f(x)$ 为其导函数。

(b)中值定理①

设 $f(x)$ 是变量 x 的一个实函数，且在 $x=x_0$ 与 $x=X$ 之间关于该变量连续。如果两个量 $f(x_0)$ 和 $f(X)$ 符号相反，那么在 x_0 和 X 之间至少有一个 x 的实数值能满足方程

$$f(x)=0.$$

证明　设 x_0 是两个量 x_0 和 X 中的较小者。我们设 $X-x_0=h$，并用 m 表示任一大于 1 的整数。因为两个量 $f(x_0)$，$f(X)$ 中有一个为正，另一个为负，由此可知：如果我们构造序列

$$f(x_0),f(x_0+h/m),f(x_0+2h/m),\cdots,f(X-h/m),f(X)$$

并逐次将该序列的第一项与第二项相比较，第二项与第三项相比较，第三项与第四项相比较，等等，最终我们将有一次或多次发现

---

① 正如我们在编者按中所指出，在柯西之前，波尔察诺已陈述并证明过中值定理。波尔察诺 1817 年的小册子全名为《下述定理的纯粹分析的证明——在每两个使函数取相反符号值的自变量值之间，至少存在函数的一个实根》(Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwei werthen, die ein entgegengesetztes resultat gewähren, wenigstens eine reele wurzel der gleichung liege, Prag, 1817)。该书当时并未广泛流传，1871 年才被 Hermann Hankel 重新发现。因此柯西可能不了解波尔察诺的工作。

两个相继但符号相反的项。

假定 $f(x_1)$ 和 $f(X')$ 是这样两个项，这里 x_1 是两对应 x 值中较小的一个。显然我们将有 $x_0<x_1<X'<X$ 和 $X'-x_1=h/m=1/m(X-x_0)$。用上述方法确定 x_1 和 X' 后，我们又可类似地在这两个新的值之间找到另外两个值 x_2, X''，将它们代入 $f(x)$，结果就会得到两个符号相反的 $f(x)$ 值，且满足条件 $x_1<x_2<X''<X'$ 以及 $X''-x_2=1/m(X'-x_1)=1/m^2(X-x_0)$. 如此继续下去，我们将得到：第一，一个 x 值的递增序列，即

$$(1) \qquad x_0, x_1, x_2, \cdots$$

第二，一个 x 值的递减序列，即

$$(2) \qquad X, X', X'', \cdots$$

第二个序列各项超过第一个序列相应项的部分在数量上分别等于下列乘积：

$$(X-x_0), (1/m)(X-x_0), (1/m^2)(X-x_0), \cdots$$

因此这两个序列对应项的数值差最终将变得要多小就有多小。由此我们必然得出这样的结论：序列(1)和(2)的通项分别收敛于同一个极限。设 a 是这个极限。因为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 与 $x=X$ 之间连续，则下列两个序列

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots; f(X), f(X'), f(X''), \cdots$$

的通项将收敛于同一个极限 $f(a)$，同时因为当它们趋向这个极限时总是保持着相反的符号，则显然量 $f(a)$（它必定是有限的）就必须等于零。因此如果我们使变量 x 取介于 x_0 和 X 之间的这个特殊值 a，则方程

$$(3) \qquad f(x)=0$$

必将满足。换句话说，$x=a$ 将是方程(3)的一个根。

（李文林 译）

81. 傅里叶:论傅里叶级数与傅里叶积分

傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768～1830)生于法国中部欧塞尔一个裁缝家庭,8岁时沦为孤儿,就读于地方军校,1795年任巴黎综合工科大学助教,1798年随拿破仑军队远征埃及,受到拿破仑器重,回国后被任命为格伦诺布尔省省长,由于对热传导理论的贡献于1817年当选为巴黎科学院院士,1822年成为科学院终身秘书。

傅里叶早在1807年就写成关于热传导的基本论文,但经拉格朗日、拉普拉斯和勒让德审阅后被科学院拒绝,1811年又提交了经修改的论文,该文获科学院大奖,却未正式发表。1822年,傅里叶终于出版了专著《热的解析理论》(Théorie analytique de la Chaleur, Didot, Paris, 1822)。这部经典著作将欧拉、伯努利等人在一些特殊情形下应用的三角级数方法发展成内容丰富的一般理论,三角级数后来就以傅里叶的名字命名。傅里叶应用三角级数求解热传导方程,同时为了处理无穷区域的热传导问题又导出了现在所称的"傅里叶积分",这一切都极大地推动了偏微分方程边值问题的研究。然而傅里叶的工作意义远不止此,它迫使人们对函数概念作修正、推广,特别是引起了对不连续函数的探讨;三角级数收敛性问题更刺激了集合论的诞生。因此,《热的解析理论》影响了整个19世纪分析严格化的进程。

以下摘录《热的解析理论》中引进傅里叶级数[81.1]和傅里叶积分[81.2]的段落,转译自A. 弗里曼(Freeman)的英译本:J. Fourier, The Analitical Theory of

Heat, Dover, New York, 1955, Chap. Ⅲ, pp. 129～136, 154～155, 185～188 和 Chap. Ⅸ, pp. 335～338, 343～345.《热的解析理论》原文亦载 J. Fourier, Oeuvres, t. I. Gauthier-Villars, Paris, 1888.

81.1. 傅里叶级数

163. 通过上述方法,关于热在固体内部均匀传导和多变运动[①] 的问题就归结为纯粹数学分析的问题;因而物理学这一分支的进步将依赖于分析中取得的进展。我们所导出的微分方程包含了这一理论的主要结果;它们以最一般,最简明的方式表达了对非常广泛的一类现象进行数值分析所必需的关系,并且恒久地把自然哲学中最重要的分支之一同数学科学联结起来。

现在需要为求出这些方程完全的解及其应用发现恰当处理它们的方法。下述问题提供了分析中导致这样的解的第一个例子;据我看来,这是最适于说明我们所用方法的例子。

164. 设一均匀固体物质为二垂直、平行的无穷平面 B,C 所界定,并由垂直于此二平面的平面 A 划分为两个部分(图 1)[②];我们要考察由三张无穷平面 A,B,C 所围的物质 BAC 的温度。假定所说无穷固体的另一部分 $B'AC'$ 保持恒定热源,即其各点均保持常温为 1。假定分别由平面 C,A 和平面 B,A 所围的两侧面固体通过某种外源保持常温为 0;最后,由 A,B,C 所围固体的分子具有初始温度 0,这样热就会由源 A 连续流进固体 BAC,并纵向传播至冷体 B 和 C,这两者将吸收热的一大部分。固体 BAC 的温度将逐渐升高,但决不会超过甚至也不会达到最高温度,此温度依此物质中相异的点而不同。需要确定温度的变动状态所连续趋向的最

① 此处傅里叶的原意当是把热传导处分为不依赖于时间即遵从拉普拉斯方程和依赖于时间即遵从热传导方程两种情形。

② 本篇图序经本书编者重编。

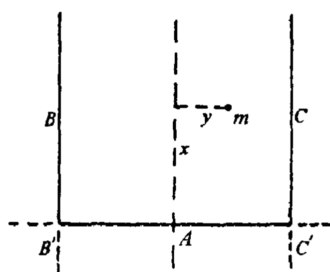


图　1

终的定常状态。

……

165. 为更简短地描述同一问题，假定长度为无穷的矩形板 BAC 在其底 A 处被加热从而使底的各点保持恒温 1；设垂直于底 A 的两半无穷边 B 和 C 的各点具有常温 0；问题在于确定此板任一点的稳定温度。

假定……把板分为两相等部分的直线 Ax 取作 x 轴，而任一点 m 的坐标为 x,y；最后，板的宽度记作 l，或为使计算简短，记作 π，……

设想固体板 BAC 的坐标为(x,y)的点 m 具有实际温度 v，……

166. 为把一般方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{k}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)①$$

应用于问题中的情形，我们必须假定 z 坐标可以忽略，因而$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$可略去。由于我们要确定的是稳定温度，因而第一项消失。这样方程……就是

$$\text{(a)}\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

表示固体 BAC 永久状态的 x,y 的函数 $\varphi(x,y)$必须首先满足方程(a)；其次，当我们对 y 代之以$\pm\pi/2$ 时，不论 x 为何值均等于零；第三，当 $x=0$，$-\pi/2<y<\pi/2$ 时它等于 1。

此外，由于热量来自源 A，当 x 非常大时，函数 $\varphi(x,y)$应当变得非常小。

167. 为适应所提问题的特征考虑此问题，我们将首先求出满足方程(a)的最简单的 x,y 的函数；然后拓广 v 的值使之满足全部

① 此处的记号 ∂ 傅里叶用的是 d。

所述条件。这样我们将得到最一般的解，并证明所给问题没有其他的解。

对于二元函数，当我们赋予一个或同时赋予两个自变量无穷值时，常可退化为较不复杂的表示式；此点可由代数函数看出，在其特殊情形，它取 x 的一个函数和 y 的一个函数之积的形式。

我们将首先检验 v 的值能否表示为这样的乘积[①]，因为 v 必须在整个板的范围内表示其状态，从而必须表示 x 坐标为无穷的点处的状态。于是我们写出 $v=F(x)f(y)$；代入方程(a)，并以 $F''(x)$ 记 $d^2F(x)/dx^2$，以 $f''(y)$ 记 $d^2f(y)/dy^2$，即有

$$\frac{F''(x)}{F(x)}+\frac{f''(y)}{f(y)}=0.$$

我们然后假定 $F''(x)/F(x)=m, f''(y)/f(y)=-m$[②]，$m$ 为任一常数；由于只想求得 v 的特殊值，我们从上述方程导出 $F(x)=e^{-mx}$，$f(y)=\cos my$。

168. 我们不能假定 m 为负数，从而必须排除所有含有 m 为正数的因子 e^{mx} 的 v 值，因为温度 v 当 x 为无穷大时不能变成无穷大。……

函数 $e^{-mx}\cos my$ 中的指数 m 为未知，……；但为使 v 当 $y=\pm\pi/2$ 时对所有 x 等于零，m 必须取序列 $1,3,5,7,\cdots$ 中的某一项；这样第二个条件就将满足。

169. 通过把若干类似于前述的项相加，就易于构成 v 的更一般的值；于是

(b) $$v=ae^{-x}\cos y+be^{-3x}\cos 3y+ce^{-5x}\cos 5y+de^{-7x}\cos 7y+\cdots$$ [③]

显见记为 $\varphi(x,y)$ 的函数 v 满足方程 $\partial^2 v/\partial x^2+\partial^2 v/\partial y^2=0$ 以及条件 $\varphi(x,\pm\pi/2)=0$. 还要满足第三个条件，它可表示为 $\varphi(0,y)=1$，关键在于注意此结果必须对任何 $-\pi/2<y<\pi/2$ 成立。如果 y 不

---

① 这就是现在通称的“分离变量法”。

② 原文如此。实际上这两项中的 m 应为 m^2。

③ 此处的“…”傅里叶用的是“& c”下同。

位于$-\pi/2$和$\pi/2$之间，就不能推断函数$\varphi(0,y)$取值的任何情形。因此方程(b)必须满足如下的条件：

$$1=a\cos y+b\cos 3y+c\cos 5y+d\cos 7y+\cdots$$

无穷多个系数$a,b,c,d,\cdots$由这一方程式确定。

上式右端是y的函数，只要$-\pi/2<y<\pi/2$，它就等于1。或许会怀疑这样的函数是否存在，但通过后面的论述即可充分消除这种异议。①

……

通解

190. 现在我们已能构成所提问题的通解；因为方程(b)(§169)中的系数已确定，因此只须把它们代入，从而我们有

(a) $$\frac{\pi v}{4}=e^{-x}\cos y-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3y+\frac{1}{5}e^{-5x}\cos 5y-\frac{1}{7}e^{-7x}\cos 7y+\cdots$$

这个v的值满足方程$\partial^2 v/\partial x^2+\partial^2 v/\partial y^2=0$；若$y=\pm\pi/2$，则$v=0$，且若$x=0$，$-\pi/2<y<\pi/2$，则$v=1$，这样所提问题的全部物理条件都被满足，因而可以肯定，如果我们对所说板的每个点给定由方程(a)确定的温度，而且如果同时底A保持温度为1，无穷边B，C保持温度为0，则温度分布就不可能出现任何变化。

……

219. [对函数

$$\varphi(x)=a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x+d\sin 4x+\cdots$$

傅里叶用很绕弯且不严格的步骤得到]……对$\sin nx$的系数一般地有$\int\varphi(x)\sin nx\,dx$；由此方法我们得到下面非常值得注意的方程：

(D) $$\frac{1}{2}\pi\varphi(x)=\sin x\int\sin x\varphi(x)dx+\sin 2x\int\sin ax\varphi(x)dx$$

---

① 傅里叶在第179,180节中用正交性和分部积分表明

$$\frac{\pi}{4}=\cos y-\frac{1}{3}\cos 3y+\frac{1}{5}\cos 5y-\frac{1}{7}\cos 7y+\cdots.$$

$$+\sin 3x\int \sin 3x\varphi(x)dx+\cdots+\sin ix\int \sin ix\varphi(x)dx$$
$$+\cdots;$$

如果我们从 $x=0$ 到 $x=\pi$ 积分,则右边总给出函数 $\varphi(x)$ 的所需展开式。

220. 这样我们看到出现于方程

$$\pi\varphi(x)/2=a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x+d\sin 4x+\cdots$$

中的系数 $a,b,c,d,\cdots$ 是定积分 $\cdots\int \sin ix\varphi(x)dx$ 的值。这一陈述是重要的,因为它表明甚至完全任意的函数[①] 如何能展开为正弦级数。……

221. 我们也能通过直接确定方程

$$\varphi(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+a_3\sin 3x+\cdots+a_j\sin jx+\cdots$$

中的量 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_j,\cdots$ 来验证前述方程(D).为此以 $\sin ixdx$ 乘后一方程的各项,这里 i 是一整数,并从 $x=0$ 到 $x=\pi$ 积分,由此有

$$\int\varphi(x)\sin ixdx=a_1\int \sin x\sin ixdx+a_2\int \sin 2x\sin ixdx+\cdots$$
$$+a_j\int \sin jx\sin ixdx+\cdots$$

现在易于证明,首先,除项 $a_i\int \sin ix\sin ixdx$ 外,出现于右边的所有积分均等于零;其次,$\int \sin ix\sin ixdx$ 的值是 $\frac{1}{2}\pi$;由此导出 a_i 的值,它等于

$$\frac{2}{\pi}\int\varphi(x)\sin ixdx$$

……[②]

---

① 傅里叶指的其实是分段连续奇函数。

② 在 § 222,223 中,傅里叶给出了 $\pi/2$,$x/2$ 和 $\cos x$ 的正弦级数展开式。在 § 224 中,他讨论了如何把偶函数展开为余弦级数。在 § 230 中,他指出把他的方法同分离变量法联合起来可以解弦振动方程,在 § 231～238 中,他进一步指出"由区间 $(-\pi,\pi)$ 上任意画出的一条曲线所表示的任一函数 $F(x)$ 可分为两个函数" $\varphi(x)=[F(x)+F(-x)]/2$ 和 $\psi(x)=[F(x)-F(-x)]/2$,而它们可分别展开为余弦级数和正弦级数。

81.2. 傅里叶积分

345. 首先考虑热在一无穷长杆中自由传播的情形，其一段 ab 具有某种初始温度，而所有其余的点具有初始温度零。如果我们在杆的每个点竖一平面曲线的纵坐标使之表示该点的瞬间温度，则在历经时间 t 后，固体的状态由此曲线的形状所表示。以 $v=F(x)$ 记给定的初始温度状态；为简单起见，先假定此曲线的初始形式由两对称部分组成，因而 $F(x)=F(-x)$. 令 $K/CD=k,HL/CDS=h$；在方程 $\partial v/\partial t=k\partial^2 v/\partial x^2-hv$[①] 中令 $v=e^{-ht}u$；于是有 $\partial u/\partial t=k\partial^2 u/\partial x^2$.

设定 u 的一个特殊值 $ae^{-kq^2t}\cos qx$，其中 a 和 q 是任意常数。设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$[②] 是任一数列，而 $q_1,q_2,q_3,\cdots$是相应的 Q 所取值的序列，我们有

$$u=a_1e^{-kq_1^2t}\cos q_1x+a_2e^{-kq_2^2t}\cos q_2x+a_3e^{-kq_3^2t}\cos q_3x+\cdots.$$

先假定值 $q_1,q_2,q_3,\cdots$以无穷小级递增因而它们等于 $dq,2dq,3dq,\cdots$，其中 dq 是横坐标的常微分。再假定值 $a_1,a_2,a_3,\cdots$正比于同一曲线的纵坐标 Q，因而它们成为 $Q_1dq,Q_2dq,Q_3dq,\cdots$，Q 是 q 的某一函数。由此 u 的值可表示为

$$u=\int dqQ\ \cos qx\ e^{-kq^2t}\quad ③$$

其中 Q 是任一函数 $f(q)$，而积分自 $q=0$ 取至 $q=\infty$。难点归结为适当确定函数 Q.

346. 为确定 Q，我们必须在 u 的表示式中令 $t=0$ 并使 $u=F(x)$. 于是我们有方程

$$F(x)=\int dqQ\cos qx$$

如果以 q 的任一函数代入 Q 并从 $q=0$ 到 $q=\infty$积分，我们将

---

① 这里的记号 ∂ 傅里叶用的是 d。下同。

② 这里“…”傅里叶用的是“&c”。下同。

③ 这里傅里叶当是直观推断地从傅里叶级数通过极限过渡到傅里叶积分。

得到 x 的一个函数。问题在于解逆问题，即得知 q 的哪个函数代入 Q 会给出函数 $F(x)$. 这是一个值得注意的问题，其解要求细心的审察。

我们展开上述积分，把 Q 由之导出的方程写为下面的

$$F(x)=dqQ_1\cos q_1x+dqQ_2\cos q_2x+dqQ_3\cos q_3x+\cdots.$$

为使右边只剩一项而消去所有其他项，我们以 $dx\cos rx$ 乘两边，然后从 $x=0$ 到 $x=n\pi$ 关于 x 积分，这里 n 是一个无穷大数，而 r 表示等于 $q_1,q_2,q_3,\cdots$ 或 $dq,2dq,3dq,\cdots$ 的任一项的一个量。令 q_i 是变量 q 的任一值，q_j 是另一值即对 r 所取的值；我们有 $r=jdq,q=idq$. 然后把无穷大数 n 表示为单位长中所含基元 dq 的倍数，因之有 $n=\frac{1}{dq}$. 进行积分，我们发现当 $r\neq q$ 时积分 $\int dx\cos qx\cos rx$ 等于零；但当 $q=r$ 时它的值为 $n\pi/2$，由此事实得知积分消去右边除含有 q_j 或 r 的项之外的每个项。影响该项的函数是 Q_j；因此我们有

$$\int dxF(x)\cos qx=dqQ_jn\pi/2$$

对 ndq 代入其值 1，即有

$$\pi Q_j/2=\int dxF(x)\cos qx$$

于是我们一般地求得 $\pi Q/2=\int_0^\infty dxF(x)\cos qx$. 这样，为确定满足所提条件的函数 Q，我们必须以 $dx\cos qx$ 乘给定的函数 $F(x)$，并从 $x=0$ 到 $x=\infty$ 积分，以 $2/\pi$ 乘所得结果。这就是说，从方程 $F(x)=\int dqf(q)\cos qx$，我们得到 $f(g)=2/\pi\int dxF(x)\cos qx$，函数 $F(x)$ 表示一无穷柱的初始温度，它只有中间一段被加热。把 $f(q)$ 的值代入 $F(x)$ 的表示式，我们得到一般方程

$$(\varepsilon)\qquad \frac{\pi}{2}F(x)=\int_0^\infty dq\cos qx\int_0^\infty dxF(x)\cos qx$$

347. 把求得的函数 Q 的值代入 v 的表示式，我们就有下述积分

$$\pi v/2=e^{-ht}\int dq\cos qx e^{-kq^2t}\int dxF(x)\cos qx$$

它包含了所给问题完整的解。

由于关于 x 的积分从 $x=0$ 取至 $x=\infty$，所以其结果是 q 的一个函数；再关于 q 从 $q=0$ 到 $q=\infty$ 积分，我们对于 v 得到 x 和 t 的一个函数，它表示所说固体的相继状态。由于关于 x 的积分使此自变量消失，所以在 v 的表示式中它可代之以任一自变量 α，而积分取相同的界限，即从 $\alpha=0$ 到 $\alpha=\infty$，于是我们有

$$\pi v/2=e^{-ht}\int_0^\infty dq\cos qx e^{-kq^2t}\int_0^\infty d\alpha F(\alpha)\cos q\alpha$$

或

$$\pi v/2=e^{-ht}\int_0^\infty d\alpha F(\alpha)\int_0^\infty dq e^{-kq^2t}\cos qx\cos q\alpha$$

……①

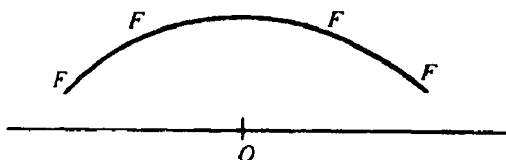


图 2

354. 如果杆的初始热量分布使表示初始状态的曲线 $FFFF$ 由位于定点 O 左右两边的两相等弧组成②(图 2)，则热的多变运动由方程

$$\frac{\pi v}{2}=e^{-ht}\int_0^\infty d\alpha F(\alpha)\int_0^\infty dq e^{-kq^2t}\cos qx\cos q\alpha$$

表达。

---

① 在§351中，傅里叶提出了初始温度为奇函数时有限或无穷长杆的热传导问题，在§352中，他用类似于前的方法得到有限长情形的解；然后在§353中通过使长度趋于无穷得到无穷长情形的解

$$\pi v/2=e^{-ht}\int_0^\infty d\alpha F(\alpha)\int_0^\infty dq e^{-kq^2t}\sin qx\sin q\alpha$$

② 即表示初始状态的函数是偶函数；下面则指此函数为奇函数。

如果表示初始状态的曲线 $ffff$ 由两相似而交替的弧组成(图3),则给出温度值的积分是

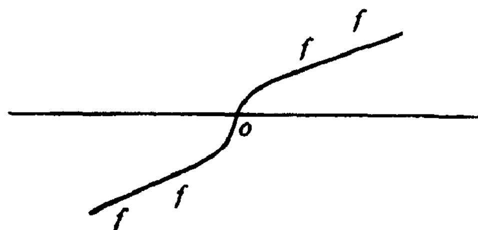


图 3

$$\frac{\pi v}{2}=e^{-ht}\int_0^{\infty}d\alpha f(\alpha)\int_0^{\infty}dqe^{-kq^2t}\sin qx\sin q\alpha$$

如果假定初始热为任意分布,则从前述两个解易于得到 v 的表示式。事实上,无论表示给定的初始温度的函数 $\varphi(x)$ 为何,总可把它分解为另外两个 $F(x)+f(x)$,其中之一对应于曲线 $FFFF$,另一对应于曲线 $ffff$,因之有这样三个条件:

$$F(x)=F(-x),f(x)=-f(-x),\varphi(x)=F(x)+f(x)$$

我们已在§233 和 234 中用过这一陈述,我们也知道每个初始状态导致一个多变部分状态,就像它单独存在时那样构成,这些不同状态的叠加不会使它们每个分别单独出现时所具有的温度导致任何改变[①]。以 v 记由全函数 $\varphi(x)$ 表示的初始状态所产生的多变温度,我们必有

$$\frac{\pi v}{2}=e^{-ht}\left(\int_0^{\infty}dqe^{-kq^2t}\cos qx\int_0^{\infty}d\alpha F(\alpha)\cos q\alpha\right.$$
$$\left.+\int_0^{\infty}dqe^{-kq^2t}\sin qx\int_0^{\infty}d\alpha f(\alpha)\sin q\alpha\right)$$

如果关于 α 在界限 $-\infty$ 与 $+\infty$ 之间积分,则显然结果加倍。于是我们可在上面方程中删去左边的分母 2 而在右边关于 α 从 $\alpha=-\infty$ 积分至 $\alpha=+\infty$。易见我们可以用 $\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\varphi(\alpha)\cos q\alpha$ 代替

① 这里傅里叶说的其实就是线性微分方程解的叠加原理。

$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha F(x)\cos q\alpha$，因为由函数 $f(\alpha)$ 满足的条件得到

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\cos q\alpha.$$

我们也能以 $\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\varphi(\alpha)\sin q\alpha$ 代替 $\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(\alpha)\sin q\alpha$，因为显然有

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha F(\alpha)\sin q\alpha.$$

由此我们断定

$$\pi v=e^{-ht}\int_{0}^{\infty} dq e^{-hq^2t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\varphi(\alpha)\cos q\alpha\cdot\cos qx+\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\varphi(\alpha)\sin q\alpha\sin qx\right)$$

或

$$\pi v=e^{-ht}\int_{0}^{\infty} dq e^{-hq^2t}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\varphi(\alpha)\cos q(x-\alpha)$$

或

$$\pi v=e^{-ht}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\varphi(\alpha)\int_{0}^{\infty} dq e^{-hq^2t}\cos q(x-\alpha)$$

355. 第二个问题的解清楚显示出我们适才所用的定积分与我们应用于给定形式固体的分析的结果之间的关系，当我们令表示尺度的量为无穷大时，这一分析所提供的收敛级数的各项变为无穷小，从而级数之和就简单地成为一个积分，类似地，我们可以不作任何物理考虑而把第三章中所用的不同三角级数直接过渡为定积分；为此只须给出其结果引人注目的这些变换的若干例子。

（沈永欢 译）

82. 魏尔斯特拉斯:论分析的算术化

魏尔斯特拉斯改进了柯西等人在分析严格化方面的工作,力图建立起不依赖一切几何直观的纯粹的算术基础,使微积分达到了今天所具有的严密形式。

魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass,1815~1897)生于德国威斯特伐利亚地区奥斯登费尔特镇一个小官吏家庭,1834 年按父亲意愿入波恩大学学习法律与财经,未获学位,1838 年改入明斯特神学哲学院师从椭圆函数论专家古德曼(Ch. Gudermann),1841 年通过教师资格国家考试,从此开始了长达 14 年的中学教师生涯。正是在这一时期,他业余钻研数学并作出了使他成为当时欧洲最负盛名的分析学家的成果。1854 年,克雷尔《数学杂志》发表了这位中学教师的一篇论文《阿贝尔函数论》,引起数学界的瞩目。1856 年被任命为柏林皇家综合工科大学教授,同年当选柏林科学院院士,1864 年成为柏林大学教授,1873 年出任校长。

魏尔斯特拉斯在微积分基础中引进的严格论证已成为现代分析严格性的典范,这种严格性最突出的表现是通过 ε-δ 语言重建分析体系。魏尔斯特拉斯批评柯西等前人采用的"无限地趋近'、"要多么小就多么小"等具有明显运动涵义的说法,代之以更精密的 ε-δ 算术表述,用这种方式重新定义了极限、连续函数等分析基本概念,特别是引进了一致收敛概念等等。魏尔斯特拉斯很少发表他的研究成果,其思想和方法主要是通过他在皇家工科大学和柏林大学的课堂讲授由学生传播。以下选录的关于 ε-δ 方法的论述,即取自施瓦茨(H. A. Schwarz)整理

的魏尔斯特拉斯1861年在皇家工科大学授课的笔记。原件藏于瑞典米塔-列夫勒研究所，部分内容发表于P. Dugac, Elements d'Analyse de Karl Weierstrass, Archiv for History of Exact Sciences, vol. 10, pp. 41～176, 1973。本段转译自R. Calinger (ed.): Classics of Mathematics, pp. 606～609.

与只取一个值的不变量或常量相反，变量定义为不只取若干特定值而是能取无穷多个值的量。也会发生一个变量能取每个可能的正值和负值；此时它称为无限制变量。一个变量也可以有限制地改变因而有一个上界或下界，或两者兼有。一个变量所能取的值可以属于一个或几个连续序列，如果此变量能取位于两个界之间的全部可能的值。微分学只处理这样的连续变量①。

两个变量可以这样的方式相联系：对一个变量的每个确定的值，对应另一变量的一个确定的值；此时后者称为前者的一个函数。这种关系可推广到若干个变量，由此区分具有一个变量和具有多个变量的函数。如果对一个变量的一个值总只有另一变量的一个值与之对应，则后者称为一意函数，或称为前者的单值函数。如果对一个变量的一个值有另一变量的几个值与之对应，则后者称为前者的多值函数。判断函数的准则是只要一个变量有一确定的改变，另一变量一般就会有一个确定数量的改变。

……

如果$f(x)$是x的函数且x是一确定的值，则若x变至$x+h$，函数就会变至$f(x+h)$；差$f(x+h)-f(x)$称为该函数由自变量从x到$x+h$的改变所产生的改变量。现在如果能对h确定一个界限δ，使对其绝对值小于δ的所有h值，$f(x+h)-f(x)$变得小于无论怎样小的任一量ϵ，则称自变量的无穷小改变对应出函数的

① 这段话可能反映出魏尔斯特拉斯当时已认识到严格定义实数系的必要，但还没有形成关于实数系的清晰完整的理论。

无穷小改变。因为如果一个量的绝对值能变得小于任意选取的无论怎样小的量，则我们说它能变为无穷小。现在如果一个函数对自变量的无穷小改变，总对应出此函数的无穷小改变，则称它为此自变量的连续函数，或称它随同此自变量连续地改变。

……

定理 如果 x 的连续函数对自变量的确定值 x_1 具有确定的函数值 y_1，而对另一确定值 x_2 具有确定的函数值 y_2，又如果 y_3 是位于 y_1 和 y_2 之间的任意值，则在 x_1 和 x_2 之间必至少有一个值 x_3，对于它函数取值 y_3。

下述辅助定理可用作证明。

如果 $y=f(x)$ 是 x 的连续函数且 $y_0=f(x_0)$ 不为零，则对 x 的所有位于 x_0 的邻域中的值，即对差 $x-x_0$ 的绝对值不超过一个确定界限的所有 x 值，函数值 $f(x)$ 具有与 $f(x_0)$ 相同的符号。

……

连续函数所取或能取的值也属于一个连续序列，因此取此名称是恰当的。

微分学的基本概念

当 x 变至 $x+h$ 时函数 $f(x)$ 所产生的全改变量 $f(x+h)-f(x)$ 一般可分解为两个部分，第一部分正比于自变量的改变量 h，因此它由 h 和不依赖于 h 的一个因子(即关于 h 为常量)组成，从而它当 h 变为无穷小时也变为无穷小，或随 h 同时变为无穷小。然而，另一部分当 h 变为无穷小时不仅自身变为无穷小(即当除以 h 时仍变为无穷小)。

如果 h 表示一个可取无穷小值的量，且 $\varphi(h)$ 是 h 的具有下述性质的任一函数：对无穷小 h 值它也变为无穷小(即当选取一个确定的任意小量 ε，总能确定一个量 δ，使对其绝对值小于 δ 的所有 h 值，$\varphi(h)$ 变得小于 ε)，则可能发生 $\frac{\varphi(h)}{h}$ 仍是 h 的函数，它本身对无穷小 h 值也变为无穷小；在此情形我们称 $\varphi(h)$ 对无穷小 h 值相对

于 h 变为无穷小。

函数全改变量的正比于自变量的改变量的第一部分，称为微分改变量或微分，并以刻画其特性的 d 置于函数前表示，而前缀 Δ 则表示全改变量。对 h 我们也类似地写为 dx，因为 x 的最简单的函数是 x 自身，而 dx 是完全不依赖于 x 的能变为无穷小的量。dx 或 h 取得越小，微分改变量与全改变量的差异越少；通过减小 dx 能使此差别小于每个无论怎样小的量；因此人们定义微分为函数当其自变量改变一无穷小量时所产生的改变量。

这样，函数的微分一般具有形式 $df(x)=p\cdot dx$；p 是为得到函数的微分必须乘以自变量微分的因子，称为微分系数或微商。它一般也是 x 的函数。由于它由 $f(x)$ 以确定的方式导出，所以称为函数的导数并写为 $f'(x)$. 于是这个函数得以完成且不依赖于自变量的改变量。

定理 如果一个函数对自变量的确定值 x 具有微商，则对此函数和同一 x 值不可能存在第二个不同的微商。

假定已成功地把 $f(x+h)-f(x)$ 以 $=ph+h(h)$ 所描述的方式分解，其中(h)表示随 h 变为无穷小的量；要证明这是唯一可能的分解。……

如果以自变量的微分除函数的微分，则得到微分系数；基于这一理由它也称为微商：

$$\frac{df(x)}{dx}=p=f'(x)$$

关于确定微分的辅助定理

1. 如果 $f_1(h)$，$f_2(h)$是两个随其自变量 h 同时变为无穷小的函数，则其和 $f_1(h)+f_2(h)$也是这样的函数。

假定 ε 是任一无论怎样小的量；把它分解为两部分 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 并确定 δ，使对其绝对值不超过 δ 的所有 h 值，$f_1(h)<\varepsilon_1$ 和 $f_2(h)<\varepsilon_2$ 两者均成立。则 $f_1(h)+f_2(h)<\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 成立。同样的定理对随 h 同时变为无穷小的若干函数的加法也为真。

2. 如果 $f(h)$是随 h 同时变为无穷小的函数,A 表示相对于 h 为常量的量,则 $A \cdot f(h)$同样随 h 变为无穷小。

3. 乘积 $F(h) \cdot f(h)$(其中 $f(h)$是随 h 变为无穷小的函数,而$F(h)$是 h 的任一对无穷小 h 值不变为无穷大的函数)也是同时随 h 变为无穷小的函数。

……

4. 如果 $f_1(h)$,$f_2(h)$是 h 的函数,它们对无穷小 h 值变为无穷小,A 是不依赖于 h 的不等于零的量,则商$\frac{f_1(h)}{A+f_2(h)}$也是对无穷小 h 值变为无穷小的函数。

……

关于确定给定函数的微分的某些法则

设 $f_1(x)=p$,$f_2(x)=q$,$f_3(x)=r$,…是 x 的函数,它们在给定界限之间连续且具有已知的微分;要证明一般地说,所有由这些函数通过加、减、乘、除、取幂和开根等基本运算组成的函数都具有微分,而且要证明如何能从给定的微分导出其微分。

……

高阶微分

如果已对一个函数求得导数 $f'(x)$,则 $f'(x)dx$ 是其微分。量 x 与 dx 完全是互相独立的,因而 dx 相对于 x 可看作常量,因而可关于 x 再微分积 $f'(x) \cdot dx$ 从而有 $d(f'(x) \cdot dx)=dx \cdot d(f'(x))$. 称所得结果为给定函数的二次微分或二阶微分并写为 $d^2f(x)$. 如果 $f'(x)$的导数$=f''(x)$,则有 $d^2f(x)=d(df(x))=f''(x) \cdot dx^2$。……

(沈永欢 译)

83. 戴德金:《连续性与无理数》

柯西的微积分理论存在着极限与实数概念的循环定义。魏尔斯特拉斯最先认识到这一逻辑缺陷,并以序列本身作为数或极限。但他的工作从未正式发表。继魏尔斯特拉斯之后,戴德金、康托尔、梅雷(C. Meray)和海涅(E. Heine)等各自独立地给出了实数的定义,并且几乎同时(1872)发表了他们的理论。实数系的严格化使由魏尔斯特拉斯倡导的分析算术化运动大致告于完成。

戴德金(J. W. R. Dedekind,1831～1916)生于德国不伦瑞克,就读于格丁根大学,是高斯的学生,后在苏黎世、不伦瑞克等地任教。他在1872年发表的《连续性与无理数》(Stetigkeit und irrationale Zahlen)一书中,用有理数的分割(现称"戴德金分割")来严格定义实数,并证明了实数系的连续性。以下选录该书主要内容,转译自 D. E. Smith:A Source Book in Math. pp. 35～45. 德文原文亦载 R. Fricke, E. Noether & Ö. Ore (eds.):R. Dedekind, Ges. Math. Werke, Ⅲ pp. 314～334, Braunschweig, 1932.

[作者一开始叙述了有理数的三个性质以及直线上的点的对应的三个性质。这些性质如下:]

Ⅰ 关于数

Ⅰ. 如果 $a>b$,并且 $b>c$,那么 $a>c$.

Ⅱ. 如果 a,c 是两个不同的数,则有无穷多个不同的数落在 a,c 之间。

Ⅲ. 如果 a 是任何一个确定的数,那么数系 R 的所有的数落在两个数 A_1 和 A_2 之中,它们 每个都含有无穷多个数;第一个类 A_1 由所有 $<a$ 的数 a_1 组成,第二个类 A_2 由所有 $>a$ 的数 a_2 组成;数 a 本身可根据意愿算做属于第一类或第二类,并且分别是第一类中的最大数或第二类中的最小数。

Ⅱ 关于直线上的点

Ⅰ. 如果 p 在 q 的右边,而 q 在 r 的右边,则 p 在 r 的右边;并且我们说 q 在点 p 和 r 之间。

Ⅱ. 如果 p,r 是两个不同的点,那么总有无穷多个点在 p 和 r 之间。

Ⅲ. 如果 p 是直线 L 上的一个确定的点,那么 L 上的所有的点落在两个类 P_1 和 P_2 之中,它们每个都含有无穷多个点;第一个类 P_1 含有所有在 p 左边的点,第二个类 P_2 含有所有在 p 右边的点;点 p 本身可根据意愿算做属于第一类或第二类。在每种情形,直线 L 分划为两个类或两个部分 P_1,P_2 具有这样的特性:第一类 P_1 的每个点都在第二类 P_2 的每个点的左边。

Ⅲ 直线的连续性

最重要的事实是直线 L 上有无穷多个不对应于有理数的点。如果点 p 对应于有理数 a,那么如我们所知,长度 Op 与构造中所使用的不变度量单位是可公度的,亦即存在第三个长度,它称做公度,使这两个长度都是此公度的整数倍。但古希腊人就已经知道并且证明了存在着与给定长度单位不可公度的长度,例如,单位边长的正方形的对角线。如果我们从 O 点起在直线上截取一个这样的长度,那么我们得到一个端点,它不对应于有理数。因为还容易证明存在无穷多个与长度单位不可公度的长度,因此我们可以肯定地说:直线 L 上点的个体要比有理数域 R 中数的个体无限地多。

现在,如我们希望的,如果试图把直线上的所有现象算术地探究下去,那么有理数域就不再满足需要,而且,将通过创造有理数

建立起来的机制 R 借助于创造新的数来本质地加以改进，以使数域获得与直线相同的完备性（或，如同我们马上就要说的，相同的连续性），就绝对地必要了。

前面的考虑对于大家是如此的熟悉而且是众所周知的，以致多数人都认为将它们重复是完全多余的。但我还是认为作这个简要的重述对于我们的主要问题是真正必要的准备。因为，通常引进无理数的方法是直接基于扩充数量的概念的，而这个概念本身无论在哪里都没有仔细地定义，并且把数解释为用另一个同类的数来度量一个数的结果[①]。我不用这种方法，而是要求算术本身来产生。

一般地说，我们可以认为这样地比较非算术概念提供了扩充数的概念的直接机会（虽然在引进复数时一定不是这种情形）；但这对于把这些外来概念引进数的科学——算术中必定不是充分的基础。正如负数和有理小数是由新的创造形成的，并且这些数的运算必须而且能够归结为正整数的运算，所以我们必须努力只用有理数完整地定义无理数。剩下的问题只是怎样去做这件事。

上面比较有理数域 R 和直线使我们认识到前者存在间断，某种不完备性或不连续性，同时我们把完备性，无间断，或连续性归之于直线。那么这个连续性是由什么组成的呢？每件事都必定和这个问题的答案有关，并且只有通过它我们才能得到一切连续区域研究的科学基础。显然，借助于关于各个微小部分的不明确联系的模糊议论将什么也得不到；问题是指出连续性的精确特征以作为有效演绎的基础。很长一段时间内，我对此问题的思考是徒劳的，但最后我终于发现了我所要找的东西。也许这个发现是别人难以估量的；多数人会认为它的实质是非常平凡的。它是如下组成的。在前节我们注意到直线上每个点 p 把它分划为两部分，其中一个部分的每个点都在另一部分的每个点的左边。反过来我找到

① 当我们考虑复数时，这个数的定义的一般性的显然的优点立即消失。另一方面，依我看，两个同类数的比的概念显然只有在引进无理数后才能产生。——原注

了连续性的本质，亦即下列的原则：

"如果直线上所有的点落在两个类中，使得第一类中每个点都在第二类的每个点的左边，那么存在一个而且只有一个点，它产生这个将所有点分为两类的分划，即它将直线分为两个部分。"

如我已经说过的，我认为，假定每个人都会承认这段话正确，是不会错的；我的多数读者当听到用这个平凡的论述来揭示连续性的秘密，一定会非常失望。对此我可以说，如果每个人都认为上面的原则是如此的显然并且和他们自己关于直线的想法是如此地协调，那么我将非常高兴；因为我完全不能提供它的正确性的任何证明，任何人也没有这个能力。假设直线有这个性质，并不比把连续性归于直线（由此得到直线的连续性）的公理少任何东西。如果空间终究有真实的存在性，那么"它是连续的"对于它就不是必要的了；即使它不连续，它的许多性质仍然保持不变。并且如果我们确实知道空间是不连续的，那么并没有任何东西妨碍我们，以防万一，我们还是希望通过填补它的想象中的间隙以使它连续；这个填补将由创造新的点的个体来组成，因而就要依照上面的原则来实施。

Ⅳ 无理数的创造

从最后的论述显然可知只需要说明如何使不连续的有理数域 R 成为完备的以使形成连续的域。在第Ⅰ节中我们已经指出，每个有理数 a 都将数系 R 分划为两个类，使得第一个类 A_1 中的每个数 a_1 都小于第二个类的每个数 a_2，数 a 既是类 A_1 的最大数又是类 A_2 的最小数。现在如果给定任意一个将数系 R 分为两个类 A_1，A_2 的分划，而且它仅仅是由 A_1 中每个数 a_1 小于 A_2 中每个数 a_2 这个特征性质产生的，那么为简便计我们称这样的分划为分割，且记做 (A_1, A_2). 于是我们可以说每个有理数产生一个分割，或者严格地说，两个分割[①]，但我们不把它们看成本质上不同；另外，这个

① 即这个有理数属于第一类，或属于第二类，故得两个分割。

分割具有这样的性质：或者在第一类的数中存在最大数；或者在第二类的数中存在最小数。并且反过来，如果一个分割具有这个性质，那么它是由这个最大的或最小的有理数产生。

但容易证明存在无穷多个不是由有理数产生的分割。下面的例子是十分容易提出来的：

设 D 是正整数但不是整数的平方，那么存在正整数 λ 适合

$$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$$

如果我们设每个平方 $>D$ 的正有理数 a_2 属于第二类 A_2，其他所有的数 a_1 属于第一类 A_1，这个分划形成一个分割 (A_1, A_2)，亦即每个数 a_1 小于每个数 a_2。因为如果 $a_1=0$ 或是负的，那么依定义任何数 a_2 都是正的，从而 a_1 小于任何数 a_2；如果 a_1 是正的，那么它的平方 $\leqslant D$，因而 a_1 小于任何一个平方 $>D$ 的正数 a_2。

但这个分割不是由有理数产生的。为了证明它我们必须首先证明不存在任何有理数其平方等于 D。虽然这由数论的初等原理即可知道，但我们还是要在此给出下列非直接证明。如果存在一个平方等于 D 的有理数，那么存在两个正整数 t 和 u 满足方程

$$t^2 - Du^2 = 0$$

并且我们可以假定 u 是具有下列性质的最小的正整数：它的平方用 D 乘后将变为某个整数 t 的平方。因为显然有

$$\lambda u < t < (a+1)u,$$

所以数 $u' = t - \lambda u$ 一定是小于 u 的正整数。如果我们还令

$$t' = Du - \lambda t$$

则 t' 同样是正整数，并且我们有

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$$

这和我们关于 u 的假定矛盾。

于是每个有理数 x 的平方或者 $<D$，或者 $>D$。由此容易推出在类 A_1 中既没有最大数，在类 A_2 中也没有最小数。因为如果我们令

$$y = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$$

那么我们有

$$y-x=\frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}$$

以及

$$y^2-D=\frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}$$

如果我们在其中设 x 是类 A_1 中的正数，那么 $x^2<D$，因而 $y>x$ 及 $y^2<D$. 于是 y 也属于类 A_1. 但如果我们设 x 是类 A_2 中的数，那么$x^2>D$，因而 $y<x$，$y>0$ 及 $y^2>D$。于是 y 也属于类 A_2. 因此这个分割不是由有理数产生的。

有理数域 R 的不完备性或不连续性就存在于不是所有的分割都由有理数产生这个性质中。

于是，无论如何，我们已经做出了一个不是由有理数产生的分割(A_1,A_2)，我们创造了一个新的数，即一个无理数 α，我们把它看成是由这个分割(A_1,A_2)完全定义的；我们将说数 α 对应于这个分割，或说它产生这个分割。因此，从现在起，每个确定的分割对应于一个确定的有理数或无理数，并且当且仅当两个数对应于本质上不同的两个分割时我们认为它们是不同的或不相等的。

为了得到有序排列所有实数（即全体有理数和无理数）的基础，我们必须研究由任意两数 α 和 β 产生的分割(A_1,A_2)和(B_1,B_2)间的关系。显然，如果两个类中有一个，例如第一个类 A_1 已经知道，那么分割(A_1,A_2)就完全给定了，这是因为第二个类 A_2 将由所有不含在 A_1 中的有理数组成，并且还因为这个第一类的特征性质是若数 a_1 含在其中，则它亦含有所有小于 a_1 的数。现在如果我们互相比较这样的两个第一类 A_1，B_1，那么能够发生下列几种情况：

1. 它们完全一致，亦即 A_1 中的每个数也含在 B_1 中，并且 B_1 中的每个数也含在 A_1 中。此时 A_2 必然和 B_2 一致，因而这两个分割完全相同，我们用符号将此记作 $\alpha=\beta$ 或 $\beta=\alpha$。

但是如果两个类 A_1 和 B_1 并不一致，那么在其中一个，例如在

A_1 中存在数 $a_1'=b_2'$，此处 b_2' 是不含在另一个第一类 B_1 中的一个数，因而是在 B_2 中；因此所有含在 B_1 中的数都一定小于这个数 a_1' $(=b_2')$，于是所有的数 b_1 含在 A_1 中。

2. 现在如果 a_1' 是 A_1 中仅有的一个不含在 B_1 中的数，那么每个含在 A_1 中的其他数 a_1 也含在 B_1 中，因而 $<a_1'$，亦即 a_1' 是所有的数 a_1 中的最大数，因此分割 (A_1,A_2) 由有理数 $\alpha=a_1'=b_2'$ 产生。关于另一个分割 (B_1,B_2)，我们已经知道 B_1 中的所有的数 b_1 也含在 A_1 中，并且小于数 $a_1'=b_2'$，而此数是含在 B_2 中的；但是每个含在 B_2 中的其他数 b_2 必定大于 b_2'，因为不然的话它将小于 a_1'，于是它含在 A_1 中因而含在 B_1 中；因此 b_2' 是所有含在 B_2 中的数中最小的，从而分割 (B_1,B_2) 由相同的有理数 $\beta=b_2'=a_1'=\alpha$ 产生。因此这两个分割仅仅是非本质地不同。

3. 但是，如果在 A_1 中至少存在两个不同的数 $a_1'=b_2'$ 及 $a_1''=b_2''$ 不含在 B_1 中，那么在 A_1 中存在无穷多个不含在 B_1 中的数，这是因为 a_1' 和 a_1'' 间的无穷多个数显然含在 A_1 中（依据第 I 节中的 II）但不含在 B_1 中。在此情形我们说对应于这两个本质上不同的分割 (A_1,A_2) 和 (B_1,B_2) 的两数 α 和 β 是不同的，并且还说 α 大于 β，β 小于 α，我们用符号将此记作 $\alpha>\beta$ 以及 $\beta<\alpha$. 要注意，这个定义和我们早先当 α,β 是有理数时所给定义完全一致。

剩下的可能情形是下面这些：

4. 如果在 B_1 中存在且仅存在一个数 $b_1'=a_2'$，此处 a_2' 是一个不含在 A_1 中的数，那么两个分割 (A_1,A_2) 和 (B_1,B_2) 仅是非本质地不同，因而它们由一个相同的有理数 $\alpha=a_2'=b_1'=\beta$ 产生。

5. 但如果 B_1 中至少有两个不含在 A_1 中的数，那么 $\beta>\alpha$，$\alpha<\beta$。

因为上面列举了所有可能情形，所以推出在两个不同的数中，必定是一个较大，另一个较小，这给出两种可能性。第三种情形是不可能的。这确实涉及到使用比较级（较大、较小）去指明 α,β 间的关系；但这个用法仅仅是现在才令人满意。恰是在这样的研究中人们需要倍加小心，使得如我们真诚愿望的那样，他不会由于仓促选

取从其他业已发展的概念中借用过来的表达方法而误入歧途，令人不可接受地从一个数域转换到另一个数域。

现在如果我们再稍许仔细地考虑 $\alpha>\beta$ 的情形，那么显然可见若较小的数 β 是有理数，则它一定属于类 A_1；这是因为，由于 A_1 中存在一个数 a_1' 与类 B_2 中的一个数 b_2' 相等，于是无论数 β 是 B_1 中的最大数还是 B_2 中的最小数，它必定 $\leqslant a_1'$，所以它含在 A_1 中。类似地，由 $\alpha>\beta$ 显然可知若较大的数 α 是有理数则必属于类 B_2（因为 $\alpha\geqslant a_1'$）。合并这两个考察结果，我们得到下列结论：如果一个分割是由数 α 产生，那么任一个有理数依据它是小于或大于 α 而属于类 A_1 或类 A_2；如果数 α 本身是有理数，那么它可以属于两个类中的任一个。

最后，我们由此得到：若 $\alpha>\beta$，亦即 A_1 中有无穷多个数不含在 B_1 中，那么存在无穷多个与 α 和 β 都不同的数；每个这样的数 c 都 $<\alpha$（因为它含在 A_1 中），同时 $>\beta$（因它含在 B_2 中）。

V　实数域的连续性

作为刚才建立的特性的推论，全体实数组成的数系 $\mathfrak{R}$ 形成一个一维良序域；这乃是意味着下列法则成立：

Ⅰ. 如果 $\alpha>\beta$，$\beta>\gamma$，那么也有 $\alpha>\gamma$，我们说 β 落在 α 和 γ 之间。

Ⅱ. 如果 α 和 γ 是任何两个不同的数，那么存在无穷多个不同的数 β 落在 α 和 γ 之间。

Ⅲ. 如果 α 是任何一个确定的数，那么数系 $\mathfrak{R}$ 的所有的数落在两个类 $\mathfrak{U}_1$ 和 $\mathfrak{U}_2$ 中，每个类都含有无穷多个数；第一个类 $\mathfrak{U}_1$ 由所有小于 α 的数 a_1 组成，第二个类 $\mathfrak{U}_2$ 由全体大于 α 的数 a_2 组成；数 α 本身可根据意愿指派在第一类或第二类中，并且它分别是第一类中的最大数或第二类中的最小数。在每种情形将数系 $\mathfrak{R}$ 分为两个类 $\mathfrak{U}_1$ 和 $\mathfrak{U}_2$ 的分划是这样的：第一类 $\mathfrak{U}_1$ 中的每个数都小于第二类 $\mathfrak{U}_2$ 中的每个数，并且我们说这个分划是由数 α 产生的。

为了简洁，并且不使读者感到冗烦，我略去这些定理的证明，

它们可以立即由前节中的定义推出来。

但是，除了这些性质外，域 $\mathfrak{R}$ 也有连续性，亦即下列定理成立：

Ⅳ. 如果全体实数组成的数系 $\mathfrak{R}$ 被分为两个类 $\mathfrak{U}_1$ 和 $\mathfrak{U}_2$，使得类 $\mathfrak{U}_1$ 中的每个数 a_1 都小于类 $\mathfrak{U}_2$ 中的每个数 a_2，那么存在一个且仅有一个数 α，它产生这个分划。

证明 由于 $\mathfrak{R}$ 被分划（或分割）为 $\mathfrak{U}_1$ 和 $\mathfrak{U}_2$，我们同时得到全体有理数组成的数系 R 的一个分割 (A_1, A_2)，其定义如下：A_1 含有类 $\mathfrak{U}_1$ 中的所有有理数，A_2 含有所有其他的有理数，亦即类 $\mathfrak{U}_2$ 中的所有有理数。令 α 是产生这个分割 (A_1, A_2) 的一个完全确定的数。如果 β 是任何一个与 α 不同的数，那么总存在无穷多个有理数 c 落在 α 和 β 之间。如果 $\beta<\alpha$，那么 $c<\alpha$；因此 c 属于类 A_1 因而也属于类 $\mathfrak{U}_1$，并且因为同时有 $\beta<c$，于是 β 也属于同一类 $\mathfrak{U}_1$。但如果 $\beta>\alpha$，那么 $c>\alpha$；因此 c 属于类 A_2 因而也属于类 $\mathfrak{U}_2$，并且因为同时有 $\beta>c$，于是 β 也属于同一类 $\mathfrak{u}_2$（因 $\mathfrak{U}_1$ 中的每个数小于 $\mathfrak{U}_2$ 中的每个数 c）。因此，每个与 α 不同的数 β 依据 $\beta<\alpha$ 或 $\beta>\alpha$ 而属于类 $\mathfrak{U}_1$ 或类 $\mathfrak{U}_2$；因而 α 本身或者是 $\mathfrak{U}_1$ 中的最大数，或者是 $\mathfrak{U}_2$ 中的最小数，亦即 α 是一个而且显然是仅有的一个产生将 $\mathfrak{R}$ 分为类 $\mathfrak{U}_1$ 和 $\mathfrak{U}_2$ 的分划的数。这正是所要证明的结论。

Ⅵ 实数的运算

为了把两个实数 α,β 的任何运算归结为有理数的运算，只需要从在数系 R 中由数 α 和 β 产生的分割 (A_1, A_2) 和 (B_1, B_2) 出发去定义对应于运算结果 γ 的分割 (C_1, C_2). 在此我仅限于讨论最简单的情形即加法情形。

如果 c 是任一有理数，如果存在两个数，一个是 a_1 在 A_1 中，一个是 b_1 在 B_1 中，使它们的和 $a_1+b_1\geqslant c$，那么我们把数 c 放在类 C_1 中；所有其他的有理数放在类 C_2 中。这个将全体有理数分为两个类 C_1 和 C_2 的分划显然形成一个分割，这是因为 C_1 中的每个数 c_1 小于 C_2 中的每个数 c_2。如果 α 和 β 都是有理数，那么含于 C_1 中

的每个数 $c_1 \leqslant \alpha+\beta$，这是因为 $a_1 \leqslant \alpha, b_1 \leqslant \beta$，因而 $a_1+b_1 \leqslant \alpha+\beta$；此外，如果在 C_2 中含有一个数 $c_2<\alpha+\beta$，因而 $\alpha+\beta=c_2+p$，其中 p 是一个正有理数，那么我们有

$$c_2=(\alpha-\frac{1}{2}p)+(\beta-\frac{1}{2}p)$$

但因为 $\alpha-\frac{1}{2}p$ 是 A_1 中的数，$\beta-\frac{1}{2}p$ 是 B_1 中的数，所以上式与数 c_2 的定义矛盾；于是每个含在 C_2 中的数 $c_2 \geqslant \alpha+\beta$。因此在这个情形分割 (C_1,C_2) 是由和 $\alpha+\beta$ 产生的。于是，如果在所有情形把任何两个实数 α,β 的和 $\alpha+\beta$ 理解为产生分割 (C_1,C_2) 的数 γ，我们将不会违反在有理数的算术中成立的定义。另外，如果两个数 α,β 中只有一个，例如 α 是有理数，那么容易看出，无论是把数 α 放在类 A_1 中还是放在类 A_2 中都不会影响和 $\gamma=\alpha+\beta$。

恰如加法被定义一样，我们也可以定义所谓基本算术的其他运算，也就是构成差、积、商、幂、方根、对数，因而我们可以得到一些定理（例如，像 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$）的真正的证明，据我所知，以前从未有人做过这样的证明。在更加复杂的运算的定义中，令人畏惧的过度的长度部分地是出于该主题的内在性质，但在大部分情形是可以避免的。在此方面一个非常有用的概念是区间，亦即具有下列特征性质的有理数组成的数系 A：如果 a 和 a' 是数系 A 中的数，那么落在 a 和 a' 之间的所有的数也含在 A 中。全体有理数组成的数系 R，以及任何分割中的两个类都是区间。如果存在一个有理数 a_1，它小于区间 A 中的每个数，以及一个有理数 a_2，它大于区间 A 中的每个数，那么 A 称为有限区间；于是存在无穷多个满足与 a_1 相同的条件的数及无穷多个满足与 a_2 相同的条件的数；整个域 R 可以分割为三个部分 A_1,A,A_2，并且有两个完全确定的有理数或无理数 α_1 和 α_2，它们可以分别称做区间 A 的下（或较小）限和上（或较大）限；下限 α_1 由数系 A_1 形成第一类的那个分割确定，而上限 α_2 由数系 A_2 形成第二类的那个分割确定。落在 α_1 和 α_2 之间的每个有理数和无理数 α 被称为落在区间 A 之内。如果区间 A

的所有的数也是区间 B 的数，则 A 称为是 B 的部分。

当我们试图让有理数的算术的几个定理(例如象定理 $(a+b)c=ac+bc$)也能适用于任何实数，似乎就要出现还要长些的考察。但实际并非如此。容易看出，这全部归结为证明算术运算具有某种连续性。我这句话的意思可以用一般性定理的形式来表达：

"如果数 λ 是对数 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 实施某个运算的结果，并且 λ 落在区间 L 内，那么我们可以选取区间 $A,B,C,\cdots$，使这些数 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 分别落在其中，并且当用区间 $A,B,C,\cdots$ 中的任意数代替数 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 作相同的运算时，所得的结果总是落在 L 中的一个数。"但是，这样一个定理的叙述所显示的可怕的臃肿使我们确信，必须引进某些东西来帮助我们表达。实际上，这是通过引进不定元，函数，极限值的思想用最令人满意的方式实现的，并且最好是使甚至是最简单的算术运算的定义也以这些思想为基础，但我们不能在此进一步做这些事情了。

(朱尧辰 译　徐广善 校)

84. 康托尔:论实数定义和超穷数

康托尔(Gerog Cantor,1845～1918)生于俄国彼得堡,父亲是一名商人。康托尔11岁时全家移居德国,后曾就读于苏黎世大学、格丁根大学、柏林大学等,1867年获博士学位,1869年起到哈雷(Halle)大学执教,10年后成为教授,居此职位直至去世。康托尔受魏尔斯特拉斯影响从事严格化分析理论的研究,1872年发表论文《关于三角级数论中一个定理的推广》,用基本序列定义无理数,并引进了初步的点集论,以后又在一系列论文中奠定了现代集合论的基础。康托尔的超穷数理论在当时受到包括克罗内克(L. Kronecker)和庞加莱在内许多数学家的猛烈反对,但他终身不渝捍卫自己的学说。集合论在20世纪初开始渗透到数学的各个领域,被罗素(B. Russell,1872～1970)誉为“这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。以下摘录康托尔最重要的两部著作——《一般集合论基础》(1883)和《对建立超穷数理理论的贡献》(1895～1897)。

84.1.《一般集合论基础》节选——基本序列

1879～1884年间,康托尔在《关于无穷线性点集》的总标题下相继发表了6篇论文(über unendliche linear punktmannigfaltigkeiten,Nr. 1～6. Mathematische Annalen,15(1879),s. 1～7;17 (1880),s. 355～358;20 (1882),s. 113～121;21(1883),s. 545～591;(23)(1884),s. 453～488),其中第五篇后曾以《一般集合论基础,无穷理论的数学和哲学探讨》(Grundlagen einer all-

gemeine Mannigfaltigkeitslehre, ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen)为题单独出版。这部著作除了系统阐述超穷集合论、讨论由集合论产生的数学和哲学问题外,还包括了康托尔早年给出的无理数定义的详细说明。以下即选录该文中有关基本序列的部分,转译自 R. Calinger (ed.): Classics of Mathematics, pp. 592 ~ 597. (U. Parpart 英译 1976)。德文原文可见 E. Zermelo 编:康托尔《数学和哲学论文全集》(Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhelts, pp. 165 — 204, Berlin, 1932)。

数学在其发展中是完全自由的,它只受下述自明的关注所制约,即它的概念既要内在地不存在矛盾,还要参予确定与此前形成的,已经存在着的和已被证明的概念之关系(藉助定义贯串起来)。特别地,在引入新数时,数学只遵循:在给出它们的定义时使之具有某种确定性,并且在某些情况下,使之与老数有某种关系,在特定的场合中这种关系一定会使它们(新数和老数)互相区别开来。只要一个数满足这些条件,数学只能而且必须把它看作是存在的和实在的东西。这正是我在第4段中关于为什么必须把有理数、无理数和复数看作与有限正整数一样是实存的所建议的理由。

我相信,没有必要害怕,许多人是害怕,这些原则含有对于科学的危险。一方面,实行造出新数的自由必须服从所设计的条件,但这些条件给任意性留下的活动空间是非常小的。而且,每一数学概念在其自身之中也带有必要的矫正物;如果它没有收获也不合适(它的无用很快就会表明这一点),那么它将由于没有成功而被丢弃。另一方面,在我看来,对于数学研究工作的任何多余的限制只会随之而带来更大的危险,由于实际上并没有任何理由可说明它是由科学的本质推断出来的,它的危险就更大了,而数学的本质恰恰在于它的自由。

如果由于已经提到的理由使数学的这一本质尚未展现在我面前，那么，我们在本世纪所觉察到的科学本身的整个发展仍将必然地引导我得出完全同样的看法。

如果高斯，柯西，阿贝尔，雅可比，狄利克雷，魏尔斯特拉斯，埃尔米特和黎曼总是被束缚而拿他们的新想法去臣服于形而上学的控制，那么，我们今日就不可能为现代函数论的雄伟建筑而高兴，现代函数论的设计和矗立是完全自由的，毫无短视的瞬间目的，不过，已经显露出了，正如所希望的那样，它在应用于力学、天文学和数学物理学上的暂时的意义。如果福克斯、庞加莱和其他许多杰出的智者受外来影响所包围和限制，我们就会见不到他们带给微分方程论的巨大的推动，还有，如果枯莫尔不是斗胆地(大有仿效者)把所谓的“理想”数引入数论，我们今天也无从去羡慕钦佩克罗涅格和戴德金在代数和算术上的十分重要和杰出的工作。

因此，如已说明的，数学是要脱离形而上学的桎梏而完全自由地发展；另一方面，我并未发现能够给予“应用”数学，如分析力学或数学物理学以同样的权利。照我看来，这些学科在其基础和目的两方面都是形而上学的；如果它们试图从形而上学解脱出来(近来有一有名的物理学家就这么建议过)，它们就会退化成“自然界的描述”，既失去了数学自由思想的新鲜空气，也失去了说明和探索自然现象的力量。

……

在流形的理论中，实数、有理数、无理数是很有意义的，这点不必再说：但我在这儿不愿忽略的是述说至为重要之处即关于它们的定义。由于对有理数引入的严格的算术表述已经形成，我不再多说。在接近我的观点的书中，我请大家注意到有格拉斯曼的《算术教科书》(柏林 1861)和缪勒的《一般算术教科书》(哈尔 1855)。但我想更加详细地简要地讨论一下一般实数的严格算术的引入之三种形式，据我所知，主要的形式也就是这些了。首先，是魏尔斯特拉斯教授多年来在其解析函数论讲义中所遵循的导入方式，在 E. 柯隆克先生的纲要性论文算术概要(柏林，1872)中对此有所述及。

其次，戴德金先生在其文章《连续性和无理数》(Braunschweig，1872)中发表了一种特别的定义形式。第三，1871 年在《数学年刊》(Mathematische Annalen，vol. 5，p. 123)上我也提出了一种定义形式，表面上看来，它与魏尔斯特拉斯的定义有某种相似之处，这样，就使得韦伯(H. Weber)先生把这两者混淆了(Zeitschrift Für Mathematik und physik，历史文献部，p. 163)。在我看来，第三种定义形式，后来为利普希茨先生所发展(分析基础，波恩 1877)，是最简单和最自然的，它的长处是可以最直接地用于分析学。

作为无理实数定义的一部分总是取有理数一阶幂的一种良定的(Well-defined)集合；这是所有定义形式的共同特点。它们的区别在于生成要素(generative moment，集合通过生成要素而与它所要定义的数联系在一起)和集合所必须满足的条件(为了使所涉及的数的定义有一个合适的基础)两者。

在第一种定义方式中，取某种正有理数 a_γ 的集合，记为 (a_γ)，作为基础，它所要满足的条件是，不论取多少个或有限个 a_γ 相加，其和数总是小于一可指明的界。设有这样的两个集合 (a_γ) 和 (a_γ')，可以严格证明，只有以下三种情况：只要是取充分的、渐增的、有限多个的元素相加；单位 1 的每个 $\frac{1}{n}$ 部分总是同样经常地含于两个集合中，或者，从某一个 n 开始，与第二个集合相比，$\frac{1}{n}$ 更经常地含于第一个集合之中；或者与第一个集合相比，$\frac{1}{n}$ 更经常地含于第二个集合之中。如果 b 和 b' 分别是 (a_γ) 和 (a_γ') 两集合所定义的数，那么，根据上述出现的情况，我们置

第一种，　　$b=b'$，

第二种，　　$b>b'$，

第三种，　　$b<b'$。

如果把两个集合并合在一起成为一个新集合

$$(a_\gamma, a_\gamma'),$$

那么，它为

$$b+b'$$

的定义提供了基础，还可以从(a_γ)和$(a_\gamma{}')$形成新的集合

$$(a_\gamma \cdot a_\gamma{}')$$

其中的元素是所有的 a_γ 和所有的 $a_\gamma{}'$ 的乘积，那么，就可以用这个新集合作为定义乘积 bb' 的基础。

从这里我们可以看出，把集合和它所要定义的数联系在一起的生成要素就在于和数的形成；但是，必须作为主要之点而加以强调的是，仅当被使用的是有限多个有理数的求和法时，被定义的数 b 就不会从一开始就被当作是无限级数 $\sum a_\gamma$ 的和。在这里可能出现某种逻辑性错误，因为可以沿相反途径，令 $\sum a_\gamma$ 等于一个现成的数 b 而获得 $\sum a_\gamma$ 的和的定义，而数 b 必须是以前就已经有定义的。我相信，除了魏尔斯特拉斯先生是第一个避免了这种逻辑性错误之外，在此以前是普遍性地犯这种错误；由于这属于一类非常罕见的情况：即真正的错误并不会给计算带来显著的伤害，因而也就没有注意到在犯错误。

我仍然认为，在无理数概念中所发现的一切困难都和这一错误联系在一起，一旦避免了这一错误，无理数将会以与有理数一样的确定性、可区别性和明了性植根于吾人的头脑中[①]。

戴德金先生的定义方式是，以全部实数的整体作为它的基础，以如下的方式把它划分为两族：如果第一族中的数以 A_μ 表示，第二族中的以 B_μ 表示，则总是有

$$A_\gamma < B_\mu$$

戴德金先生把这种划分叫做有理数集的一个"切分"，记之为

$$(A_\gamma | B_\mu)$$

并且用一数 b 与之相联系。如果要比较两个这样的切分

$$(A_\gamma | B_\mu)\text{和}(A'_\gamma | B'_\mu)$$

我们发现，与在第一种定义方式中的一样，按照这两个切分所代表

---

① 与魏尔斯特拉斯联系在一起的建立实数理论的方法应该是由上述脱胎而出的区间套方法。

的数 b 和 b' 的位置关系是彼此相等的或者是

$$b>b'$$

或者是

$$b<b'$$

而存在一共三种可能性。

在第一种情况中，除去某些容易调整的例外(这种例外出现在当被定义的数是现成的有理数时)，它出现于两个切分完全相等的场合；此时，这一定义方式相对于其他两种的不可否认的、决定性的优越处，即对于每个数 b 只对应到唯一一个切分，就显现出来了。不过，这一点也被其极大的不方便所抵消，因为在分析学中从未把数表成“切分”的形式，要转化成这种形式首先就要有极大的技巧和烦劳。

从两个给定的切分产生一个新的切分，并以之为基础也就随之而有了和 $b+b'$ 和乘积 bb' 的定义。

第一和第三种定义形式的不方便处(同样的即相等的数有着无限多的表示，因而对实数整体的清晰的宏观认识不能立即得到)是很容易除去的，只要利用任何一种熟知的唯一形成的系统如十进系统或简单连分数展开而对基础集合 (a_γ) 专门作出规定就行了。

现在谈谈实数的第三种定义形式。这里再一次以一次幂的有理数的无限集合 (a_γ) 作为基础；不过，要求它与魏尔斯特拉斯定义形式中的有着不同的特性。我假定，在选取一任意小的有理数 ϵ 之后，集合中的有限多个成员被分离开，余下的两两之差的绝对值小于 ϵ。每一个这样的集合 (a_γ) 可以用假设条件

$$\lim_{\gamma=\infty}(a_{\gamma+\mu}-a_\gamma)=0$$

(对任意的 μ)

我称之为基本列，并把它与它所要定义之数 b 联系在一起，海涅先生建议，甚至符号 (a_γ) 本身就可以贴切地用来表示数，在经过几次讨论之后他也同意了我的作法了(参看 Crell's Journal, vol. 74, p. 172)。可以从概念出发严格导出，这种基本列可以呈现三种情

况：对于充分大的γ值，其成员a_γ的绝对值小于任意一予先指定的数；或者，从某一γ以后，a_γ大于一完全可以确定的正有理数S；或是，从某一γ以后，它们小于一完全可以确定的负有理数$-\rho$。在第一种场合，我称b是等于零，在第二种场合，b大于零或为正，在第三种场合，b小于零或为负。

现在来看初等运算。如果(a_γ)和(a'_γ)是两个基本列，它们所确定的数分别是b和b'，那么，

$$(a_\gamma \pm a'_\gamma) \text{和} (a_\gamma \cdot a'_\gamma)$$

也都是基本列，它们确定了三个数。这些数分别取作和与差以及乘积

$$b \pm b' \qquad \text{和} \qquad b \cdot b'$$

的定义。

如果b的定义同上且附加条件是b不同于零，那就可以证明

$$\left(\frac{a'_\gamma}{a_\gamma}\right)$$

也是一个基本列，它所联结的数给出了商

$$\frac{b'}{b}$$

的定义。

在由基本列(a_γ)给出的数b和直接地由有理数给出的数a之间的初等运算已包含在所建立的运算之中了，只要令

$$a'_\gamma = a, b' = a$$

即可。

现在可以讨论两个数b和b'(b'可以是有理数a)相等，是较小和是较大的定义了。按照

$$b - b'$$

是否等于或大于或小于零，我们就说

$$b = b'$$

或是 $$b > b'$$

或是 $$b < b'。$$

在作了这些准备工作之后，作为第一个可严格证明的定理，我们有，如果 b 是基本列 (a_γ) 所确定的数，则随着 γ 的增大，

$$b-a_\gamma$$

的绝对值将变得比任何一个指定的有理数还要小，或者（其实是同样的）

$$\lim_{\gamma=\infty} a_\gamma=b$$

要好好地注意这最重要之点（其意义很容易被忽略）：在第三种定义形式中，说数 b 被定义为基本列 (a_γ) 的成员 a_γ 的"极限"，这是完全不对的。这也是一种类似于我们在讨论第一种定义形式时所曾指出的逻辑性错误，因为如果是那样的话，则极限

$$\lim_{\gamma=\infty} a_\gamma$$

的存在性就是一种假定了。毋宁说，恰恰相反，藉助于我们在前面的定义，在 b 的概念中已提供了与有理数的不少性质和关系，这样，我们可以以逻辑上的必然性断言

$$\lim_{\gamma=\infty} a_\gamma$$

存在且等于 b。请原谅我的一以贯之的认真，这是由于我感到许多人忽略了这一并不显眼的细节因而易于卷入关于无理数的怀疑和众说纷纭之中；他们只要注意到这里所强调的详细说明，他们就会完全解脱出来，因为他们会清楚地认识到，由于定义所赋予它的特性，无理数和有理数一样，甚至和整数一样，在我们的头脑中都是明明白白的事实，而且人们不需通过极限过程而首先获得它，恰恰相反，由于它的特性，人们可以相信极限过程的可靠性和显然的可容许性。

现在，上面刚刚举出的定理很容易加以扩充成为下述的定理：如果 (b_ν) 是有理数或无理数的任一集合满足

$$\lim_{\gamma=\infty}(b_{\gamma+\mu}-b_\gamma)=0 \qquad (\mu \text{ 任意})$$

则存在一个由基本列 (a_γ) 确定的数 b 使得

$$\lim_{\gamma=\infty} \quad b_\gamma=b$$

这样一来，同一个数 b，它以基本列 (a_γ)（我称它们为一阶的基

本列）为基础，是这样定义的使得可以证明，它是 a_γ 的极限，同时也以流形的方式表示成序列 b_γ 的极限，这里每个 b_γ 都可以用一个一阶的基本列

$$(a_\mu^{(\gamma)}) \qquad (\gamma \text{ 固定})$$

来定义。

因此，只要集合 (b_γ) 具有下述的性质

$\lim\limits_{\gamma=\infty}(b_{\gamma+\mu}-b_\gamma)=0$（$\mu$ 任意）我就称之为二阶的基本列。

类似地，三阶，四阶，…，n 阶和 α 阶基本列都可以产生，这里的 α 是第二数类的任意一数。

所有这些基本列在确定一实数 b 上与一阶基本列所完成的恰恰都是同一件事，区别仅在于，在给出它们时用了更加复杂更加广泛的形式。

在我看来，无论如何，一个人只要愿意全盘接受第三种定义形式的观点，以上述形式而定出这种差异是很合适的；在所引的工作（Mathematische Annalen，vol. v. p. 123）中，我以相似的方式已经这样做了。因此，我现在使用下述的表达方式：数值量 b 由一个 n 阶或 α 阶的基本列给出。如果我们这样定了，我们就获得了一种非常轻松自由同时又易于理解的语言，这种语言使我们可以以最简单和清晰的形式描绘常常是非常复杂的分析学的网之丰富内容和纷繁形式；照我的看法，我们不应低估通过它而在明晰性和透明性上的获益。在这一点上，我反对戴德金先生在其文章《连续性与无理数》的前言中所说的关于这种区分的怀疑。通过二阶、三阶等基本列引出一阶基本列不能确定出的新数，这早已是我头脑中最最遥远的事情；毋宁说，我仅是集中注意于现成的现实的数的概念上不同的形式。我的文章中的若干部分已清楚地表露这一点。

关于此，我愿意请大家注意到一种值得注意的情况。通过第一种和第二种数类，被我加以区分的基本列的类已经穷尽了通常序列特性的任一种和全部可以设想的形式（不论分析学是否已经发现了它们），所谓“穷尽”其意思是，阶数以第三数类中的数表示的基本列已不再存在；我将在另外的场合严格地证明这一点。

现在我试着简单说明第三种定义形式的适当性。

在阶为任意的 n 或 α 的基本列(e_γ)的基础上给出数 b，我用下述公式表示这一事实：

$$b\sim(e_\gamma)$$

或

$$(e_\gamma)\sim b.$$

如果，给出一通项为 C_ν 的收敛的级数，则其收敛性的充要条件就是大家熟知的

$$\lim_{\gamma=\infty}(C_{\gamma+1}+\cdots+C_{\gamma+\mu})=0$$

(μ 任意)。

84.2. 《对建立超穷数理论的贡献》节选

《对建立超穷数理论的贡献》(Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre)是康托尔最后的重要著述，它分Ⅰ，Ⅱ两部分先后刊登于《数学年刊》(Math. Ann. 46 (1895), s. 481～512; 49(1897), s. 207～246)。以下节录Ⅰ的有关内容，转译自P. E. B. Jourdain (tr): Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, New York, 1915. 德文原文可见前述《全集》(Ges. Abh.)pp. 282～351.

§1 势或基数的概念

我们把一个"集合"理解为把我们的直觉或思想所及的确定的与分离的诸对象合并成为一个整体 M。称这些对象为 M 的元素。

我们用记号把这表为

(1) $$M=\{m\}$$

把许多没有公共元素的集合 $M,N,P,\cdots$合并为单一的集合，我们把它记为

(2) $(M,N,P,\cdots)$

因此，这个集合的元素是把 M 的，N 的，P 的，…元素都一齐拿来。

任何一个不是 M 的集合 M_1，只要它的元素也是 M 的元素，

我们就称它为集合 M 的"部分"或 M 的"部分集合"。

如果 M_2 是 M_1 的一个部分且 M_1 是 M 的一个部分，则 M_2 是 M 的一个部分。

每个集合 M 都有一个确定的"势"，我们也称之为 M 的"基数"。当我们从集合 M 出发，运用能动的思维能力，对其不同元素 m 的性质、对元素被给出时的顺序进行概括时，就会出现我们称之为 M 的"势"或"基数"的一般概念。

[482]我们把这双重的概括行为的结果，M 的基数或势，记为

(3) $$\overline{\overline{M}}。$$

每个单个的 m，如果我们把它从它的性质抽象出来，就成为一个"单元"，基数 $\overline{\overline{M}}$ 就是由单元组成的确定的集合，这个数作为智力的意象或是已给出的集合 M 的投影存在于我们的头脑中。

给定两个集合 M 和 N，如果能够根据某些规则，把它们置于这样一种相互关系中：即对其中一集合的每个元素，另一集合中有且仅有一元素与之对应，我们称集合 M 与 N 是"等势"的。表示为

(4) $$M \sim N \quad 或 N \sim M$$

那么，对于 M 的每个部分 M_1，总有 N 的一个确定的等势的部分 N_1 与之对应，反之亦然。

如果我们有这样一条关于两个等势集合同位的规则，那么，除去它们都由一个元素组成的情况，我们可以有多种方式修饰这条规则。例如，我们总是能够做到，对于 M 的一特定的元素 m_0，有 N 的一个特定的元素 n_0 与之对应。因为，如果按照初始的规则，元素 m_0 与 n_0 没有互相对应，但对应到 M 的元素 m_0 与 N 的元素 n_1 且对应到 N 的元素 n_0 的是 M 的元素 m_1，我们用修饰过的规则使 m_0 对应到 n_0，m_1 对应到 n_1，而对其他元素保留初始的规则，这样做，我们的目的已经达到。

每个集合等势于它本身：

(5) $$M \sim M$$

如果两个集合都等势于第三者，它们互相等势，即是说：

(6)由 $M \sim P$ 和 $N \sim P$ 推出 $M \sim N$。

下述定理有着根本性的重要性：两个集合 M 和 N 有相同的基数，当且仅当它们是等势的。即是：

(7)由 $M \sim N$ 我们有 $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$

和

(8)由 $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$ 我们有 $M \sim N$.

这样，集合的等势性成为它们的基数相等的充要条件。

[483]事实上，按照上述的势的定义，如果把 M 中的一个或多个或甚至全部元素的每一个都代替以别的事物，其基数 $\overline{\overline{M}}$ 保持不变。如果有 $M \sim N$，依同位规则 M 和 N 是唯一地且互反地互相关联着；籍助它对于 M 的元素 m 有 N 的元素 n 与之对应。那么我们可以想象，对于 M 的每一个元素 m，用对应到它的 N 中的元素 n 代替它，按照这种方式，M 变换成 N 而基数毫无改变。因而

$$\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$$

逆定理由下之评注可以得到，即在 M 的诸元素和它的基数 $\overline{\overline{M}}$ 的不同单元之间存在着一个互反地唯一的(或一对一的)对应关系。这是因为，我们已经看到，$\overline{\overline{M}}$ 由 M 而产生，从 M 的每个元素 m 产生 $\overline{\overline{M}}$ 的一个特定单元。这样，我们有：

(9) $$M \sim \overline{\overline{M}}$$

同样，我们有 $N \sim \overline{\overline{N}}$. 如果还有 $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$，则由(6)，我们有 $M \sim N$。

我们提一下下面的定理，它可以从等势的概念直接得到。如果 $M, N, P, \cdots$ 是没有公共元素的集合，$M', N', P', \cdots$ 也是如此，且如果有

$$M \sim M', N \sim N', P \sim P', \cdots,$$

那么我们总有

$$(M, N, P, \cdots) \sim (M', N', P' \cdots)。$$

§2 关于"较大"和"较小"的势

如果对应基数是 $a=\overline{\overline{M}}$ 和 $b=\overline{\overline{N}}$ 的两个集合 M 和 N，下述两个条件成立：

(a) M 的任一部分都不与 N 等势，

(b)存在一个 N 的部分 N_1 满足 $N_1 \sim M$。显然，如果把其中的 M 和 N 代以分别等势的两个集合 M' 和 N'，这两个条件仍然成立。因此，它们表示着基数 a 和 b 彼此间的一种确定的关系。

[484]并且，可以排除 M 与 N 等势，即是 a 与 b 相等的情况。这是因为如果有 $M \sim N$，又因为 $N_1 \sim M$，我们有 $N_1 \sim N$，然后，因为 $M \sim N$，就会存在 M 的一个部分 M_1 满足 $M_1 \sim M$，因此推出 $M_1 \sim N$①；这与条件(a)矛盾。

还有，a 对于 b 的这种关系使得 b 对于 a 不可能存在同样的关系，这是因为如果在(a)和(b)两个条件中把 M 和 N 所扮演的角色交换一下，产生的两个条件与前头的是矛盾的。

我们把(a)和(b)所表征的 a 和 b 的关系说成是：a"小于"b 或 b"大于"a，以记号表示之

(1) $$a < b \text{ 或 } b > a$$

容易证得

(2)如果 $a < b$ 且 $b < c$，我们总是有 $a < c$. 类似地，由定义立得，如果 P_1 是集合 P 的一个部分，从 $a < \overline{\overline{P}}_1$ 即有 $a < \overline{\overline{P}}$ 且从 $\overline{\overline{P}} < b$ 有 $\overline{\overline{P}}_1 < b$.

我们已经看到，三个关系

$$a = b, a < b, b < a$$

中，每一个都排斥另外两个，另一方面，下述定理：给定任意两个基数 a 和 b，上述三个关系中必有一成立决不是自明的，在现阶段还难以证明它。

以后，当我们对超穷基数的上升序列有了总的认识并对它们的内部联系有了较深了解之后就会得出定理的真理性。

A 如果 a 和 b 是任两个基数，则不是 $a = b$ 就是 $a < b$ 或 $a > b$ 成立。

由此定理，下面的几个定理就很容易推出来了；不过我们暂时

---

① 由 $M \sim N$，N_1 是 N 的一个部分，那么，就会存在 M 的一个部分 M_1 使得 $M_1 \sim N_1$，因而有 $M_1 \sim N$，这样推证似乎更直接些。

还用不上它们。

B 给出两个集合 M 和 N，如果 M 等势于 N 的一个部分 N_1 且 N 等势于 M 的一个部分 M_1，则 M 和 N 等势；

C 如果 M_1 是集合 M 的一个部分，M_2 是集合 M_1 的一个部分并且 M 与 M_2 等势，那么 M_1 既与 M 也与 M_2 等势；

D 给出两个集合 M 和 N，如果 N 既不与 M 也不与 M 的任一部分等势，则存在 N 的一个部分 N_1 它与 M 等势；

E 如果两个集合 M 和 N 不等势，且有 N 的一个部分 N_1 与 M 等势，则 M 的任一个部分都不与 N 等势。

§3 势的加法和乘法

[485]在§1，(2)中，我们把两个没有公共元素的集合 M 和 N 的合并记作 (M,N)。我们称它为"M 和 N 的并集"。

如果 M' 和 N' 是其它两个没有公共元素的集合且 $M \sim M'$，$N \sim N'$，我们看出，有

$$(M,N) \sim (M',N')$$

因此 (M,N) 的基数只依赖于基数 $\overline{\overline{M}}=a$ 和 $\overline{\overline{N}}=b$.

这就引出了 a 和 b 之和的定义，我们置

(1) $$a+b=\overline{\overline{(M,N)}}$$

由于在势的概念中，我们抽去了元素的顺序，故立得

(2) $$a+b=b+a$$

对于任意三个基数 a,b,c，我们还有

(3) $$a+(b+c)=(a+b)+c$$

我们来看乘法。我们可以设想，把集合 M 的任一元素 m 与集合 N 的任一元素 n 捆在一起形成一个新的元素 (m,n)，用 $(M.N)$ 表示所有这些连接 (m,n) 的集合，并称之为"M 和 N 的连接集"。因此有

(4) $$(M.N)=\{(m,n)\}$$

我们看出，$(M.N)$ 的势仅依赖于势 $\overline{\overline{M}}=a$ 和 $\overline{\overline{N}}=b$. 这是因为，令集合

$$M'=\{m'\}\text{和 } N'=\{n'\}$$

分别等势于 M 和 N，且把 m,m' 和 n,n' 看作对应的元素，则在集合

$$(M'\cdot N')=\{(m',n')\}$$

与 $(M.N)$ 之间在把 (m,n) 与 (m',n') 当作对应元素之时就引入了一个互逆且单义的对应关系。因此

(5) $$(M'.N')\sim(M.N)$$

由下式定义乘积 $a.b$

(6) $$a.b=\overline{\overline{M.N}}$$

[486]由基数分别是 a 和 b 的两个集合 M 和 N 产生基数为 $a.b$ 的一个集合，还可以用下面的规则：从集合 N 出发，在其中把它的每个元素 n 代以一个与 M 等势的集合 M_n，然后，把所有这些集合 M_n 的元素收集在一起成为一个整体 S，我们有

(7) $$S\sim(M.N)$$

因而有

$$\overline{\overline{S}}=a.b$$

这是因为，随着两个等势集合 M 和 M_n 间任一给定的对应规律，我们把 M 中对应到 M_n 中元素 m_n 的元素记为 m. 我们有

(8) $$S=\{m_n\}$$

只要把 m_n 和 (m,n) 当作对应的元素，集合 S 和 $(M.N)$ 就互逆且单义地彼此互相关联。

从我们的定义，由于

$$(M.N)\sim(N.M)$$

$$(M.(N.P))\sim((M.N).P)$$

$$(M.(N,P))\sim((M.N),(M.P))$$

立得下述定理：

(9) $$a.b=b.a$$

(10) $$a.(b.c)=(a.b).c$$

(11) $$a.(b+c)=a.b+a.c$$

这样，势的加法和乘法适合交换律、结合律和分配律。

§4 势的取幂

所谓一个"集合 N 的关于 M 的元素的覆盖",或简称为一个"N 关于 M 的覆盖",应该理解为一条规则,根据这条规则对于 N 中每个元素 n,M 中有一确定的元素与之相连结,并且 M 的同一元素可以反复使用。M 中与 n 相连结的元素在某种意义上是 n 的一个单值函数,可记为 $f(n)$,称之为"n 的覆盖函数"。N 的相应的覆盖记为 $f(N)$。

[487]称两个覆盖 $f_1(N)$和 $f_2(N)$相等,当且仅当,对于 N 的所有元素 n 等式

$$f_1(n)=f_2(n) \tag{1}$$

成立。所以,只要对一个元素 $n=n_0$ 等式不成立,就应当认为 $f_1(N)$和 $f_2(N)$是 N 的不同覆盖。例如,如果 m_0 是 M 的一个特定的元素,对所有的 n,我们固定地令

$$f(n)=m_0$$

这条规则成为 N 关于 M 的一个特定的覆盖。又如果 m_0 和 m_1 是 M 的两个不同的特定的元素且 n_0 是 N 的一个特定的元素,我们规定

$$f(n_0)=m_0$$
$$f(n)=m_1$$

对于所有不同于 n_0 的 n,我们又得到 N 关于 M 的另一种覆盖。

N 关于 M 的不同覆盖的全体形成一个确定的集合,其元素为 $f(N)$. 我们称之为"N 关于 M 的覆盖集合"并以$(N|M)$记之。因此,

$$(N|M)=\{f(N)\} \tag{2}$$

如果 $M\sim M'$ 且 $N\sim N'$,易知

$$(N|M)\sim(N'|M') \tag{3}$$

因此,$(N|M)$的基数仅依赖于基数 $\overline{\overline{M}}=a$ 和 $\overline{\overline{N}}=b$;我们可用它作为 a^b 的定义:

$$a^b=\overline{\overline{(N|M)}} \tag{4}$$

对任意三个集合 M,N,P，我们易证得下列定理：

(5) $$((N|M).(P|M))\sim((N,P)|M)$$

(6) $$((P|M).(P|N))\sim(P|(M.N))$$

(7) $$(P|(N|M))\sim((P.N)|M).$$

如果我们置 $\overline{\overline{P}}|=c$，根据(4)和§3，由上列诸式可得下列诸定理：对于任意三个基数 a,b 和 c：

(8) $$a^b.a^c=a^{b+c}$$

(9) $$a^c.b^c=(a.b)^c$$

(10) $$(a^b)^c=a^{b.c}$$

我们用下面的例子来说明，把这些简单公式推广到势的运算上之后，它们是多么地有意义，影响又是多么深远。如果我们把线性连续统 X（即所有满足 $x\geqslant0$ 且 $x\leqslant1$ 的实数 x 的全体）的势记为 $\mathfrak{o}$，容易看出，除其他表示法外，还有公式：

(11) $$\mathfrak{o}=2^{\aleph_0}$$

在§6要给出 $\aleph_0$ 的意义。事实上，由(4) $2^{\aleph_0}$ 是所有 x 用二进制表达式

(12) $$x=\frac{f(1)}{2}+\frac{f(2)}{2^2}+\cdots+\frac{f(\nu)}{2^\nu}+\cdots$$

$$(f(\nu)=0\text{ 或 }1)$$

的势。我们注意到，每一个 x 只有一个表达式，但形如 $x=\frac{2\nu+1}{2^\mu}<1$ 的数有二个表达式，如果我们把后者这个“可数的”总体记为 $\{B_\nu\}$，我们有

$$2^{\aleph_0}=(\overline{\overline{\{s_\mu\},X}})$$

如果我们从 X 取走任一“可数的”集合 $\{t_\nu\}$，把剩下的记为 X_1，我们有

$$X=(\{t_\nu\},X_1)=(\{t_{2\nu-1}\},\{t_{2\nu}\},X_1),$$

$$(\{s_\mu\}X)=(\{s_\mu\}\{t_\nu\},X_1)$$

$$\{t_{2\nu-1}\}\sim\{s_\mu\},\{t_{2\nu}\}\sim\{t_\nu\},$$

$$X_1\sim X_1;$$

$$X \sim (\{s_\mu\}, X)$$

因而(§1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}$$

从(11)式,两端同时自乘(又根据§6,(6))

$$\mathfrak{o}.\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0}.2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

由此,继续乘以 $\mathfrak{o}$,

(13) $$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}$$

这里的 ν 是任意一个有穷基数。

如果在(11)式的两端取 $\aleph_0$作为乘幂指数[①],我们得:

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$$

又由§6,(8),$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$,我们有

(14) $$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

公式(13)和(14)表明,不论是 ν-维的还是 $\aleph_0$-维的连续统与一维连续统的势是一样的。这样,我在克雷尔(Crell 的 Journal,Vol,lxxxiv,1878 上的文章的全部内容可以从基数运算的基本公式出发只需寥寥几笔就可以纯代数地推导出来。

§6 最小的超限基数阿列夫零

具有有限基数的集合叫做"有限集",其余的统统叫做"超限集合"。它们的基数就叫做"超限基数"。

超限集的第一个例子可以由有限基数 ν 的全体给出;我们称之为基数(§1)"阿列夫零"并以 $\aleph_0$记之;这样,我们规定:

(1) $$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}$$

这个 $\aleph_0$是一个超限数,也就是说,它不等于任一有限数 μ。这可以从下面的简单事实推出:如果把一新元素 e_0 添加于集合$\{\nu\}$,并集$(\{\nu\}, e_0)$与原集合$\{\nu\}$是等势的,这是因为在它们之间存在下述的互逆地单义对应关系:令第二个集合的元素 1 与第一个集合的元

① 英文中此处意义暧昧,"势"和"乘幂"的英语词同是 power。

素 e_0 对应，令第二个集合的元素 $\nu+1$ 与第一个集合的元素 ν 对应。由 § 3 我们有

(2) $$\aleph_0+1=\aleph_0$$

但我们已在 § 5 中证明了，$\mu+1$ 总是不同于 μ，因此，$\aleph_0$不等于任一有限数 μ。

数 $\aleph_0$大于任何有限数 μ。

(3) $$\aleph_0>\mu$$

[493]如果我们留意一下 § 3，这一点由下述三件事实即可推出：$\mu=(1,2,3,\cdots,\mu)$，集合$(1,2,3,\cdots,\mu)$的任一部分都不等势于集合$\{\nu\}$，而且$(1,2,3,\cdots,\mu)$本身正是$\{\nu\}$的一个部分。

另一方面，$\aleph_0$是最小的超限基数。如果 a 是任何一个与 $\aleph_0$不同的超限基数，则

(4) $$\aleph_0<a$$

这是由于下面的定理：

A 每个超限集 T 都有着以为基数的部分。

证明 如果按照某一规则，我们已经从 T 取走有限个元素 $t_1,t_2,\cdots,t_{\nu-1}$，我们总是能够进而再取走另一个元素 t_ν，则集合$\{t_\nu\}$，ν 表任何有限基数，是 T 的一个部分且因为$\{t_\nu\}\sim\{\nu\}$（ § 1）而其有基数 $\aleph_0$。

B 如果 S 是具有基数 $\aleph_0$的一个超限集，且 S_1 是 S 的任意一个超限的部分，则$\overline{\overline{S_1}}=\aleph_0$.

如果我们注意到 § 2，由 A 和 B 即推得公式(4)。

从(2)式两端加 1，我们有

$$\aleph_0+2=\aleph_0+1=\aleph_0$$

重复同一步骤，

(5) $$\aleph_0+\nu=\aleph_0$$

我们还有

(6) $$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

(6)式可以写成

$$\aleph_0\cdot 2=\aleph_0$$

等式两端同时反复地加上$\aleph_0$，我们发现

(7) $$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

我们还有

(8) $$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

证明 由§3的(6)式，$\aleph_0 \cdot \aleph_0$是连接集

$$\{(\mu,\nu)\}$$

的势，其中的μ和ν是彼此互相独立的任何有限的基数。如果λ也代表任何有限的基数，那么$\{\lambda\}$，$\{\mu\}$和$\{\nu\}$都是所有有限数这同一个集合的不同记号而已，我们只需证

$$\{(\mu,\nu)\} \sim \{\lambda\}$$

即可。我们以p代$\mu+\nu$，一共有$p-1$个(μ,ν)元素满足$\mu+\nu=p$，即

$$(1,p-1),(2,p-2),\cdots,(p-1,1)$$

让p取$2,3,4,\cdots$的全部数值，在这个数列中可以设想它的第一个元素是$(1,1)$，与它相应的$p=2$，然后置与$p=3$相应的二个元素，以后是与$p=4$相应的三个元素。这样，所有的元素(μ,ν)都被置于一简单序列中：

$$(1,1);(1,2),(2,1);(1,3),(2,2),(3,1);(1,4),(2,3),\cdots,$$

这儿，我们容易看出，元素(μ,ν)处于第λ个的位置，其中

(9) $$\lambda = \mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}$$

变量λ取每个数值$1,2,3,\cdots$各一次。这样，由于(9)，在集合$\{\nu\}$与$\{(\mu,\nu)\}$之间存在着一个互逆的单一的关系。

[495]把式子(8)的两端乘以$\aleph_0$，我们得到$\aleph_0{}^3 = \aleph_0{}^2 = \aleph_0$，继续反复乘以$\aleph_0$，我们得到，对每个有限基数$\nu$，下面等式成立：

(10) $$\aleph_0{}^\nu = \aleph_0$$

由§5的定理E和A引出关于有限集合的定理：

C 每个有限集合E都不可能与它的某个部分等势。

这个定理与下面的关于超限集合的定理是强烈的反衬。

D 每个超限集合T都与它的某个部分T_1等势。

证明 由本节定理A,T 有一个部分 $S=\{t_\nu\}$ 其基数为 $\aleph_0$,令 $T=(S,U)$,U 由 T 中不同于 t_ν 的一切元素组成,我们令 $S_1=\{t_{\nu+1}\}$,$T_1=(S_1,U)$;那么,T_1 是 T 的一个部分,事实上,它就是从 T 抹去单个元素 t_1 后所产生的。由本节定理B,$S\sim S_1$ 且 $U\sim U_1$,再由§1,我们有 $T\sim T_1$。

定理 C 和 D 已经把有限与超限集合之间的主要差异表现得很清楚了。我在1877年已经提出过(见 Crelle 的 Journal. vol lxxxiv p. 242. [1878])。

在我们引入最小的超限基数 $\aleph_0$ 并推导出最现成的若干性质之后,自然会产生这样的问题:较高的基数是什么样的,它们是如何从 $\aleph_0$ 产生出来的,我们以后会说明,超限基数可以按照它们的大小进行排序,并且与有限数一样,形成一个"良序集"(把这个词的意义加以推广)。按照确定的规律,从 $\aleph_0$ 出发,产生下一个较大的基数 $\aleph_1$,按同样的规律,从 $\aleph_1$ 出发,又有下一个较大的 $\aleph_2$,如此等等。不过,即便是无限的基数序列

$$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\cdots,\aleph_\nu\cdots$$

也不能穷尽超限基数的概念,我们将要证明,存在着一个我们记作 $\aleph_\omega$ 的基数,它恰恰大于所有的数 $\aleph_\nu$. 如同从 $\aleph_0$ 产生 $\aleph_1$ 的方式一样,从 $\aleph_\omega$ 也可产生下一个较大的 $\aleph_{\omega+1}$,如此下去,永无尽期。

[496]对每一个超限基数,按照单一的规律,产生下一个较大的基数,对于每一个以超限基数为元素的无限上升的良序集,按照单一的方式,也产生下一个较大的基数。

这些东西的严格基础在1882年已被发现并已在《一般集合论基础》(莱比锡,1883)和 Mathematische Annalen 的 Vol. xxi 中公开发表……

(王继平 译 罗里波 校)

85. 阿贝尔:论阿贝尔积分与椭圆函数

19 世纪分析在严格化的同时,向以复数为变量的函数全面推广,创造了复变函数论这一丰饶的新分支。椭圆函数论是在复变函数论发展中最重要的成就之一,阿贝尔和雅可比是这一理论公认的创始人。在他们之前,欧拉、拉格朗日和勒让德等人在椭圆积分方面已积累了大量结果,但阿贝尔和雅可比最先认识到研究椭圆积分的关键在于考察其反函数,即椭圆函数。椭圆函数论作为经典分析工具在当今从数论到物理众多的领域中有着日益广泛的应用(如费马大定理证明,1993)。

本篇摘录阿贝尔关于阿贝尔积分与椭圆函数论的三篇原始论文。

85.1. 阿贝尔加法定理

阿贝尔在 1826 年向法国科学院提交了一篇题为《关于一类极广泛的超越函数的一个一般性质》(Memoire sur une propriété génerale d'une classe trésétendue de fonctions transcendants)的论文,其中研究了今天所称的"阿贝尔积分"(以椭圆积分为其特例),并获得了著名的"加法定理。"这篇论文当时遭到忽视,在阿贝尔去世后才被发表出来(Mém. divers savants vii,1841;亦载 N. H. Abel. Oeuvres complétes I. pp. 145～211),以下是该文关于阿贝尔加法定理的部分(其中插入了皮卡[E. Picard,1856～1941]给出的阿贝尔加法定理的简化证明),转译自 G. Birkhoff (ed.),A Source Book in Classical Analysis,pp. 188～190.

迄今只有极少几个超越函数被几何学家考虑过。几乎整个超越函数理论分解成对数，指数与圆(三角)函数理论，而本质上它们仅构成一类，只是在最近其他的一些函数才开始被考虑。在这些函数当中，勒让德开发的具极不平常而又优美的性质的椭圆积分应占居首要位置。在这份论文中，作者已经考虑了非常广的一类函数，即为那些其导数是代数函数的函数[①]；就这些函数他发现了类似于对数函数和椭圆积分所具有的性质。

像大家知道的那样，任何一个其导数是有理函数的函数能够被表成一个初等函数[②]。类似地，任意的椭圆积分，也就是，任意的其导数不含无理性的函数，但要除掉阶 $n\leqslant 4$ 的多项式之平方根，也将有性质：如果建立了一种代数关系，那么就能用一个[可加的]初等函数表示这些函数的任意和。这些函数的此种性质的相似性诱导作者去问：是否不一定能够找出较一般函数的相似性呢？然而在证明下面定理的过程中他获得了成功。

"如果存在几个函数其导数是同一个代数函数的分支[③]，那么一但建立了某种以函数为变元的代数关系我们就总能用一个初等函数表示任意个这样函数的和。"

这些关系的数目不依赖函数的个数，而只依赖于所考虑的函数的特殊性质。因此，举例来说，对一个椭圆函数这个数目是 1，而对一个其导数，除阶为 5 或 6 的多项式的平方根外，不具无理性的函数这个数目是 2；等等。

若函数乘以正或负的有理数，仍然有同样的定理。

这样就又推导出下述定理：

"我们总能用若干预先确定的其变元是给定函数之变元的代

① 阿贝尔称"能用系数均是有理函数的代数方程表示。"现在称导数是代数函数的函数为阿贝尔积分。

② 代数函数或对数函数的和称为"初等函数"。阿贝尔有点含糊地说："一个能表为代数函数或对数函数的有限和的性质。"

③ 系数均是一个变数的有理函数的代数方程的根。

数函数的函数之相似和去表示那特殊个数的函数和，而这特殊中的每个函数被乘上一个有理数并且其变元是任意的。”

在这篇论文的末尾，这理论被用于一类特殊的函数，即那些能被表示成不具无理性的微分式的积分(除某些“根”外)[①]。

[阿贝尔在§1－§2里继续他的欧拉加法定理之推广并给出一个证明。在§3中虽然他承认就个别情形他的一般讨论引出非常复杂的公式，但他却尽全力给出了特别的应用。所以在§8中，他对$\int R(x,y)dy$进行了数值计算，这儿y的阶为13。

下面我们再现阿贝尔加法定理的皮卡简化证明[②]。

设一代数曲线$f(x,y)=0$被一族带r个参数的曲线$\varphi(x,y,a_1,a_2,\cdots,a_r)=0$所截，这儿系数是参数$a_1,a_2,\cdots,a_r$的有理函数。令变元交是$x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,$. 我们求阿贝尔积分$A(x)=\int_{x_0}^{x}R(x,y)dy$之值，此处$R$为有理函数。我们尤其希望求和式$A(x_1)+A(x_2)+\cdots$. 若从$f=0$与$\varphi=0$消去$y$，则得$x$是$a_1,a_2,\cdots$的一个代数函数。因此，我们能写下$\psi(x,a_1,a_2,\cdots,a_r)=0$以及$dx=l_1da_1+l_2da_2+\cdots+l_rda_r$。

从$f=\varphi=0$导致

(A) 如果(x_i,y_i)是一个交，那么y_i是x_i和$a_1,a_2,\cdots,a_r$的有理函数。

(B) $$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\sum_j\frac{\partial \varphi}{\partial a_j}da_j=0$$

消去dy，我们就看出前面的l_j是$x_i,a_1,a_2,\cdots,a_r$的有理函数：

$$A'(x_i)dx_i=m_1(x_i,a_1,\cdots,a_r)da_1+\cdots+m_r(x_i,a_1,\cdots,a_r)da_r$$

$$\sum_i A'(x_i)dx_i=\sum_i m_1(x_i,a_1,\cdots,a_r)da_1+\cdots+\sum_i m_r(x_i,a_1,\cdots,a_r)da_r$$

① 现在称这些积分为超椭圆积分。

② E. Picard, Traité d'Analyse, vol. 2, pp. 438～439; J. L. Coolidge, History of Geometric Methods, p. 213.

但是，$\sum_i m_j(x_i,a_1,\cdots,a_r)$是有理的且关于 x_i 成对称，而 x_i 是 $f=0$ 与$\varphi=0$ 的根。所以 $\sum_i m_j(x_i,a_1,\cdots a_r)$是 $a_1,\cdots,a_r$ 的有理函数。故

$$\sum_i F(x_i)=\frac{L(a_1,\cdots,a_r)}{M(a_1,\cdots,a_r)}\cdot\sum_i \log\psi_i(a_1,\cdots,a_r)$$

Abel 定理：如果一个代数积分是取自一条代数曲线上的不动点到另一点，而此点是这代数曲线与一族有理地依赖于一定数目的参数的变元曲线的交点，那么这些值的和必将有理地依赖于这些参数，或者最坏情形将包括它们的对数函数。"]

85.2. 论超椭圆积分

阿贝尔很快将他的一般阿贝尔积分理论应用于更困难类型的所谓"超椭圆积分"。以下就是他在这方面的一篇论文《关于一般超越函数的某些一般性质的注记》(Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes, Jur. reine ang. Math. 3. 1828，亦载 Oeuvres Complétés I. pp. 444～456)的节录，转译自 G. Birkhoff (ed.)，同上，pp. 190～195.

如果 $\psi(x)$表示任意椭圆积分①，即是说，若 $\psi(x)=\int\frac{rdx}{\sqrt{R}}$

这儿 r 是 x 的任意有理函数而 R 是同一变元的 R 阶≤4 的多项式，那么熟知这函数有非常值得注意的性质；那便是任意多个这样函数的和能表示成一个同类形的函数加上某个代数和对数式。

在超越函数理论中几何学家似乎只限于这种形式的函数。然而还存在一类非常广泛的函数具有一个类似于椭圆积分的性质。

我来谈谈能考虑为任意代数微分的积分的函数②。若不能用

① 用现代术语我们亦称"椭圆函数"为"椭圆积分"，并写 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，而阿贝尔则写作 φx，ψx。

② 也就是今天所谓的阿贝尔积分。

一个同一类形的函数表示任意多个这样函数的和，如椭圆积分，那么在每种情形我们至少能够用固定多个同于开始所说的同一特征的其他函数之和来表示这样的和，不过得加某个代数和对数式。我们将在稍后的一文里证明这条性质①。此时我来考虑一种特殊情况，它包括椭圆积分，即为，含在公式②

$$(1)\qquad \psi(x)=\int\frac{rdx}{\sqrt{R}}$$

中的函数，R 是任意的多项式而 r 为任意的有理函数。

我们首先建立下面定理：

定理 I　设 $\varphi(x)$是 x 的多项式并可分解为两个因子 $\varphi_1(x)$和 $\varphi_2(x)$之积：$\varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$. 又设 $f(x)$是任意其它的多项式并且令

$$(2)\qquad \psi(x)=\int\frac{f(x)dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}$$

这儿 α 是一个任意常数。若用 $a_0,a_1,a_2,\cdots,c_0,c_1,c_2,\cdots$表示任意数量，其中至少有一个是可变的。给定这些，如果置

$$(3)\quad (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2\varphi_1(x)-(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_mx^m)^2\varphi_2(x)=A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_u)$$

此处 A 不依赖于 x，那么有

$$(4)\quad \varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\varepsilon_3\psi(x_3)+\cdots+\varepsilon_\mu\psi(x_\mu)=\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\frac{(a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+(c_0+c_1\alpha+\cdots+c_m\alpha^n)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{(a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-(c_0+c_1\alpha+\cdots+c_m\alpha^n)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}+r+C$$

这里 C 是一个常数而 r 是函数

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}.$$

① 阿贝尔在1828年底向巴黎的皇家科学院提出一篇关于此类函数的论文。

② 在此 Abel 精确地定义了今天所谓的“超椭圆积分”的那些函数。

$$\log\frac{(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\sqrt{\varphi_1(x)}+(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)\sqrt{\varphi_2(x)}}{(a_0+a_1x+\cdots+a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1(x)}-(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)\sqrt{\varphi_2(x)}}$$

的 x 之降幂展开式中 $1/x$ 前的系数。数量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_\mu$ 等于 $+1$ 或 -1 并且它们的值依赖于 $x_1,x_2,\cdots,x_\mu$ ①。

让我们用 $F(x)$ 表示方程(3)的左边，又为简洁，令

(5) $\theta(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,

$\theta_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$.

……②

于是，我们有公式

(25) $\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\cdots+\varepsilon_\mu\psi(x_\mu)$

$$=C-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}+\Pi\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\cdot$$

$$\log\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}$$

这与公式(4)完全一致。

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_\mu$ 的值不是任意的；它们依赖 $x_1,x_2,\cdots,x_\mu$ 的值而这又由方程 $\theta(x)\varphi_1(x)=\varepsilon\theta_1(x)\varphi_2(x)$ 来确定，这方程又等价于方程组：

$$\theta(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)}=\varepsilon_1\theta_1(x_1),\theta(x_2)\sqrt{\varphi_1(x_2)}=\varepsilon_2\theta_1(x_2)\sqrt{\varphi_2(x_2)},$$

$\cdots$,

(26) $\theta(x_\mu)\sqrt{\varphi_1(x_\mu)}=\varepsilon_\mu\theta_1(x_\mu)\sqrt{\varphi_2(x_\mu)}$.

此外，只要 $x_1,x_2,\cdots,x_\mu$ 限制在某一范围内变化，那么 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_\mu$ 就是常数了。对常数 c 亦然。

---

① 尽管不大方便，此处阿贝尔宁愿定义一个由取平方根符号描述的 2^μ 叶的黎曼曲面。

② 以下证明从略。

3

前面的证明假设了所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_\mu$ 是相异的;然而公式(25)显然当 $x_1, x_2, \cdots, x_\mu$ 的一部分相同时成立。

置 $x_2 = x_1$ 得

(27) $\theta(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)} - \varepsilon_1\theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_2(x_1)} = \varepsilon_2\theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_2(x_1)}$,

因此可假定 $\theta_1(x)\varphi_2(x)$ 和 $\theta(x)\varphi_1(x)$ 无公共因子且 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$。随之而来就有下面的定理:

定理 I 如果令

$$\theta^2(x)\varphi_1(x) - \theta_1^2(x)\varphi_2(x) = A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_\mu)^{m_\mu}$$

这儿多项式 $\theta(x)\varphi_1(x)$ 与 $\theta_1(x)\varphi_2(x)$ 没有公因式,那么必有

(28) $\varepsilon_1 m_1\psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2\psi(x_2) + \varepsilon_3 m_3\psi(x_3) + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu\psi(x_\mu)$

$$= C - \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}$$

$$+ \Pi\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\log\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}$$

若设 $f(x)$ 可被 $x-\alpha$ 除尽,则 $f(\alpha)=0$;因而当 $(x-\alpha)f(x)$ 替代 $f(x)$ 时,我们就得到

定理 II 在定理 I 的假设下,如果 $\psi(x) = \int\frac{f(x)dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$,此处 $f(x)$ 是任一多项式,那么

(29) $\varepsilon_1 m_1\psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2\psi(x_2) + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu\psi(x_\mu)$

$$= C + \Pi\frac{f(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\log\frac{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\theta(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \theta_1(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}$$

……

5

如果在公式(28)中假设多项式 $f(x)$ 的阶小于 $\varphi(x)$ 之阶的一半,那么易见在符号 Π 下(28)式的右边部分将消失,因此我们得这样的定理:

定理Ⅳ 如果多项式 $f^2(x)$ 的阶小于 $\varphi(x)$ 之阶的一半,并且令 $\psi(x)=\int[f(x)/(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}]dx$,那么

$$(30)\qquad \varepsilon_1 m_1\psi(x_1)+\varepsilon_2 m_2\psi(x_2)+\cdots+\varepsilon_\mu m_\mu\psi(x_\mu)$$

$$=C-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(x)}}\log\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}$$

6

在先前的定理中置 $f(\alpha)=1$,并逐次微分 $k-1$ 回,就得:

定理Ⅴ 如果令 $\psi(x)=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{\varphi(x)}}$,那么

$$\varepsilon_1 m_1\psi(x_1)+\varepsilon_2 m_2\psi(x_2)+\cdots+\varepsilon_\mu m_\mu\psi(x_\mu)=$$

$$C-\frac{1\cdot d^{k-1}}{1.2\cdots(k-1)d\alpha^{k-1}}\frac{1}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\log\frac{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\theta(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}$$

7

若在定理Ⅲ中假定 $f^2(x)$ 的阶比 $\varphi(x)$ 的阶至少少 2,则右边退化为常数。这一事实不难给出下述定理。

定理Ⅵ 如果用 $\psi(x)$ 表示函数

$$\int\frac{(\delta_0+\delta_1 x+\delta_2 x^2+\cdots+\delta_{r'}x^{r'})dx}{\beta_0+\beta_1 x++\beta_2 x^2+\cdots+\beta_r x^r}$$

此处,若 r 是奇数则 $r'=(r/2)-3/2$;若 r 是偶数则 $r'=(r/2)-2$,那么

$$(31)\qquad \varepsilon_1 m_1\psi(x_1)+\cdots+\varepsilon_\mu m_\mu\psi(x_\mu)=\text{常数}$$

显然,对 $r=2m-1$ 和 $r=2m$,γ' 有同样的值,即是说,$r'=m-2$.

85.3. 论椭圆函数

阿贝尔最早正式发表的椭圆函数论论文是刊于克雷尔《数学杂志》的《关于椭圆函数的研究》(Recherches sur les fonctions elliptiques, Jur reine ang. Math. 2, 1827),其中借助于椭圆积分的反函数把椭圆积分理论归结为椭圆函数的研究,并发现了椭圆函数的双周期性。以下摘选该文开始部分,转译自 G. Birkhoff: A Source Book in Classical Analysis, pp. 206~207。阿贝尔原文亦载 Oeuvres Complétés. I. pp. 263~269。

长时间引起几何学家感兴趣的超越函数只是对数,指数和圆函数,仅在最近才有其他函数被考虑,在这些函数中,我们必须从其漂亮的分析性质和应用两方面把椭圆函数区别开来…。来自这些函数的第一思想是不朽的欧拉提出的,他证明了可分离方程

$$(1)\quad \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+rx^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+ry^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

是代数可积的…。但是,若我没弄错的话,首先且唯一深化它们特性的人是勒让德,他发掘了这些函数的许多优美的性质;并证实了其可适用性……。我相信在这我们将愉快地看到关于这些椭圆函数的进一步研究。

一般说来,一个椭圆积分是形如

$$\int\frac{R(x)dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+rx^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

样的积分,这儿 R 是一个有理函数且 $\alpha,\beta,r,\delta,\varepsilon$ 为实常数,勒让德已经证明:通过适当的代换总可以将这种积分化成下面的形式:

$$\int\frac{P}{\sqrt{a+by^2+cy^4}}dy$$

此处 P 是 y^2 的有理函数……。

于是就导致了每个椭圆积分都能被简化为三种形式之一,…,

这三者被勒让德称为第一,第二和第三类椭圆积分。这些是勒让德已研究过了的函数,尤其是第一类,它具有最简单和最引人注目的性质。

在这篇论文里,我考虑由下面方程确定的逆函数 sn$u$,

$$u=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-R^2\sin^2\varphi}},\qquad \sin\varphi=\mathrm{sn}u=x$$

第二个方程推出

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}=d(\mathrm{sn}u)=dx$$

因此,

$$u=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-R^2x^2)}}$$

[阿贝尔着手定义 $\mathrm{cn}u=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}$ 且 $\mathrm{dn}u=\sqrt{1-R^2\mathrm{sn}^2u}$;不过他分别用 fu 和 Fu 表示 cn$u$ 和 dn$u$。然后他发现了 sn$u$,cn$u$,dn$u$ 的若干"基本性质"包括他的公式(a)中的 $d(\mathrm{sn}u)/du=\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u$, $d(\mathrm{cn}u)/du=-\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u$ 以及 $d(\mathrm{dn}u)/du=-k^2\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u$,还有加法公式:

$$\begin{aligned}&\mathrm{sn}(u+v)=(\mathrm{sn}u\mathrm{cn}v\mathrm{dn}v+\mathrm{sn}v\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u)/\Delta\\(10)\quad&\mathrm{cn}(u+v)=(\mathrm{cn}u\mathrm{cn}v-\mathrm{sn}u\ \mathrm{sn}v\mathrm{dn}u\mathrm{dn}v)/\Delta\\&\mathrm{dn}(u+v)=(\mathrm{dn}u\mathrm{dn}v-k^2\mathrm{sn}u\mathrm{sn}v\mathrm{cn}u\mathrm{cn}v)/\Delta,\end{aligned}$$

这里 $\Delta=1-R^2\mathrm{sn}^2u\mathrm{sn}^2v$。由上面的加法公式和下述的特殊关系

$$\mathrm{cn}K=\mathrm{dn}iK'=0,K=\int_o^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi,$$

等等,阿贝尔在他的公式(19)式中获得

$$\mathrm{sn}(u+2K)=-\mathrm{sn}u,\ \mathrm{cn}(u+2K)=-\mathrm{cn}u,\ \mathrm{dn}(u+K)=\mathrm{dn}u$$
$$\mathrm{sn}(u+2iK')=-\mathrm{sn}u,\mathrm{cn}(u+2iK')=\mathrm{cn}u,\mathrm{dn}(u+iK')=-\mathrm{dn}u$$

从此推出 sn 和 cn 是带独立周期为 $4K$ 和 $4iK'$ 的双周期函数。]

(肖　杰译　何育赞校)

86. 雅可比：论雅可比 θ 函数

雅可比(C. G. Jacobi, 1804～1851)生于德国波茨坦，1825 年获柏林大学理学博士学位后留校，次年到哥尼斯堡大学任教，1832 年升为教授，1844 年回到柏林大学，接受普鲁士国王津贴，并当选为柏林科学院院士。创立、发展椭圆函数论是雅可比最卓著的数学贡献，他 1829 年发表的《椭圆函数论新基础》(Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarium)成为该领域的经典著作。30 年代他在一系列讲演中又创立了 θ 函数理论，将椭圆函数定义为 θ 函数的商并在此基础上重建椭圆函数理论。雅可比这些讲演未全部发表，但通过学生的笔记、通信被广泛传播。以下选录雅可比《Theorie der elliptische Funktionen aus der Theorie der Thetareihen geleitet》一文的部分内容，该文就是由 Borchardt 根据雅可比的一次讲演遗稿整理而成，原载 C. G. Jacobi: Gesammelte Werke, I. pp. 499～583. G. Reimer, 1881, 此处转译自 G. Birkhoff(ed.): A Source Book in Classical Analysis, pp. 218～223.

在我的著作《椭圆函数新理论基础》中，从考虑椭圆积分出发我得到精细的级数并以符号 Θ 和 H 表示，它们成为椭圆函数 sinam$u$, cosam$u$. 和 Δam$u$ 的分子和分母。

在以下我将以与椭圆函数发现的历史相反的方式来叙述。事先不假设椭圆函数论的任何知识，只从级数 Θ 和 H 出发并使用简单的原则来建立这些级数所满足的关系式。由这些关系式我将导出关于级数商的一个加法定理，并由此得到直接导致椭圆积分的

微分公式。

1

双重无穷级数是我们研究的出发点，其通项是二次式为幂的指数[①] $\sum e^{ar^2+2br+c}$，其中求和是对所有正负整数 r 而作。不失一般性，三个系数 a,b 和 c 中的最后一个能令其为零，因为 e^c 是级数的各项之公因子。

为使级数收敛，必须且只须 a(或至少是它的实部)是负的。若 a 满足此条件则级数是收敛的[不论 b 为何值]。

若改动变元 a 和 b，则和变为另一个级数其中 r 不取所有整数，仅取偶整数值；为此只须以 $a/4$ 和 $b/4$ 代替 a 和 b，因为

$$\sum e^{ar^2+2br}=\sum e^{[a(2r)^2+2b(2r)]/4}.$$

又若乘一因子，则和变为另一个级数其中 r 仅取奇数值。由于 $r^2=(2r+1)^2/4-(2r+1)/2+1/4$，我们有

$$\sum e^{ar^2+2br}=e^{a/4-b}\sum e^{a(2r+1)^2/4+(b-a/2)(2r+1)}.$$

因此，如果我们在级数 $\sum e^{(ar^2/4)+b}$ 中只对偶数求和，或者上级数中以 $b-a/2$ 代替 b 并只对奇数求和然后乘以因子 $e^{(a/4)-b}$，则我们得到同一函数。

从级数的两个形式的每一个出发，若以 $b-\frac{1}{2}\pi i$ 代替 b 则得另一个新的具变号的级数；此外，第二个形式有因子 i。由于 $(-1)^r=e^{r\pi i}, i=e^{\frac{1}{2}\pi i}$，因此

$$(*)\quad \sum e^{ar^2+2br}=e^{1/4a-b}\sum e^{1/4a(2r+1)^2+(b-\frac{1}{2}a)(2r+1)}$$
$$=\sum(-1)^r e^{ar^2+2(b-1/2\pi i)r}$$
$$=ie^{1/4a-b}\sum(-1)^r e^{1/4a(2r+1)^2+(b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\pi i)(2r+1)}$$

若令 $e^a=q, b=ix$，由假设[②] $0<|q|<1$(以下常作此假设不再作说

---

① 雅可比用 ν，此处用 r。

② 雅可比写作"q 的模"，此处以及下面我们写作 $|q|$。

明)，上面 4 级数取下述形式：

$$\sum e^{ar^2+2br}=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots$$

$$\sum e^{\frac{1}{4}a(2r+1)^2+b(2r+1)}=2\sqrt[4]{q}\cos x+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x+\cdots$$

$$\sum(-1)^r e^{ar^2+2br}=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots$$

$$-\sum i^{2r+1}e^{\frac{1}{4}a(2r+1)^2+b(2r+1)}=2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots$$

其右边求和对所有整数 r 而作。

以后这 4 个级数分别表为 $\theta_3(x),\theta_2(x),\theta(x),\theta_1(x)$① 或者若须要时更精确的表示为 $\theta_3(x,q),\theta_2(x,q),\theta(x,q),\theta_1(x,q)$. 所论 4 个其他函数由下述方程确定②

$$\theta(x)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}(-1)^r q^{r^2}e^{2rxi}=1+2\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^\mu q^{\mu^2}\cos 2\mu x$$

$$(1)\quad \theta_1(x)=-\sum_{r=-\infty}^{+\infty}i^{2r+1}q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2}e^{(2r+1)xi}$$

$$=2\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu\sqrt[4]{q^{(2\mu+1)^2}}\sin(2\mu+1)x$$

$$\theta_2(x)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2}e^{(2r+1)xi}=2\sum_{\mu=0}^{\infty}\sqrt[4]{q^{(2\mu+1)^2}}\cos(2\mu+1)x$$

$$\theta_3(x)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}q^{r^2}e^{2rxi}=1+2\sum_{\mu=1}^{\infty}q^{\mu^2}\cos 2\mu x.$$

上述讨论表明我们能通过改动变元 x 和附加一指数因子由 θ 函数过渡到其它 3 个函数。在(*)中分别以 q 和 x 代替 a 和 b 便得

$$\theta_3(x)=\sqrt[4]{q}\,e^{-ix}\theta_2\left(x+\frac{i}{2}\log q\right)$$

若再补上两个公式

---

① 此处雅可比将在选集 42 卷(以及他的新基础)中的符号Ⓗ, H, H_1, Ⓗ改为 θ, $\theta_1,\theta_2,\theta_3$。

② 雅可比仅用简单的求和符号 $\sum$，没有指出求和的限(如写为 $\sum_{\mu=1}^{\infty}$)。

$$\theta(x)=\theta_3(x+\frac{\pi}{2}),\ \theta_1(x)=-\theta_2(x+\frac{\pi}{2})$$

和由前 3 个导出的公式

$$\theta(x)=-i\sqrt[4]{q}\,e^{-ix}\theta_2(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q),$$

则当分别以 $\pi/2$,$(i\log q)/2$ 和 $(\pi/2)+(i/2)\log q$ 改动变元并乘以适当的指数因子,我们从 $\theta_2(x)$得到其它 3 个 θ 函数。这对$\theta(x)$,$\theta_1(x)$和 $\theta_3(x)$亦然。下述一组公式给出 θ-函数之间完整的关系:

$$\theta(x+\frac{\pi}{2})=\theta_3(x),\ \theta(x+\frac{i}{2}\log q)=-if\theta_1(x)$$

$$\theta_1(x+\frac{\pi}{2})=\theta_2(x),\ \theta_1(x+\frac{i}{2}\log q)=-if\theta(x)$$

$$\theta_2(x+\frac{\pi}{2})=-\theta_1(x),\ \theta_2(x+\frac{i}{2}\log q)=f\theta_3(x)$$

(2)

$$\theta_3(x+\frac{\pi}{2})=\theta(x),\ \theta_3(x+\frac{i}{2}\log q)=f\theta_2(x)$$

$$\theta(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q)=f\theta_2(x),\ \theta_1(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q)=f\theta_3(x)$$

$$\theta_2(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q)=if\theta(x),\ \theta_3(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q)=-if\theta_1(x)$$

其中 $f=q^{-\frac{1}{4}}e^{ix}$。

借助于公式

$$\theta(-x)=\theta(x),\ \theta(x+\pi)=\theta(x)$$

$$\theta_1(-x)=-\theta_1(x),\theta_1(x+\pi)=-\theta_1(x)$$

(3)

$$\theta_2(-x)=\theta_2(x),\ \theta_2(x+\pi)=-\theta_2(x)$$

$$\theta_3(-x)=\theta_3(x),\theta_3(x+\pi)=\theta_3(x)$$

当改动变元 x 以 $-\frac{\pi}{2}$,$-(\frac{i}{2})\log q$ 和 $-(\frac{\pi}{2})-(\frac{i}{2})\log q$,则由(2)能获得一组类似的公式。

2

函数 $\theta_3(x)$最先考虑的形式是无穷指数级数确定的

$$\theta_3(x)=\sum q^{r^2}e^{2irx}=\sum e^{r^2}\log q+2irx$$

e 的指数可转为

$$\frac{1}{\log q}[(r\log q+ix)^2+x^2]$$

对 $\theta_3(x)$得出下述表示式

(4) $$\theta_3(x)=e(1/\log q)x^2\sum e(1/\log q)[2r\cdot\frac{1}{2}\log q+ix]^2$$

相应的 $\theta_2(x)$的表示式为

(5) $$\theta_2(x)=e(1/\log q)x^2\sum e(1/\log q)[(2r+1)\frac{1}{2}\log q+ix]^2$$

这两个和的差别仅在于其中一个求和是对所有偶整数 $2r$(正的或负的)而作，另一个则是对奇整数 $2r+1$ 而作。

若具不同变元 x 值的若干此类级数相乘，则乘积能考虑为乘积级数其通项为指数函数，幂为平方和。特别有兴趣的情形是 4 个这样的级数相乘，因为我们可得到幂为 4 项平方和，对此能应用一个初等的变换公式。

已知的代数定理知 4 项平方和总可表为另一个同样的形式。因为若我们以下述公式确定 4 个新的量 a',b',c',d'，

(6) $$a'=\frac{1}{2}(a+b+c+d),\ b'=\frac{1}{2}(a+b-c-d)$$
$$c'=\frac{1}{2}(a-b+c-d),\ d'=\frac{1}{2}(a-b-c+d)$$

则有恒等式

(7) $$a'^2+b'^2+c'^2+d'^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

[然后雅可比详细叙述了牵涉华林(Waring)问题和我们在选集 42 中提出的问题的各种等式和求和原则。]

作了这些准备之后，我回到函数 $\theta_3(x)$，$\theta_2(x)$的表示式(4)和(5). 在这些方程的每一个中，令 4 个变元 w,x,y,z 代替 x，同时让相应的级数项由 r,r',r'',r'''表示；于是 k 和 k'有下述关系式

$$k^2+k'^2=1.$$

方程(D)①表明若函数$\theta(x),\theta_1(x),\theta_2(x),\theta_3(x)$中的3个除以第4个，则所得的商其中两个能由第3个取平方根确定。于是

$$\frac{\theta(0)}{\theta_2(0)}\cdot\frac{\theta_2(x)}{\theta(x)}=\sqrt{1-(\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\cdot\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)})^2}$$

$$\frac{\theta(0)}{\theta_3(0)}\cdot\frac{\theta_3(x)}{\theta(x)}=\sqrt{1-(\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}\cdot\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)})^2}$$

它们能更漂亮的表为：可用下述方法确定一个角φ使得同时有

$$\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}=\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}\sin\varphi,\ \frac{\theta_2(x)}{\theta(x)}=\frac{\theta_2(0)}{\theta(0)}\cos\varphi$$

和

$$\frac{\theta_3(x)}{\theta(x)}=\frac{\theta_3(0)}{\theta(0)}\sqrt{1-(\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)})^4\sin^2\varphi}$$

若引入上面确定的量k和k'并用勒让德符号$\Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$，则这些方程可取下述形式

$$\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}=\sqrt{k}\sin\varphi,\ \frac{\theta_2(x)}{\theta(x)}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi,\ \frac{\theta_3(x)}{\theta(x)}=\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi$$

因此由公式(D)和(E)导出的结果可综述为下列方程

$$\sqrt{k}=\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}=\frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

$$(13)\qquad \sqrt{k'}=\frac{\theta(0)}{\theta_3(0)}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

$$k^2+k'^2=1$$

$$\sqrt{k}\sin\varphi=$$

---

① 方程(D)如下：

(1) $\theta_3^2(0)\theta_3^2(x)=\theta^2(0)\theta^2(x)+\theta_2^2(0)\theta_2^2(x)$

(2) $\theta_3^2(0)\theta^2(x)=\theta^2(0)\theta_3^2(x)+\theta_2^2(0)\theta_1^2(x)$

(3) $\theta_3^2(0)\theta_2^2(x)=\theta_2^2(0)\theta_3^2(x)-\theta^2(0)\theta_1^2(x)$

(4) $\theta_3^2(0)\theta_1^2(x)=\theta_2^2(0)\theta^2(x)-\theta^2(0)\theta_2^2(x)$

进一步若令$x=0$，则方程(D)的第一个给出精细关系

$(E)\qquad \theta_3^4(0)=\theta^4(0)+\theta_2^4(0)$

$$\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}=\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

(14) $$\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi=\frac{\theta_2(x)}{\theta(x)}$$

$$=\frac{2\sqrt{q}\cos x-2\sqrt{q^9}\cos 3x+2\sqrt{q^{25}}\cos 5x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi=\frac{\theta_3(x)}{\theta(x)}$$

$$=\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots}$$

[然后雅可比解释说,当然 φ 由方程(14)仅确定到模以 2π,但若 $\varphi(x)$ 是连续的,则它能由 $\varphi(0)=0$ 唯一地确定。]

特别地,若设 x 和 $q(|q|<1)$ 两者皆为实数,则由(13),k 和 k' 亦是实的且小于 1,类似地,由(14),φ 是实的,又由于从(12)可知函数 $\theta_3(x)$ 和 $\theta(x)$ 对实值 x 和 q 仅取正值,因此在第 3 个方程中的平方根 $\Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ 常取正号。

[然后雅可比进行了长达数页的复杂计算,最后他给出总结]。

上面所获结果能综述如下:

在§1 中定义的 4 个 θ 函数满足关系式,它们允许辐角 φ,模 k 和余模 k' 由 6 个方程[(13)和(14)]……以及 φ 与 x 同时为零的条件确定为 x 和 q 的函数。反之,x 能由下述方程表示为 φ 和 k 的函数

(24) $$\frac{2Kx}{\pi}=F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

此外我们有

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=\theta_3(0)=1+2q+2q^4+2q^9+\cdots$$

(25) $$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}=\theta_2(0)=2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots$$

$$\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}=\theta(0)=1-2q+2q^4-2q^9+\cdots$$

像在《基础》一书中那样，下面我们将以 am $2Kx/\pi$ 表示 $F(\varphi)$ 的反函数，反之由 $2Kx/\pi=F(\varphi)$ 导出 $\varphi=\text{am } 2Kx/\pi$。

[论文继续确定 q 为 k 的函数；这导致

(27) $$q=e^{-\pi k'/K}$$

综上所述，对

$$\varphi=\text{am } u=\text{am } \frac{2Kx}{\pi}, \psi=\text{am } \mu=\text{am } \frac{2ky}{\pi}$$

$$\sigma=\text{am } (u+v)=\text{am } \frac{2K(x+y)}{\pi}$$

雅可比得到加法定理：

$$\text{sn}(u+v)=\frac{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn} v+\text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}{1+k^2 \text{ sn}^2 u \text{ sn}^2 v}\cdots$$

其余的包含了第二类和第三类椭圆积分的相应发展。]

(何育赞 译)

87. 魏尔斯特拉斯:《关于幂级数理论》

19世纪复变函数论的主要奠基人是柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯,但他们的出发点与探讨途径有所不同。柯西在以解析式表示的函数的导数与积分的基础上建立函数论,他开辟的领域在这个世纪的后半叶被黎曼用几何思想极大地拓广和深化了。魏尔斯特拉斯则采取了完全不同的途径,从幂级数出发,定义一点邻域内的解析函数,通过"解析延拓"导出整体解析函数理论。正如F. 克莱茵所指出:魏尔斯特拉斯的方法更易于推广到多变量的解析函数。以下选录魏尔斯特拉斯写于1841年的论文《关于幂级数理论》(Zur Theorie der Potenzreihen)。像魏尔斯特拉斯大多数早期论文一样,这篇论文只是到他出版《全集》时才正式发表(K. Weierstrass, Mathematische Werke, Berlin, Bd. 1. S. 67~74)。魏尔斯特拉斯在这篇论文中引进了多复变量幂级数,并借以发展多复变函数理论。我们注意到他对一致收敛性的强调,以及他证明的基本定理:一致收敛的解析函数序列的极限是解析函数。本译文转译自 G. Birkhoff (ed.): A Source Book in Classical Analysis, pp. 74~78.

定理A 令 $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}A_kz^k$ 是具有给定系数的复变量 z 的洛朗(Laurent)级数["幂级数"]。若 r 是级数收敛圆环["区域"]内任一固定正值,则 $F(z)$ 在 $|z|=r$ 上的绝对值有一[有限]上界并以 g 表示之;于是对所有整数 k[①] 有

---

① 魏尔斯特拉斯分别以 $x,\nu,\mu,\lambda,\rho,k,m$ 和 ξ 表示 z,k,i,j,m,k,m 和 ω。

$$|A_k| \leqslant g r^{-k}$$

由于所论的幂级数对满足$|z|=r$的所有z是一致收敛的[①]，由假设对任意$\delta>0$我们能找到两个正整数n和n'使得对于$|z|=r$有

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{k=-n'-1} A_k z^k\right| < \delta \text{ 和 } \left|\sum_{k=n+1}^{k=+\infty} A_k z^k\right| < \delta$$

姑且如此，取$|\omega|=1$上一复值ω使得下列幂$\omega^{-1},\cdots,\omega^{-n'},\omega,\cdots,\omega^n$中无一值为1；于是

$$\sum F(r\omega^j) = (l+1)A_0 + \sum_{j=0}^{j=l}\sum_{k=1}^{k=n'} A_{-k} r^{-k}\omega^{-jk} + \sum_{j=0}^{j=l}\sum_{k=1}^{k=n} A_j r^k \omega^{jk} + \sum_j (\delta_j + \delta'_j).$$

其中$[|\delta_j|<\delta, |\delta'_j|<\delta]$，或者

$$\frac{1}{l+1}\sum_{j=0}^{j=l} F(r\omega^j) = A_0 + \sum_{j=0}^{j=n'} A_{-j} r^{-j} \frac{1-\omega^{-(l+1)j}}{(l+1)(1-\omega^{-j})} + \sum_{k=1}^{k=n} A_k r^k \frac{1-\omega^{(l+1)k}}{(l+1)(1-\omega^k)} \varepsilon$$

其中$\epsilon \leqslant 2\delta$，当$l$无限增长时，方程右边求和号下的表示式趋于零，而左边的和不超过g，因此，令$|A_0|=g+\epsilon'$，便有$\epsilon'<\epsilon$，且当n'和n充分大时，A_0可任意接近g。由于A_0的值不依赖于n和n'，立即导出$|A_0| \leqslant g$。

若令i是任一整数，并应用此定理于函数$F(x)x^{-i}$，则后者与前者之差别仅在于以gr^{-i}代替g和A_i代替A_0，因而有$|A_i| \leqslant gr^{-i}$.

定理 B[②] 令

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \sum_{\mathrm{k}} A_{\mathrm{k}} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}, (k_1, k_2, \cdots, k_m = -\infty, \cdots,$$

---

① 虽然魏尔斯特拉斯说“一致收敛”，但没有任何地方他精确的定义过这是什么意义。

② 为简化起见，我们将常写 i 和 k 以代替魏尔斯特拉斯所写的$i_1, i_2, \cdots, i_m$和$k_1, k_2, \cdots, k_m$.

∞)，其中 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 表复变量，而系数是给定的常数使得对非零项的值$(z_1, z_2, \cdots, z_m)$集级数是收敛的，若选取 $r_1>0, r_2>0, \cdots, r_m>0$ 使得$(z_1=r_1, z_2=r_2, \cdots, z_m=r_m)$在级数收敛区域之内部，则 $|F(z_1, z_2, \cdots, z_m)|$有一上界并以 g 表示之，对于值$(z_1, z_2, \cdots, z_m)$满足 $|z_1|=r_1, |z_2|=r_2, \cdots |z_m|=r_m$；然则命题

$$|A_i| \leqslant g r_1^{-i_1} r_2^{-i_2} \cdots r_m^{-i_m}$$

对每一组整数 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 成立。

证 由于所论幂级数对于满足 $|z_1|=r_1, |z_2|=r_2, \cdots, |z_m|=r_m$ 的量$(z_1, z_2, \cdots, z_m)$是一致收敛的，于是对任意 $\delta>0$，由假设可以删除有限多项，使得对于所有上述数组$(z_1, z_2, \cdots, z_m)$，余项和的绝对值小于 δ。

其次，以下式表示被删除的项之和

$$A_0+\bar{F}(z_1, z_2, \cdots, z_m)=\sum A_k' z_1^{k'_1} z_2^{k'_2} \cdots z_m^{k'_m}$$

我们有

$$|F(z_1, z_2, \cdots, z_m)|+\delta>|A_0|+|\bar{F}(z_1, z_2, \cdots, z_m)|$$

于是 $g+\delta>|A_0|+|\bar{F}(z_1, z_2, \cdots, z_m)|$。现设 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 是绝对值为 1 的量，但要求它们在 $\bar{F}(z_1, z_2, \cdots, z_m)$的每一项中，量 $\omega_1^{k'_1}, \omega_2^{k'_2}, \cdots, \omega_m^{k'_m}$ 至少有一个异于 1。

再以 $r_1\omega_1^{j_1}, r_2\omega_2^{j_2}, \cdots, r_m\omega_m^{j_m}$ 代替 $z_1, z_2, \cdots, z_m$，其中 $j_1, j_2, \cdots, j_m$ 为整数，它们的每一个独立地取值于 $0, 1, \cdots, l$。

由量 g 和 δ 的定义，对每一[整]向量$(j_1, j_2, \cdots, j_m)=J$，有

$$|g+\delta|>|A_o|+|\bar{F}(r_1\omega_1^{j_1}, r_2\omega_2^{j_2}, \cdots, r_m\omega_m^{j_m})|$$

因此

$$|g+\delta|>|A_0|+\left|\sum_J \frac{1}{(l+1)^m} F(r_1\omega_1^{j_1}, r_2\omega_2^{j_2}, \cdots, r_m\omega_m^{j_m})\right|$$

但可以指出表示式

$$\sum_J \frac{1}{(l+1)^m} F(r_1\omega_1^{j_1}, r_2\omega_2^{j_2}, \cdots, r_m\omega_m^{j_m})$$

当 l 无限增加时趋于极限值零。

这可直接导出,若给定的表示式写为下述形式

$$\sum_{k'} A_{k'} r^{k'_1} r^{k'_2} \cdots r_m^{k'_m} \left\{ \sum_{j_1=0}^{l} \frac{1}{l+1} (\omega_1^{k'_1})^{j_1} \sum_{j_2=0}^{l} \frac{1}{l+1} (\omega_2^{k'_2})^{j_2} \cdots \sum_{j_m=0}^{l} \frac{1}{l+1} (\omega_m^{k'_m})^{j_m} \right\}$$

以及注意到,对每个满足 $|\omega|=1$ 的复数 ω

$$\sum_{j=0}^{l} \frac{1}{l+1} (\omega^{k'})^j = \begin{cases} \dfrac{1-\omega^{(l+1)k'}}{l+1}, & \text{当 } \omega^{k'} \neq 1 \\ 1, & \text{当 } \omega^{k'} = 1 \end{cases}$$

和由假设在 $\bar{F}(r_1\omega_1^{j_1}, r_2\omega_2^{j_2}, \cdots, r_m\omega_m^{j_m})$ 的每一项中 $\omega_1^{j_1'}, \omega_2^{j_2'}, \cdots, \omega_m^{j_m'}$ 至少有一个异于 1。因此我们可以推出 $|A_0| < |g+\delta| - \delta'$,其中 δ' 是任意小。但函数 $\bar{F}(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ 亦能使 δ 取得任意小,因此 $|A_0| \leqslant g$。

然后若以 $z_1^{-j_1} z_2^{-j_2} \cdots z_m^{-j_m} F(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ 代替 $F(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ 且 $g r_1^{-j_1} r_2^{-j_2} \cdots r_m^{-j_m}$ 代替 g,则有 $A_{\mathrm{j}}| \leqslant g r_1^{-j_1} r_2^{-j_2} \cdots r_m^{-j_m}$。

由前面的定理 A 和 B,可以导出另一个特别重要的结果。

定理 C 给定一个正常的幂级数①序列

$$F_0(z_1, z_2, \cdots, z_m), F_1(z_1, z_2, \cdots, z_m), F_2(z_1, z_2, \cdots, z_m), \cdots$$

假设在点 $(0,0,\cdots,0)$ 的某个邻域 G 内②,这些级数的每一个以及它们的和绝对且一致收敛。令 $A_{\mathrm{k}}^{(i)}$ 表 $F_i(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ 中 $z_1^{k_1}, z_2^{k_2}, \cdots, z_m^{k_m}$ 的系数,再令 $\sum_i A_{\mathrm{k}}^{(i)} = A_{\mathrm{k}}$. 则可指出,若对给定的邻域中每

---

① 即是 $A_{\mathrm{k}} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}$ 的级数其中每一项的幂是非负(正)的整数,$\mathrm{k} = k_1, k_2, \cdots, k_m$.

② 一固定点 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 在 m 个变元 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 的域中之邻域是指具有下述性质的域:若 $(z'_1, z'_2, \cdots, z'_m)$ 是此域的任一点,则每一个满足下面条件之点 $(z''_1, z''_2, \cdots, z''_m)$ 亦为此域之点。$|z''_1 - a_1| \leqslant |z'_1 - a'_1|, |z''_2 - a_2| \leqslant |z'_2 - a_2|, \cdots, |z''_m - a_m| \leqslant |z'_m - a_m|$。例如,每个 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 的正常幂级数之收敛域即是这样的一个域(*k. W.*)。

一点 A_k 是有限的，则有 $\sum\limits_{i-0} F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)=\sum\limits_{k} A_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}\cdots,z_m^{k_m}$。

为证明此定理，取 m 个正数 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 使得点$(z_1=r_1,z_2=r_2,\cdots,z_m=r_m)$在 G 之内。

今若 K 为一固定正数，则可选一正整数 N 使得对每个满足条件$|z_1|\leqslant r_1,|z_2|\leqslant r_2,\cdots,|z_m|\leqslant r_m$ 的数组$(z_1,z_2,\cdots,z_m)$和每个正数 $n\geqslant N$ 有

$$\left|\sum_{i=n}^{\infty} F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)\right|<K/2$$

因此对每个数 $n'\geqslant n$ 便得

$$\left|\sum_{i=n}^{n'} F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)\right|<K$$

但

$$\sum_{i=n}^{n'} F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)=\sum_{k}\sum_{i=n}^{n'} A_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}\cdots z_m^{k_m}$$

因此由前面的定理，对每个整数组$(k_1,k_2,\cdots,k_m)$集 k 我们有

$$\left|\sum_{i-n}^{n'} A_k^{(i)}\right|<K r_1^{-k_1} r_2^{-k_2}\cdots r_m^{-k_m}$$

因此和 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A_k^{(i)}$ 有一确定之极限，并记为 A_k。

由此继续令

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} A_k^{(i)}=A'_k,\ \sum_{i=n}^{\infty} A_k^{(i)}=A''_k$$

且仅涉及满足下面条件的变元 $z_1,z_2,\cdots,z_m$

$$|z_1|,|z_2|,\cdots,|z_m|<r_1,r_2,\cdots,r_m$$

我们有

$$\sum_{k}|A''_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}\cdots z_m^{k_m}|<\sum_{k} K(|z_1|/r_1)^{k_1}\cdots(|z_m|/r_m)^{k_m}$$

从而

$$\sum_{k}|A''_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}\cdots z_m^{k_m}|<K\frac{r_1}{r_1-|z_1|}\cdot\frac{r_2}{r_2-|z_2|}\cdots\frac{r_m}{r_m-|z_m|}$$

因此级数 $\sum\limits_{k}|A''_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}\cdots z_m^{k_m}|$对所论之值$(z_1,z_2,\cdots,z_m)$绝对收敛，

又由于

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \sum_{k} A'_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}$$

故对下述级数亦成立

$$\sum_{k} A_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}$$

进而我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i(z_1, z_2, \cdots, z_m) - \sum_{k} A_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}$$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} F_i(z_1, z_2, \cdots, z_m) - \sum_{k} A''_k z_1^{k_1}, z_2^{k_2}, \cdots, z_m^{k_m}$$

因此

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} F_i(z_1, z_2, \cdots, z_m) - \sum_{k} A_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m} \right|$$

$$\leqslant K \frac{r_1}{r_1 - |z_1|} \frac{r_2}{r_2 - |z_2|} \cdots \frac{r_m}{r_m - |z_m|} + \frac{K}{2}$$

由于对 G 内每个固定点 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ 我们能选取 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 适应给定的条件，然后取 K 使得

$$K \frac{r_1}{r_1 - |z_1|} \cdot \frac{r_2}{r_2 - |z_2|} \cdots \frac{r_m}{r_m - |z_m|} + \frac{K}{2}$$

小于任意预先给定的量，所给方程左边的表示式不依赖于 K，因此得到

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i(z_1, z_2, \cdots, z_m) = \sum_{k} A_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m}$$

现设 $F_0(z_1, z_2, \cdots, z_m), F_1(z_1, z_2, \cdots, z_m), F_2(z_1, z_2, \cdots, z_m)\cdots$ 是 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 的单值函数并且满足下述条件：对所有在一连通域 G 内的数组 $(z_1, z_2, \cdots, z_m)$，级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i(z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

绝对且一致收敛。

若在G内取任一固定点$a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$并令$z_1=a_1+\widetilde{z}_1$[①]，$z_2=a_2+\widetilde{z}_2,\cdots,z_m=a_m+\widetilde{z}_m$，则每个函数$F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)$可表为$\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\cdots,\widetilde{z}_m$的正常幂级数，且存在点$(\widetilde{z}_1=0,\widetilde{z}_2=0,\cdots,\widetilde{z}_m=0)$的一个领域，在其内$\sum\limits_{i=0}^{\infty}F_i(a_1+\widetilde{z}_1,a_2+\widetilde{z}_2,\cdots,a_m+\widetilde{z}_m)$绝对且一致收敛，因此由前述定理，能表为$\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\cdots,\widetilde{z}_m$的幂级数。这就证明了在域$G$内和$\sum\limits_i F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)$是$z_1,z_2,\cdots,z_m$的单值解析函数。进而可得此函数是无穷次可微的且对$j=1,2,\cdots,m$

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\sum_{i=0}^{\infty}F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z_j}F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)$$

一般地有

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}}{\partial z_1^{\alpha_1}\partial z_2^{\alpha_2}\cdots\partial z_m^{\alpha_m}}\sum_{i=0}^{\infty}F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}}{\partial z_1^{\alpha_1}\partial z_2^{\alpha_2}\cdots\partial z_m^{\alpha_m}}F_i(z_1,z_2,\cdots,z_m).$$

(何育赞 译)

① 英译作$z_1=a_1+|z_1|,\cdots\cdots,z_m=a_m+|z_m|$.

88. 黎曼:论复变函数论基础

黎曼在他的博士论文《单复变函数一般理论基础》(Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Funktionen einer Veränderlichen Complexen Grösse,1851)中,给出了单值解析函数的严格定义,同时引进现在称为"黎曼曲面"的概念而创建了多值函数研究的宽广领域。黎曼后来在1857年又发表了4篇函数论方面的论文,主要研究黎曼曲面上的阿贝尔积分与阿贝尔函数。黎曼的工作开辟了复变函数论研究的新时代。

88.1. 黎曼论柯西-黎曼方程

黎曼定义复变函数 $f(z)=u+iv$ 在一点及其邻域内解析,如果 u,v 连续可微且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

上述方程在黎曼以前已为达朗贝尔、欧拉、柯西等学者所知,特别是柯西,指出这两个方程"包含了由实到虚过渡的全部理论",因此它们现在以"柯西-黎曼方程"而著称。但柯西实际上未能明确建立作为复可微性的解析性,黎曼使这两个方程真正成为复变函数论的基石。以下摘录黎曼博士论文中关于柯西-黎曼方程的论述,转译自 G. Birkhoff (ed.): A Source Book in Classical Analysis, pp. 48~50.

1

令 z 是一个实变量…。如果对于 z 的每个值对应着 w 的一个值,那么 w 称为 z 的一个函数。如果当 z 在一个区间上连续地变动时,w 也连续地变动,这个函数就称为在这个区间上是连续的。

这个定义显然不假定任何确定的规则来描述这个函数，因为一旦这个函数在一个给定的区间上被定义，它就可以被任意地延拓到该区间之外。

w 对于 z 的依赖性可以由一规则给出，对于 z 的每个值由这个规则确定 w 的相应的值。以前只考虑某类在一个给定的区间中对于 z 的所有值满足相同的依赖性规则的函数(用欧拉的术语，连续函数)。然而，近来的研究表明存在解析表达式，在一个给定的区间上任意连续函数可以用这样的表达式表示。因而，不管是任意地定义函数，还是用公式定义函数是完全一样的。由于上面所提到的定理，这两个概念是等价的。

然而，当 z 不局限于实值，也包含 $z=x+iy$(这里 $i=\sqrt{-1}$)形式的复数时，情形就不同了。

令 $x+iy$ 和 $x+iy+dx+idy$ 是 z 的相差无穷小的两个值，对应于它们的是 w 的两个值 $u+iv$ 和 $u+iv+du+idv$. 那么，…一般而言，比值 $(du+idv)/(dx+idy)$ 将随 dx 和 dy 而变。因为，如果令 $dx+idy=\varepsilon e^{i\varphi}$，那么

$$\frac{du+idv}{dx+idy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\frac{dx-idy}{dx+idy}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]e^{-2i\varphi}$$

但是，无论怎样通过一些简单的代数运算来确定作为 z 的函数的 w，导数 dw/dz 的值总是与 dz 的特定的值无关的①。显然，并非复变量 z 的每个复函数 $w=f(z)$ 具有这个性质。

对于由显式运算定义的所有函数所共有的特别的性质将被取作为下文的基础，然而我们将从下面的定义开始，而不把定义与由

---

① 在 w 具有以 z 为变量的表达式，可以通过形式地微商得到用 z 表示的 dw/dz 表达式的所有情形，这个论断显然可得到验证；在此将不讨论这个论断的普适性。——原注

显式运算定义的函数的概念相联系。

复变量 w 称为另一复变量 z 的函数[①]，如果它的变化使得导数 dw/dz 的值与 dz 的值无关。

2

令 z 和 w 是两个复变量。通过…空间直观，大致可以把它们在一个连通曲面上变化的情形表现得比较清楚。

把 z 的每个值 $x+iy$ 想象为由 z-平面中直角坐标为 x,y 的点 $P:(x,y)$ 所表示，w 的每个值 $u+iv$ 由复 w-平面的点 $Q:(u,v)$ 所表示，那么 w 对于 z 的每个函数依赖关系 $w=f(z)$ 将相当于一个…[映 P 为 Q 的映射]。

如果对于 z 的每个值对应着 w 的一个值，它随 z 连续地变动——换言之，如果 u 和 v 是 x 和 y 的连续函数——那么可以把 w 关于 z 的这个依赖关系想象为从 z 平面到 w 平面的一个连续映射。

我们现在来考察当 dw/dz 与 dz 无关时这个映射的一些性质。

令 p 是 z 一平面中 P 的邻域里的一个任意点，q 是它在 w-平面中的像，并令 $x+iy+dx+idy$ 和 $u+iv+du+idv$ 分别是这两个点的 z 和 w 的值。那么 dx,dy 和 du,dv 可以分别作为把点 P 和 Q 看作原点时点 p 和 q 的直角坐标，此外，如果记 $dx+idy=\varepsilon e^{i\varphi}$ 和 $du+idv=\eta e^{i\psi}$，那么量 $\varepsilon,\varphi,\eta,\psi$ 即为对于相同的原点而言的这些点的极坐标。这样，如果 p' 和 p'' 是点 p 的无限接近于 P 的任意两个确定的位置，并用相应的记号表示其它的变量，那么我们可以断言，在所给的假设下

$$\frac{du'+idv'}{dx'+idy'}=\frac{du''+idv''}{dx''+idy''},$$

因而[②]

① 用现代的术语，是解析函数。

② 原文把 $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}e^{i(\varphi'-\varphi'')}$ 误为 $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}e^{i(\psi'-\psi'')}$。

$$\frac{du'+idv'}{du''+idv''}=\frac{\eta'}{\eta''}e^{i(\psi-\psi')}=\frac{dx'+idy'}{dx''+idy''}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}e^{i(\phi-\phi')}$$

这导致 $\eta'/\eta''=\varepsilon'/\varepsilon''$和 $\psi'-\psi''=\phi-\phi'$。亦即，在三角形 $p'P\,p''$和 $q'Qq''$中，角 $p'p''$角 $\psi'P\psi''$和 $q'Qq''$必定相等，并且夹它们的边成比例。

这样，在 z-平面上的两个无穷小元素与它们在 w-平面上的像之间存在着相似性。例外…仅发生在比值 dw/dz 不是有界的这一特殊情形；在上面论及导数时隐含着有界性的假设①。

4

把导数 $(du+idv)/(dx+idy)$写成

$$\frac{(\partial u/\partial x+i\partial v/\partial x)dx+(\partial v/\partial y-i\partial u/\partial y)idy}{dx+idy}$$

人们即清楚地看到，此值与 dx 和 dy 无关，当且仅当

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\text{和}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

因而，这两个条件对于 $\omega=u+iv$ 成为 $z=x+iy$ 的[可微]函数是必要的和充分的。继而，这个函数的各个部分[实部与虚部]满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

这些方程提供了对于考察这种函数的[实和虚]部分的性质的基础。

（陆柱家 译　李志尧 校）

88.2 黎曼曲面

黎曼曲面也许是黎曼最富创造性的贡献，它使单变量单值解析函数的理论得以推广到多值函数，而在他以前，只有柯西等少数学者处理过（但未完全理解）多值函

---

① 关于这个主题参阅 C. F. Gauss，" Allegemeine Auflösung der Aufgabe; Die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. " Werke, IV, 189. ——原注

数。黎曼曲面的研究在拓扑学历史上也有重要意义。这一概念在黎曼的博士论文中已被提出。以下节录的则是黎曼 1857 年发表的两篇论文中关于黎曼曲面的论述，其中［A］取自《Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt verän derlicher Grössen》，刊于 Journal für reine und ang. Math. 54 (1857), pp. 103～104；[B] 取自《Lehrsätze aus der Analysis Situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien》，刊于同一期杂志 pp. 105～110。两篇论文原文亦载 H. Weber (ed.), B. Riemann's Gesammelte Mathematische Werke, pp. 83～89, 1876。本译文则转译自 D. E. Smith (ed.): A Source Book in Math. pp. 404～410.

［A］

对许多研究，特别是在代数函数与阿贝尔函数的研究里，以如下方式几何地描绘多值函数的分支模式是很有用的：我们想象另一曲面展布在(x,y)平面上方且与它一致（或一无限薄之物展布在平面上方），它延展至函数有定义的地方。随此函数的展拓，这曲面将进一步延展。在平面的一部分里存在两个或多个此函数的展拓，该曲面也将是双层或多层；在那里曲面将由两块或多块薄片所组成，每片代表函数的一个分支。围绕函数的枝点，曲面的一片能连续地进入另一片。所以在这类点的邻域里，曲面可看成是轴在此点垂直于(x,y)平面的螺旋面。如果当点 z 绕枝点几圈后函数又取到它的起始值（例如，$(z-a)^{\frac{m}{n}}$，其中 m 与 n 互素，点 z 绕点 a n 圈后），那么我们当然假定曲面的最高层连续地进入最底层而不与其它层相交。对这样描绘的分支模式所得曲面上的每一点，多值函数仅有一个确定值。因此这个函数可被认为是在此曲面中点的完全确定的函数。

[B]

在由全微分积分引出的函数研究里,有些属于拓扑学的定理几乎是不可或缺的。曾被莱布尼茨使用而并不完全同义的拓扑学这个名称能很好地指示连续实体理论的一部分,这部分理论处理的不是位置与其相互间可度量的存在性,而恰恰相反完全不管度量关系仅研究它们的局部和区域的性质。当我计划完整地介绍不考虑度量的论题时,在此仅以几何形式介绍一些为二项全微分的积分所必需的定理。

……

如果在曲面 F 上两族曲线,a 与 b,一起完全界住 F 的某部分,那么其它与 a 能完全界住 F 的某部分的曲线族 c 与 b 也能构成 F 的某部分的完全边界;这部分可由前两部分组合而成(视前两部分位于 a 的两侧或同侧而相加或相减)。两曲线族就构成 F 的某部分的完全边界而言是等效的,只要满足这一要求就可以互换①。

如果在曲面 F 上能画出 n 条闭曲线 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,它们本身及相互间都不能完全界住曲面 F 的某部分,但借助于任一另外的闭曲线都能构成 F 的某部分的完全边界,则称该曲面为 $(n+1)$-连通。

曲面的这一特征与曲线族 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的选取无关,因为任何

---

① [H. Weber 评注]。在此陈述的定理需要某些限制和进一步精确化,如同 Tonelli(Atti della R.. Accademia dei Lincei, Ser, I. Vol. 2, 1875. In an extract from the Nacbrichten der Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1875.)所指出的一样。

如果曲线族 a 与曲线族 b 同时也与曲线族 c 完全界住曲面 F 的某部分时,为使曲线族 b 与 c 也界住曲面的某部分,一般地讲要求曲线族 a 中无部分曲线已与 b 或 c 界住曲面的某部分。既使曲线族 a 与 b 及 a 与 c 界住的曲面都是单片,曲线族 b 与 c 所界住的那部分曲面却可能由多片组成。托内里(Tonelli)将其以如下方式描述:它是由曲线族 a,b 和 a,c 界住的所有曲面块中去掉边界含 a 且重叠的曲面块后剩下的曲面块所组成。

托内里给出一个直观的例来说明此关系,此例是由一点界住闭五连通双倍环面。

这些评注不影响黎曼利用此定理去定义 $(n+1)$-连通概念,因为这里的曲线族 a 总是仅有一条曲线。也就是说用曲线 b 替换曲线 a。

其他 n 条不能充分界住曲面 F 的某部分的闭曲线 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 当与另一条闭曲线合在一起时一定能完全界住 F 的某部分。

实际上，由于 b_1 与曲线族 a 合在一起时可完全界住 F 的某部分，它与用 b_2 换出 a 中某曲线后的曲线族一起也能界住 F 的某部分。因此任何闭曲线 c，也含 b_2，与 b_1 及 a 中换剩的 $n-1$ 条曲线一起构成 F 的某部分的完全边界。这样 c, b_1, b_2 以及这 $n-1$ 条曲线中的 $n-2$ 条曲线一起可界住 F 的某部分。正如所设，如果曲线族 b 不构成 F 的某部分的完全边界，这个替换过程明显地可继续进行直到曲线族 a 被曲线族 b 全部换出。

通过割线——即沿位于曲面内部、起始与终止点均在边界上的某曲线割开，$(n+1)$-连通曲面 F 可变为 n 连通曲面 F'。由切割引出的部分边界在进一步切割时也起边界作用，割线不能重复经过任一点但可终止于前面经过的点。

由于曲线 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不能构成 F 的某部分的完全边界，我们可以想象如果将 F 沿这些曲线切开，那么位于 a_n 两侧的曲面块一定含有不是曲线 a 的边界元素，因此它们属于 F 的边界。从而我们能在两侧曲面块中各画一条起于 a_n 中某点不与曲线 a 相交而终止于 F 的边界的曲线 q' 和 q''。这两条曲线连在一起构成曲面 F 的一条满足要求的割线 q。

实际上，在 F 沿割线 q 切开后的曲面 F' 上，曲线 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是位于 F' 内的闭曲线。它们不能界住 F 的某部分，因而也不能界住 F' 的某部分。然而位于 F' 内的任一别的闭曲线 l 与它们能构成 F' 某部分的完全边界，这是由于 l 与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可构成 F 的某部分 f 的完全边界。我们可以说明，a_n 不能出现在 f 的边界里；如若不然，不论 f 位于 a_n 的哪一侧，q' 或 q'' 将从 f 的内部到达 F 的边界点，也就是到达 f 外的点上，从而将切断 f 的边界与假设 l 及曲线 a 除去与 a_n 和 q 的交点外总位于 F' 的内部相矛盾。

曲面 F 沿割线 q 割开后的曲面 F' 就是所要求的 n-连通曲面了。

现在我们要说明，曲面 F 可被任何不使曲面分离的割线 P 割

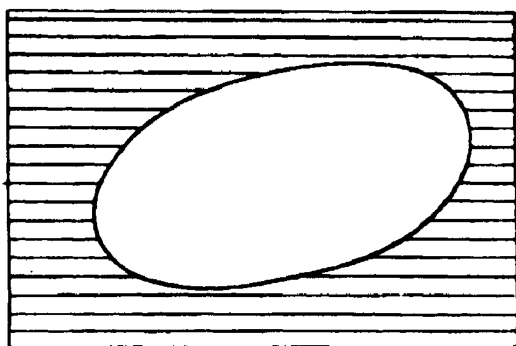


图 1

成 n-连通曲面 F'。如果相连于割线 P 两侧的曲面块是连通的，我们可从 P 的一侧 起在 F'的内部画一条曲线 b 返回到起始点的另一侧。在 F 内曲线 b 的起止点重合。但由于割线两侧都是曲面块的边界点，从而 b 不会构成曲面块的完全边界。因此我们能用曲线 b 替换曲线族 a 中的一条曲线后，使得曲线 b 与曲线族 a 中剩下的 $n-1$ 条曲线都在 F'里。如有必要，不论从哪里我们都能运用上面的证明手段导出 F'是 n-连通的曲面。

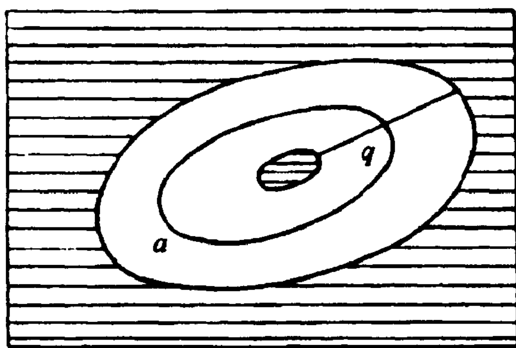


图 2

通过任何不使曲面分离的割线，我们可将$(n+1)$-连通曲面变为 n-连通曲面。

分割一次后的曲面可被新割线再分割。通过 n 条割线重复分割几次后，$(n+1)$-连通曲面将成为单连通曲面。为了将这些考虑应用于无边界曲面-闭曲面，我们必须通过任意一点的特殊化将它变成有界曲面；第一步分割借助于这点和起止于此点的割线，因此被一条闭曲线割开。例如可连通的环面，通过一条闭曲线和一条割线就能成为单连通曲面。

单连通曲面（图 1）可被其内的任一割线和任一闭曲线分割成两部分。闭曲线构成其中一部分的完全边界。

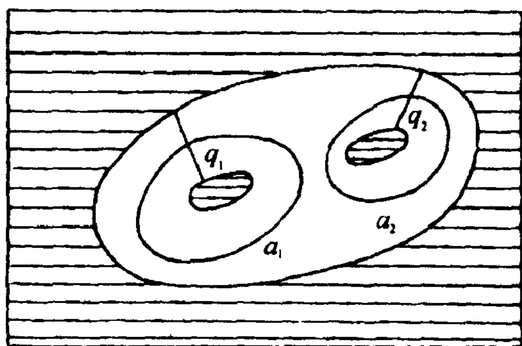


图 3

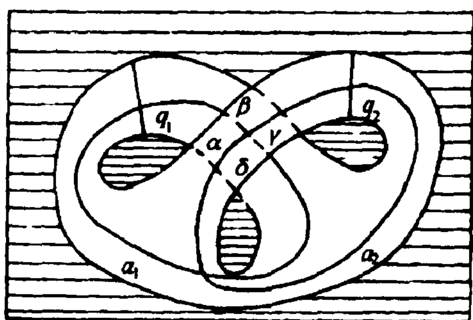


图 4

双连通曲面（图 2）可被任一不使曲面分离的割线 q 化为单连通曲面。曲面中任一闭曲线，借助于 a，可构成曲面某部分的完全

边界

在三连通曲面(图 3)中,任何闭曲线借助曲线 a_1 和 a_2 都能构成曲面某部分的完全边界。它可被一不使曲面不连通的割线分解为双连通曲面,及被两条此类割线 q_1 和 q_2 分解为单连通曲面。

图 4 所示曲面中区域 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是双层的。曲面含 a_1 的一臂可想象为位于另一臂之下。因此在图中用虚线表示。

(袁文俊 译　何育赞 校)

89. 格林:论位势函数

19 世纪分析在严格化的同时,更广泛地向其他科学渗透。同 18 世纪与力学结合的传统相比,一个新的应用领域是电磁学,这导致了整个 19 世纪数学物理的繁荣,并反过来给分析以新的刺激,位势论的产生就是这样的例子。

“位势”这一名称最先由英国数学家格林(George Green,1793～1841)创用。格林出身磨坊工人,靠自学成才。他在 1828 年私人印行的一篇论文《数学分析在电磁理论中的应用》(An Essay on the Applications of Mathemctical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism)中,发展了已由拉普拉斯、泊松等人引进的位势函数的一般理论,同时建立了许多关键的定理与概念,特别是后以他的名字命名的“格林公式”与“格林函数”,已成为现代分析与理论物理的基本工具,格林这篇文章在他去世十年后才正式刊登于克雷尔《数学杂志》(Jour. reine ang. Math. No. 39. 1850;No. 44,1852;No. 47,1854),以下选录的有关部分译自 N. M. Ferrers (ed.):Mathematical Papers of the Late George Green, pp. 19～27;pp. 31～32。Macmillan and Co. London, 1871.

§1. 作用于一给定点的所有电荷基元分别除以它们到该点的距离,然后求和,表示这个和的函数以非常简单的形式给出了整个带电体的吸引力。在本文中我们将致力于揭示该函数与带电物体中电荷密度之间的关系,并将所获得的关系应用于电学理论。

首先,我们来考虑一个任意形状的物体,上面按已知规律分布着固定电荷。设x',y',z'是该物体一体积元素的直角坐标,ρ'是该元素中的电荷密度,这样$dx'dy'dz'$就是元素的体积,$\rho'dx'dy'dz'$是它包含的电荷量;又设r'是该体积元素与体外一点p之间的距离,V是所有电荷基元分别除以它们到该点的距离然后相加所得的和,设p点坐标为x,y,z,则有

$$r'=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

和

$$V=\int\frac{\rho' dx'dy'dz'}{r'}$$

这里积分展遍所考虑的带电物体的每个元素。

拉普拉斯在《天体力学》(Mécanique Céleste)一书中已经证明:函数V满足方程

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0^{①}$$

因该方程以后将经常出现,我们把它写成缩写形式$\delta V=0$②,符号δ在本文中没有其它意义。

为了证明$\delta V=0$,我们只需注意:通过微分立即可得$\delta(1/r')=0$,因此若用V的每个元素来代替上述方程中的V,该方程成立;因此整个积分(被看作是所有这些元素的和)也将满足方程。当p点落在物体内部时,这一推理不再成立,因为此时V所包含的某些元素的系数变为无限大,故不一定能推出V满足方程$\delta V=0$,虽然其每个元素单独考虑时可能使方程满足。

为了确定V在物体内部任一点处的值,设想一个半径为a,包含p点的小球,球心与点p距离为b,a和b都是很小的量。这时V的值可以被看成由两部分组成,一部分是球本身的贡献,另一部分则是由整个球外物体所产生。显然,若用后一部分代替V,则δV

---

① 格林尚未采用偏微分记号,此处方程即相当于$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$,下同。

② 格林用δ表示现今文献中所用的∇^2,$\delta=0$即$\nabla^2 V=0$,下同。

等于零，因此我们只要对小球本身确定 δV 的值就行。这个值已知为

$$\delta(2\pi a^2\rho-\frac{2}{3}\pi b^2\rho)$$

ρ 是球内的电荷密度，从而等于 ρ' 在 p 点的值。现设 x_1,y_1,z_1 为球心坐标，我们有

$$b^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2$$

因此
$$\delta(2\pi a^2\rho-\frac{2}{3}\pi b^2\rho)=-4\pi\rho$$

于是在整个物体内部有

$$\delta V+4\pi\rho=0$$

在物体外部任意一点，由于 $\rho=0$，这时方程 $\delta V=0$ 可以看作是上述方程的特殊情形。

现设 q 是物体外部以 p 为端点的任一射线，那么 $-\frac{dV}{dq}$ = 一个正电基元沿 q 增长方向所受的推力。这是显然的，因为在 $-\frac{dV}{dq}$ 中以每个元素替代 V，将给出该元素沿 q 增长方向产生的力，所以 $-\frac{dV}{dq}$ 就给出 V 的每个元素所产生的力的总和，或者说在同一方向作用于 p 点的总力。为了说明这一事实当 p 在物体内部时也同样成立，像前述那样将 V 分为两部分，并设 p 点位于小球球面上(或 $b=a$)；那么该小球产生的力可表示为

$$\frac{4}{3}\pi a\rho(\frac{da}{dq})$$

da 是与 q 的增量 dq 相应的半径 a 的增量，当 $a=0$ 时这部分力显然将变为零，因此我们只需考虑物体球外部分的贡献，它显然等于

$$V-\frac{4\pi}{3}a^2\rho$$

但该量的一次微分当 a 趋于零时与 V 的一次微分相等，因此不论 p 点是在物体内部还是外部，它沿 q 增长方向所受的力总是由 $-\frac{dV}{dq}$ 给出。

虽然在上面的讨论中我们只涉及一个物体，但整个推理是一般的，同样适用于由任意多个物体组成的系统，包括在这些物体表面分布着有限量电荷的情形，显然对任何一个这样的物体内部一点 p 我们有

$$\delta V + 4\pi\rho = 0 \tag{1}$$

并且，沿以物体内部或外部一点 p 为端点的射线 q 的延长方向的力将同样由 $-\frac{dV}{dq}$ 给出，V 表示系统中所有电荷基元分别除以到 p 点的距离然后求和所得的函数，该函数以如此简单的形式给出电荷基元在任何位置受力的数值。由于它在下文中频繁出现，我们冒昧地称之为属于该系统的位势函数，它显然是所考虑的电荷基元 p 的坐标的函数。

……

§ 3．在着手推导物体表面电荷密度与这些表面（电荷仅限于分布于这些表面）内、外部相应的位势函数值之间存在的某些关系以前，我们首先要建立一条今后对我们非常有用的一般定理，这条定理可陈述如下①：

设 U 和 V 是直角坐标 x,y,z 的两个连续函数，其微分系数在一任意形状的固定物体内部任何一点都不会变成无限大，那么

$$\int dxdydzU\delta V + \int d\sigma U\left(\frac{dV}{dw}\right) = \int dxdydzV\delta U + \int d\sigma V\left(\frac{dU}{dw}\right)$$

三重积分展布于整个物体内部，关于 $d\sigma$ 的那些积分则展布于该物体的整个表面，而 $d\sigma$ 表示该曲面的曲面元素，dw 是与该曲面相垂直的无限小线段，方向由物体表面指向物体的内部。

为了证明这一定理，让我们考虑三重积分

$$\int dxdydz\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\right\}$$

利用分部积分可得

---

① 即著名的格林定理，其中所得恒等式现称格林公式。

$$\int dydzV''\frac{dU''}{dx}-\int dydzV'\frac{dU'}{dx}+\int dxdzV''\frac{dU''}{dy}-\int dxdzV'\frac{dU'}{dy}$$
$$+\int dxdyV''\frac{dU''}{dz}-\int dxdyV'\frac{dU'}{dz}-\int dxdydzV\left\{\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right\}$$

像通常一样,量上方的撇号表示这些量在积分界上的值,在目前情形就是在三重积分所展布的物体表面上的值。现在让我们来考虑相应于较大 x 值的部分 $\int dydzV''\frac{dU''}{dx}$. 容易看出,由于 dw 处处垂直于物体表面,如果 $d\sigma''$是与 $dydz$ 相应的曲面元素,我们将得到

$$dydz=-\frac{dx}{dw}d\sigma''$$

代换后得到

$$\int dydzV''\frac{dU''}{dx}=-\int d\sigma''\frac{dx}{dw}V''\frac{dU''}{dx}$$

类似地可以看出在相应于较小 x 值的部分 $-\int dydzV'\frac{dU'}{dx}$ 中有

$$dydz=+\frac{dx}{dw}d\sigma'$$

因此

$$-\int dydzV'\frac{dU'}{dx}=-\int d\sigma'\frac{dx}{dw}V'\frac{dU'}{dx}$$

于是,由于以 $d\sigma'$表示的元素和与以 $d\sigma''$表示的元素和在一起构成整个物体的表面,将上述两部分相加就得

$$\int dydz(V''\frac{dU''}{dx}-V'\frac{dU'}{dx})=-\int d\sigma\frac{dx}{dw}V\frac{dU}{dx}$$

这里假定关于 $d\sigma$ 的积分展遍整个曲面,dx 是与增量 dw 相应的 x 的增量。

用完全同样的方法我们将得到

$$\int dxdz(V''\frac{dU''}{dy}-V'\frac{dU'}{dy})=-\int d\sigma\frac{dy}{dw}V\frac{dU}{dy}$$
$$\int dxdy(V''\frac{dU''}{dz}-V'\frac{dU'}{dz})=-\int d\sigma\frac{dz}{dw}V\frac{dU}{dz}$$

因此前面给出的表达式中所有二重积分之和可以通过将刚才求出

的三个部分相加而得。这样我们就有

$$-\int d\sigma V\left\{\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dw}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dw}+\frac{dU}{dz}\frac{dz}{dw}\right\}=-\int d\sigma V\frac{dU}{dw}$$

其中 V 和$\frac{dU}{dw}$均表示在物体表面上的值,因此积分

$$\int dxdydz\left\{\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{dU}{dz}\right\}$$

借缩写符号 δ 就变为

$$-\int d\sigma V\frac{dU}{dw}-\int dxdydzV\delta U$$

因为刚才所得积分值当 U 和 V 互换时保持不变,显然它也可表示为

$$-\int d\sigma U\frac{dV}{dw}-\int dxdydzU\delta V$$

因此如果使同一个量的这两个表达式相等,并改变符号,我们就得到恒等式

$$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}+\int dxdydzV\delta U=\int d\sigma U\frac{dV}{dw}+\int dxdydzU\delta V \qquad (2)$$

于是定理完全获证,不论函数 U 和 V 具有何种形式。

我们在定理的陈述中假设了 U 和 V 的微分系数在所考虑的物体内部有限,这个条件的必要性在以上定理的证明中似乎并不明显,但在所用分部积分法中却表现得很清楚。

为了更清楚地说明这一条件的必要性,我们现在来确定:当两个函数之一(例如 U)在物体内部变为无限时,对公式应进行怎样的修正。我们假定它仅在某一点 p' 处变为无限,并设在该点附近 U 近似等于 $1/r$,r 是点 p' 与元素 $dxdydz$ 之间的距离。于是如果我们环绕 p' 作一半径为 a 的无限小的球,显然我们的定理可应用于该小球以外的整个物体,又因在球内有 $\delta U=\delta(1/r)=0$,三重积分仍被假定展遍整个物体,而这一假定所能引起的最大误差是一个与 a^2 同阶的量。另外,积分$\int d\sigma U\frac{dV}{dw}$相应于球面的部分为一与 a

同阶的无限小量，因此就只需考虑积分$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}$的相应于同一球面的部分，而因

$$\frac{dU}{dw}=\frac{dU}{dr}=\frac{d(1/r)}{dr}=-\frac{1}{r^2}=-\frac{1}{a^2}$$

所以当半径 a 趋于零时，这部分积分就变为$-4\pi V'$，于是方程(2)变为

$$\int dxdydzU\delta V+\int d\sigma U\frac{dV}{dw}=\int dxdydzV\sigma U+\int d\sigma V\frac{dU}{dw}-4\pi V' \quad (3)$$

像前面的方程一样，这里的三重积分也是展遍物体的整个体积，关于 $d\sigma$ 的积分则展布于它的外曲面上，而 V' 是 V 在 p' 点的值。

同样，如果函数 V 在物体内部某一点 p'' 变为无限，而在该点附近则近似等于$\frac{1}{r'}$，正如 U 在趋近点 p' 时的情形，由以上论述显然将得到

$$\int dxdydzU\delta V+\int d\sigma U\frac{dV}{dw}-4\pi U''$$
$$=\int dxdydzV\delta U+\int d\sigma V\frac{dU}{dw}-4\pi V' \quad (3')$$

所有积分与前面一样，U'' 表示 U 在点 p'' 的值，而在该处 V 变为无限。同样的过程可应用于函数 U 和 V 具有任意多个类似点的情形。

为简明起见，以下我们把使一个函数的微分系数变为无限的点称为该函数的奇异值，于是最初对 U 和 V 所加条件便可表述为：两函数在所考虑的固定物体内部都没有奇异值。

……

§5. 根据以上(§3.)所述容易证明，如果在任一闭曲面上给定了位势函数的值 $\overline{V}$[①]，那么有且仅有一个函数可以同时满足方程

$$\delta V=0$$

① 格林在这里用记号 $\overline{V}$ 表示 V 在曲面上的值。

和 V 在该曲面内部没有奇异值这一条件。因为由假设 $\delta U=0$，§3 方程(3)将变为

$$\int d\sigma\,\overline{U}\frac{d\,\overline{V}}{dw}=\int d\sigma\,\overline{V}\frac{d\,\overline{U}}{dw}-4\pi V'$$

在这个方程中,U 被假定在曲面内部只有一个奇异值即点 p'；在无限接近该点处,U 近似等于 $1/r$,r 是与 p'的距离。现在假设 U 的值除了满足上述条件外,在边界本身上等于零,那么我们有 $\overline{U}=0$,该方程将变为

$$\int d\sigma\,\overline{V}\frac{d\,\overline{U}}{dw}-4\pi V'=0$$

这说明若 $\overline{V}$(即 V 在曲面上的值)已知,则 V 在点 p'的值也就确定。

为了使我们相信确实存在如上所说的这样一个函数 U[①],设想曲面是一个接地的完全导体,在 p'点集中了一个单位正电荷,那么由 p'和它在曲面上的感应电荷所产生的位势函数就是所求的 U 值。因为由于传导曲面与地面之间的连通关系,在该曲面上的位势函数必为常数,并应等于地面本身的位势函数,即等于零(注意在此情况下它们实际形成一个导体)。因此若取这一位势函数为 U,显然我们得到 $\overline{U}=0$,$\delta U=0$,以及在无限接近 p'的地方有 $U=1/r$。另外由于该函数在曲面内部没有其它奇异点,它显然具有在前述证明中所规定的 U 的全部性质。

(李文林 译)

① 从上述可知,U 即现今文献中所称“格林函数”,以下格林指出该函数的物理意义。

90. 柯瓦列夫斯卡娅：论柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理

18,19世纪数学家们创立了大量类型的微分方程，但在许多情形下求显解的努力都归于失败，这促使他们转而证明解的存在性，从而推动了微分方程的理论研究。

柯西是考虑微分方程解的存在性的第一人，并对线性偏微分方程组初值问题解的存在性提供了证明方法(1842)。柯西的工作后来被杰出的俄国女数学家索菲·柯瓦列夫斯卡娅独立地发展为非常一般的形式(包括了拟线性与高阶组等情形)，关于偏微分方程解的存在唯一性定理在现代文献中就称“柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理”。柯瓦列夫斯卡娅(С. В. Ковалевская，1859～1891)生于莫斯科一个贵族家庭，1869年赴德国海德尔堡大学学习，一年后转到柏林成为魏尔斯特拉斯的学生。由于柯瓦列夫斯卡娅在偏微分方程论、阿贝尔积分及土星光环等方面的研究，格丁根大学1874年破例授予她博士学位，她成为历史上第一位女性数学博士。1883年应聘到瑞典斯德哥尔摩大学任讲师，次年任教授。她关于刚体旋转问题的研究荣获巴黎科学院鲍廷奖，1889年当选为俄国科学院通讯院士。以下选录柯瓦列夫斯卡娅的论文《偏微分方程理论》(Zur Theorie der Partiellen Differentialgleichungen)中关于柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理的论述，转译自 G. Birkhoff (ed.)：A Source Book in Classical Analysis, pp. 327～335. 柯瓦列夫斯卡娅的原文刊于 Jur. reine ang. Math. 80 (1875) s. 1～32.

引　言

给定一个代数微分方程

(1) $$G(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$$

其中 G 是自变数 x;待定的 x 的函数 y,以及 y 关于 x 的直到 n 阶的诸导数的多项式函数。

一旦给出一个解析函数的某个正规分支,那么这个函数就被完全确定了。因而,问题为用通常的方法确定一个幂级数

$$\sum_{r=0}^{\infty}b_r(x-a)^r/r!$$

其中 $a,b_0,b_1,\cdots$ 是常数,如果用这个级数代替 y,那么它将满足给定的微分方程(1),并且在点 a 的某个邻域①中收敛。

因而,如果在表达式 $G(x,y,dy/dx,\cdots,d^ny/dx^n)$ 中用这个级数代替 y,并把 G 按 $x-a$ 的幂展开,那么这个展开式的每个系数必须为零。

这样,首先得到 $a,b_0,b_1,\cdots,b_n$ 的一个方程

(2) $$G(a,b_0,b_1,\cdots,b_n)=0$$

此外,如果 y 是 x 的正规函数,那么 $G(x,y,dy/dx,\cdots,d^ny/dx^n)$ 的 λ 阶导数有形式:

$$G'(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})\frac{d^{n+\lambda}y}{dx^{n+\lambda}}+H_\lambda(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n+\lambda-1}y}{dx^{n+\lambda-1}})$$

其中 G' 表示 G 关于 d^ny/dx^n 的偏导数,H_λ 是 $x,y,dy/dx,\cdots,d^{n+\lambda-1}y/dx^{n+\lambda-1}$ 的一个有理多项式函数。这样,如果在上面说到的 $G(x,y,dy/dx,\cdots,d^ny/dx^n)$ 的展开式中 $(x-a)^\lambda(\lambda=1,2,\cdots,\infty)$ 的系数为零,那么对于 $\lambda=1,2,\cdots,\infty$ 必定有

(3) $$G'(a,b_0,b_1,\cdots,b_n)b_{n+\lambda}+H_\lambda(a,b_0,b_1,\cdots,b_{n+\lambda-1})=0$$

反之,如果方程(2)和所有的方程(3)都成立,那么对于 y 所得到的

① 在(1)中,G 只需是 d^ny/dx^n 的多项式即可;对于其他变量,它甚至不必是代数的。——原注

级数形式地满足方程(1)。

由诸方程(3),一旦 $a,b_0,b_1,\cdots,b_n$ 被确定,并且如果 $G'(a,b_0,b_1,\cdots,b_n)$[不为]零,那么下标超过 n 的每个系数 b_r 就唯一确定。

这样即导致下述命题:

如果用这样的方式任意选取常数 $a,b_0,b_1,\cdots,b_n$:使得方程

$$G(a,b_0,b_1,\cdots,b_n)=0$$

有一个单根 b_n,那么诸量 $b_{n+1},b_{n+2},\cdots$ 亦可被唯一确定,使得代替 y 的级数

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_r \frac{(x-a)^r}{r!}$$

形式地满足方程(1)。

这个级数总是在某个区域中是收敛的,并在这个区域中表示一个满足给定的微分方程的函数。此外,每个这样的级数定义了一个(单值或多值的)解析函数,此函数的各个正规分支也满足给定的微分方程①。

反之,满足给定的微分方程的每个解析函数有无穷多个可以由所指出的过程确定的正规分支,除非它是这个微分方程的奇解,即它满足给定的方程(1),还满足

$$G'\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

然而在这个情形中,为了确定函数 y,通过联立两个方程

$$G=0,\ G'=0$$

可以得到一个代数方程,或者一个 y 不是它的奇解的微分方程。

此外,当给出一个代数微分方程组(方程个数与未知函数个数相同,且未知函数含有单变量)时,求解未知函数有类似的命题。

这样一个方程组总可以化为下述形式:

---

① 这个命题的叙述最先出现于魏尔斯特拉斯的论文(Zur Theorie der analytischen Facultäten, J. reine ang. Math. 51(1855),43)中,之后很快即由 Briot 和 Bouquet 所证明(Journal de l'Ecole Polytechnique, no. 36)。当方程(1)的左端是一个可以展开为诸量 $x,y,dy/dx,\cdots,d^n y/dx^n$ 的一致收敛幂级数的单值函数时,此命题仍然成立。——原注

$$G'(x,y_0,y_1,\cdots,y_n)\frac{dy_1}{dx}-G_1(x,y_0,y_1,\cdots,y_n)=0$$

(5) $$\cdots$$

$$G'(x,y_0,y_1,\cdots,y_n)\frac{dy_n}{dx}-G_n(x,y_0,y_1,\cdots,y_n)=0$$

其中 $y_1,\cdots,y_n$ 是待定的函数，y_0 是一个辅助量，它通过不可约代数方程

(6) $$G(x,y_0,y_1,\cdots,y_n)=0$$

与 $x,y_1,\cdots,y_n$ 相联系，$G,G_1,\cdots,G_n$ 是 $x,y_0,y_1,\cdots,y_n$ 的多项式函数，G'是 G 关于 y_0 的偏导数①。

此时，如果对于 $\lambda=0,1,\cdots,n$ 令

(7) $$y_\lambda=\sum_{\mu=0}^{\infty}b_{\lambda,\mu}\frac{(x-a)^\mu}{\mu!}$$

并选取 $a,b_{1,0},b_{2,0},\cdots,b_{n,0}$，使得在求解 $b_{0,0}$时，方程 $G(a,b_{0,0},b_{1,0},\cdots,b_{n,0})=0$ 有一个有限的单根，记作 $b_{0,0}$，那么，当按 $x-a$ 的幂展开方程组(5)和(6)的左端的表达式，并令各个幂的系数为零时，可以唯一确定诸量

$$b_{0,1},b_{0,2},\cdots$$

$$b_{1,1},b_{1,2},\cdots$$

$$\cdots$$

$$b_{n,1},b_{n,2},\cdots$$

使得[级数组(7)]形式地满足方程组(5)和(6)。

再者，由此产生的 $n+1$ 个级数(7)也是局部收敛的；并且如果把 x 限制于这个[收敛]区域中，它们即表示确实满足所论方程的 $n+1$ 个函数。

这就提供了具有下述性质的一组(单值或多值)解析函数：它

① 雅可比在两篇论文(De investigando ordine systematis differentialium vulgarium cujuscunque，J. reine ang. Math. 64(1865)，237，和 De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocanda，Vorlesungen über Dynamik，Appendix，p. 55)中解释了如何把一个代数微分方程组化为这个“典则”(正规)形式。　原注

们的任何 $n+1$ 个正规的相互连通的分支也满足方程组(5)和(6)。

反之,如果 $n+1$ 个解析函数的一个函数组满足方程组(5)和(6),但并不同时满足方程

$$\frac{\partial G(x,y_0,y_1,\cdots,y_n)}{\partial y_0}=0$$

(即,除非它表示一个奇解…),那么,除了 a 的一些特殊的值外,这些函数的每组(它们有相互连通的元素)[①]可以表示为用上述方法形成的级数。

然而,通过把给定的方程组(5)和(6)与方程

$$\frac{\partial G(x,y_0,y_1,\cdots,y_n)}{\partial y_0}=0$$

联立,我们得到奇解。

这些命题取材于我尊敬的导师魏尔斯特拉斯(Weierstrass)先生的讲义。在本文中我将考察能不能,以及如何把它们推广到多变量解析函数组给出的代数偏微分方程组的情形。

I

我首先考虑下述偏微分方程组:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\sum_{\beta=1}^{n}G_{1,\beta}^{(1)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_1}+\cdots+\sum_{\beta=1}^{n}G_{r,\beta}^{(1)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_r},$$

(1) ……

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}=\sum_{\beta=1}^{n}G_{1,\beta}^{(n)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_1}+\cdots+\sum_{\beta=1}^{n}G_{r,\beta}^{(n)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_r},$$

其中 $x,x_1,\cdots,x_r$ 表示自变量,$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是这些自变量的待定函数,诸 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1\cdots,\varphi_n)$ 是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的函数,它们以在某个区域中收敛的通常的幂级数形式给出。为了简单起见,在下面我总是考虑多变量 $(x,x_1,\cdots,x_r)$ 的只包含正整数次幂的幂级数。作此假设后,下述一些命题成立:

A. 如果

---

① 参阅 § Ⅱ 的开始部分。——原注

$$\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{1,0},\cdots,\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{n,0}$$

是 n 个任意选取的幂级数，它们有一个公共的、即使是有界的收敛域，并且它们都在

$$(x_1=0,x_2=0,\cdots,x_r=0)$$

处为零，那么存在 n 个确定的 $(x,x_1,\cdots,x_r)$ 的幂级数，它们在 $x=0$ 时分别变为

$$\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{1,0},\cdots,\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{n,0}$$

并且，当它们替代 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 时形式地满足给定的微分方程组。

B. 这 n 个幂级数在某个区域中绝对收敛，并且表示一组确实满足微分方程组(1)的函数。

如果在方程组(1)中用形如[①]

$$\varphi_1=\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{1,0}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{1,\mu}\frac{x^\mu}{\mu!}$$

$$\cdots$$

$$\varphi_n=\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{n,0}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{n,\mu}\frac{x^\mu}{\mu!}$$

的诸级数分别代替 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$，那么，把每个方程的两端按 x 的幂…展开，首先即得到

$$\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{1,1}=\sum_{\beta=1}^{n}G_{1,\beta}^{(1)}(\varphi_{1,0},\cdots,\varphi_{n,0})\frac{\partial\varphi_{\beta,0}}{\partial x_1}$$

$$+\cdots+\sum_{\beta=0}^{n}G_{r,\beta}^{(1)}(\varphi_{1,0},\cdots,\varphi_{n,0})\frac{\partial\varphi_{\beta,0}}{\partial x_r}$$

$$\cdots$$

$$\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{n,1}=\sum_{\beta=1}^{n}G_{1,\beta}^{(n)}(\varphi_{1,0},\cdots,\varphi_{n,0})\frac{\partial\varphi_{\beta,0}}{\partial x_1}$$

$$+\cdots+\sum_{\beta=0}^{n}G_{r,\beta}^{(n)}(\varphi_{1,0},\cdots,\varphi_{n,0})\frac{\partial\varphi_{\beta,0}}{\partial x_r}$$

继而，诸函数[②]

---

① 这些式子中的 μ 在原文中以 r 表示。

② 此处的 μ 在原文中以 r 表示。

$$\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{1,\mu},\cdots,\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{n,\mu}$$

$[\mu=2,3,\cdots,\infty]$中的每一个被表示为 $\varphi_{1,0},\cdots,\varphi_{n,0}$关于 $x_1,\cdots,x_r$ 的某些导数的一个多项式函数，其系数是 $\varphi_{1,0}\cdots,\varphi_{n,0}$的幂级数。注意，后者的每个系数由诸表达式 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$中的有限个系数仅经过加法和乘法而构成。

这样，如果①

$$\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{1,0}=\sum\left(\varphi_{0,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(1)}\frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdots\frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}\right)$$

(2) $$\cdots$$

$$\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{n,0}=\sum\left(\varphi_{0,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(n)}\frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdots\frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}\right)$$

$$\mu_1=0,\cdots,\infty;\cdots;\mu_r=0,\cdots,\infty$$

并且如果令

$$(3)\qquad \varphi(x_1,\cdots,x_r)_{\gamma,\mu}=\sum\left(\varphi_{\mu,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(\gamma)}\frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdots\frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}\right),$$

$\gamma=0,\cdots,n;[\mu=1,\cdots,\infty;]\mu_1=0,\cdots,\infty;\cdots;\mu_r=0,\cdots,\infty,$

那么诸量 $\varphi_{\mu,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(\gamma)}(\gamma=1,\cdots,n;[\mu=1,\cdots,\infty])$中的每一个可表示为诸 $\varphi_{0,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(\gamma)}(\gamma=1,\cdots,n)$中的有限个以及 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$的系数的多项式函数，此外，如果令②

$$\varphi_\gamma=\sum\left(\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{\gamma,\mu}\frac{x^\mu}{\mu!}\right)$$

$$(4)\qquad =\sum\left(\varphi_{\mu,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(\gamma)}\frac{x^\mu}{\mu!}\cdot\frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdots\frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}\right)$$

$\gamma=1,\cdots,n;\mu=0,\cdots,\infty;\mu_1=0,\cdots,\infty,\cdots;\mu_r=0,\cdots,\infty$

那么给定的微分方程组被形式地满足。

为了证明这些级数在某个区域中都是绝对收敛的，现在我用另一有相同形式的微分方程组③

① 此处的 μ 在原文中以 r 表示。

② 为了协调记号，译文把原文从(3)至(4)这一段中以及下文中的某些 α 指标改为 γ。

③ 原文将式中的 $\overline{G}_{\alpha,\beta}^{(1)}(\psi_1,\cdots,\psi_n)$误为 $\overline{G}_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\psi_1,\cdots\psi_n)$.

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^{n} \overline{G}_{1,\beta}^{(1)}(\psi_1,\cdots,\psi_n)\frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{\beta=1}^{n} \overline{G}_{r,\beta}^{(1)}(\psi_1,\cdots,\psi_n)\frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_r}$$

(5) ……

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^{n} \overline{G}_{1,\beta}^{(n)}(\psi_1,\cdots,\psi_n)\frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{\beta=1}^{n} \overline{G}_{r,\beta}^{(n)}(\psi_1,\cdots,\psi_n)\frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_r}$$

代替给定的微分方程组，(5)中诸级数 $\overline{G}_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\psi_1,\cdots,\psi_n)$ 的各个系数是正的，且不小于 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ 中相应系数的绝对值①。同时，对于级数 $\psi(x_1,\cdots,x_r)_{\gamma,0}(\gamma=1,\cdots,n)$，代之以另一些级数 $\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{\gamma,0}$，它们的每个系数是正的，且不小于 $\varphi(x_1,\cdots,x_r)_{\gamma,0}$ 中相应系数的绝对值。那么，如果 $\psi_{\mu,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(\gamma)}$ 表示已经替代了 $\varphi_{\mu,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(\gamma)}$ 的表达式，由于后者由级数 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$ 和 φ_γ②的系数组成，显然得到：前者不小于后者的绝对值。因而，如果能证明诸级数 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 在某一区域中都收敛，这里

$$\psi_\gamma = \sum \left(\psi_{\mu,\mu_1,\cdots,\mu_r}^{(\gamma)} \frac{x^\mu}{\mu_1!} \cdot \frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!} \cdots\cdots \frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}\right)$$

$\gamma=1,\cdots,n;\mu=0,\cdots,\infty;\mu_1=0,\cdots,\infty,\cdots;\mu_\gamma=0,\cdots,\infty$，
那么同样的结论对于诸级数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 也成立。

为此，选取一个正数 g，使得当

$$\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_n=g$$

时，所有的级数 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ 都收敛，这总是能做到的。然后，还可以选取第二个正数 G，使得商 $G/[1-(\psi_1\cdots+\psi_n)/g]$ 按 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 的升幂展开时生成一个级数 $\overline{G}(\psi_1,\cdots,\psi_n)$，它的所有系数是正的，并且大于每个级数 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\psi_1,\cdots,\psi_n)$ 的相应系数的绝对值。

同样，可以选取两个正数 g' 和 ρ，使得由比

$$\frac{g'(x_1+x_2+\cdots+x_r)}{1-[(x_1+x_2+\cdots+x_r)/\rho]}$$

按 $x_1,\cdots,x_r$ 的升幂展开时生成的级数（我们用 $\psi(x_1,\cdots,x_r)_0$ 表示）的所有系数都是正的，并且大于每个级数

① 这是柯西的优函数方法。

② 原文误为 $\psi_{\alpha,0}$。

$$\psi(x_1,\cdots,x_r)_{1,0},\cdots,\psi(x_1,\cdots,x_r)_{n,0}$$

的相应系数的绝对值。

这时，如果在方程组(5)中替换级数：

$$\overline{G}^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}(\psi_1,\cdots,\psi_n)=\overline{G}(\psi_1,\cdots,\psi_n)$$

同时当 $x=0$ 时令每个函数 ψ_γ 都等于 $\psi(x_1,\cdots,x_r)_0$，那么刚才给出的诸条件都被满足。因而只需证明上面所定义的诸级数 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 在某个邻域中收敛即可。

但是，在所作的假设下所有的级数 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 都相等，并且只是 x 和 $(x_1+\cdots+x_r)/\rho$ 的函数。

这样，如果令

$$\psi=(\psi_1+\cdots+\psi_n)/g,\ y=(x_1+\cdots+x_r)/\rho$$

因而对于 $\gamma=1,\cdots,n$ 有 $\psi_\gamma=g\psi/n$，那么方程组(5)就化为单个偏微分方程①

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{a}{1-\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{6}$$

其中 a 是一个正常数.

还必须加上条件：当 $x=0$ 时 ψ 变为 $by/(1-y)$ 其中 b 也是一个常数。

方程(6)即断定在 ψ 和 $(1-\psi)y+ax$ 之间存在一种关系。注意到 $x=0$ 时 ψ 变为 $by/(1-y)$，可以完全确定这个关系。并且，ψ，x 和 y 满足方程

$$(1-\psi)y+ax=\frac{1-\psi}{b+\psi}\psi$$

由此得到

$$\psi=\frac{1-(1-b)y-ax-\sqrt{[1-(1+b)y-ax]^2-4abx}}{2(1-y)}$$

其中的根式按 x 和 y 的幂的展开式中第一项取为 1。

正如用上面讨论的方法展开 ψ 时立刻看到的那样，现在所得

---

① 原文将 $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ 误为 $\frac{\partial w}{\partial y}$。

到的 x 和 y 的幂级数有正的收敛半径，同时，它的系数都是正的。因而，通过代换 $y=(x_1+\cdots+x_r)/\rho,\psi$ 所生成的 $(x,x_1,\cdots,x_r)$ 的幂级数也有正收敛半径。这样，对于包含于这个区域中的 $(x,x_1,\cdots,x_r)$ 的每组值诸级数 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 肯定都是绝对收敛的。因而它们总有一个公共的收敛区域，并且如果把众变数 $(x,x_1,\cdots,x_r)$ 局限于该区域的某个小区域中，使得对于每个包含于其中的向量 $(x,x_1,\cdots,x_r)$，相应的一组 $(\psi_1,\cdots,\psi_n)$ 的值属于诸级数 $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$ 的公共收敛区域，那么级数 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 所表示的 $(x,x_1,\cdots,x_r)$ 的函数组满足所给的微分方程组，并且当 $x=0$ 时它们分别等于

$$\psi(x_1,\cdots,x_r)_{1,0},\cdots,\psi(x_1,\cdots,x_r)_{n,0}$$ ——证毕。

Ⅱ

现在我假设给出一个任意的写成

$$G(x,x_1,\cdots,x_r,\psi,\cdots,\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\psi}{\partial x^{\alpha}\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_r^{\alpha_r}})=0$$

形式的 n 阶代数偏微分方程，其中 G 是 $x,x_1,\cdots,x_r,\psi$，以及它的导数(其阶数为 $\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_r\leqslant n$)的一个多项式函数。在用这个方程来决定 ψ 时，可以假设在下述意义下 G 是不可约的：G 不是两个有相同形式的表达式的乘积。

……①

Ⅲ

即使上述微分方程不具有正规形式，仍可从它得到一个正规微分方程[通过一个下述形式的自变数的非异线性变换]

$$y=b+cx+c_1x_1+\cdots+c_rx_r$$

$$y_1=b^1+c^1x+c_1^1x_1+\cdots+c_r^1x_r$$

$$\cdots$$

① 柯瓦列夫斯卡娅把她在§Ⅰ中对于那里所叙述的一阶正规方程组的证明推广到高阶和高次(代数)偏微分方程(组)。

$$y_r = b^r + c^r x + c_1^r x_1 + \cdots + c_r^r x_r$$

…可以证明[所得到的方程]一般地确实包含 $\partial^r\psi/\partial y^r$ 项[①]。

（陆柱家 译　李志尧 校）

① 柯瓦列夫斯卡娅利用雅可比处理常微分方程(组)时所引进的框架对于她所考虑的一般的代数情形仔细地验证了此论断的正确性。在§Ⅳ中，她利用某些复杂的记号指出怎样把在§Ⅱ中给出的证明进一步推广到"任意的"代数微分方程组。在这个情形，应该对与正常解的包络相联系的"奇"解给予适当的注意，对于偏微分方程，它们是克莱罗(Clairaut)常微分方程 $y=xy'+f(y')$ 的奇解的类似物。

91. 庞加莱:论微分方程定性理论

19 世纪晚期,对各种类型常微分方程求解所引出的深刻理论问题的探讨,将常微分方程理论推向新的历程,这一历程中的重大发展几乎都与庞加莱的名字联系着。庞加莱与富克斯(I. L. Fuchs)、克莱茵等人共同发展了与奇点问题密切相关的常微分方程解析理论;常微分方程定性理论则完全是庞加莱的独创。庞加莱在行星轨道周期解与稳定性问题的刺激下建立了这一理论。他从1871 年起以同一标题发表的 4 篇论文——《关于由微分方程确定的曲线的报告》(Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle, 1881, 1882, 1885, 1886),是常微分方程定性理论的开山之作。以下选录第一、二两篇中的部分内容,转译自 G. Birkhoff(ed.): A Source Book in Classical Analysis: pp. 305～311,法文原文刊于 Jour. de Math. pures appl. 7 (1881), pp. 375～422 和 8(1882), pp. 251～296,亦载 Oeuvres de Henri Poincaré, 1, pp. 3～84, 90～162, Paris, 1916.

由微分方程所定义的函数的完整理论对纯数学和力学中的许多问题都是有用的。然而,在多数情况下,显然利用已知函数(例如求积分得到的函数)去积分这些方程根本不可能。因此,如果局限于那些可以通过有限或无限积分处理的情况,那么可研究的领域将非常有限,而且应用中出现的大量问题也将无法解决。

因此有必要研究微分方程所定义的函数本身,而不企图将其化简到比较简单的函数。这类似于我们研究代数函数时遇到的情形。先前人们试图将其简化为根式,而现在人们大都直接对其进行

研究；在积分代数积分方程时，也是如此，很长一段时间，人们都要求自己给出有限项的表达式。

这样看来，微分方程解的性质是一个极为有趣的问题。从这个角度入手，第一步是研究平面上某点邻域内函数的局部性质，这工作已初见成效。今天，问题的研究已扩展到对函数在“整个平面”上全局性质的分析。在这研究中，我们的出发点显然是基于在“平面给定区域”函数的局部性质。

对一个函数完整研究包括两个部分：

1. 定性部分，或者说该函数所定义的曲线的几何研究。

2. 定量部分，或者说该函数值的数值计算。

例如，在研究代数函数时，首先利用 Sturm 定理找到实根的个数，这是定性部分；接着计算这些根的数值，这就是对函数的定量分析。与此相似，在研究代数曲线时，首先构造出这条曲线，……，也就是，试图找出那些是分支，那些是闭曲线，那些是无穷分支，等等。经过对这曲线的定性研究之后，就能正确地确定出一定数量的点。

通过定性部分的研究，自然就可得到对每一个函数的分析，也就是为什么首先提出下面的问题：

构造微分方程所定义的曲线。

这步定性研究，一旦完成，将有利于函数的数值计算，也将有利于知道什么时候用收敛序列表示平面某一区域内的期望函数，什么时候主要困难是从平面的某一区域（在这里函数用某一序列表示）到平面的另一区域（这里函数用另一个序列表示）找到确定的导向曲线。

而且，定性研究本身也是非常有趣的。事实上，许多极为重要的分析和力学问题，都能简化为定性研究。例如，三体问题：人们可以问，是否三体之一将始终停留在天空的某一特定区域，或者，它是否会消退于无穷？也可以问，是否三体之某两体间的距离将无限地增大或减小，或者保持有界？……这种类型的问题可以问上一千个，然而一旦人们定性地构造出三体运动的轨道，它们将全部得到

解决。还有，如果人们考虑的是多个星体，在证明长轴没有长期变分等价于证明它总是在两个特殊极限间摆动之后，那么该系统中的某个星体的不变性问题除了是一个定性的几何问题外，还会是什么呢？

以上的问题，给几何学家展现了一个广阔的研究领域。在此，我不想面面俱到，而只想涉及它的前沿。我想把自己局限在一个非常特殊然而却最为自然的情形，即考虑一阶一次的微分方程。

以下，我考虑形如

$$dx/X=dy/Y$$

方程所定义的曲线，其中 X，Y 是关于 x，y 的多项式。我称这些曲线为特征曲线[①]。

位于特征曲线上的一点将该特征曲线（除非它是条闭曲线）分成不同的两个半特征曲线。这两个半特征曲线在以下的讨论中将起重要的作用。例如，设特征曲线为对数螺线 $r=e^{\theta}$；人们可以将它分成两个半特征曲线，第一个包含所有 $r<1$ 的点，第二个，包含所有 $r>1$ 的点。

最后，为了避免在研究无穷分支中可能遇到的困难，我们将假定所有曲线都能投影到球面上。令 P 为一平面，(x,y)是其上的一点。我们考虑一个被平行于 P 的平面截为两个半球的球面，该平面称为赤道平面，我们将球心和点(x,y)相连，由此得到的直线将和球面交于对径的两点；将位于上半球的点称为点$(x,y,1)$，位于下半球的点称为$(x,y,2)$。

平面 P 中的任一直线投影到球面上是一个大圆，因此，当我们说该特征曲线上位于某点处的切线时，是指和该特征曲线在该点相切的大圆弧。

每个大圆与赤道交于两点 W_1 和 W_2，过对径点 W_1 和 W_2 的大圆的方向角等于 W_1 和赤道上某一个定点间的弧。其斜率（角系数）等于方向角的正切。

---

① 现在，它们被称为解曲线。

最后，一条特征曲线的拐点是和大圆相切的点。

显然，在这些条件下，过球面上的每一点，除奇点外，有仅有一条特征曲线，并且其斜率由方程 $dx/X=dy/Y$ 给出。

所有的性质关于球心是对称的。

第一章　定义和一般性结论

在进一步讨论之前，有必要给出一些定义和一般性定理，它们在球面曲线的定性研究中将是非常有用的。

首先，我们考虑那些既没有二重点，又没有终点的球面曲线。

我们定义球面环线为球面上一条曲线，它在经过一段弧之后，又回到起始点。例如，一个小圆或一个大圆。

我们定义球面螺线为球面上一条曲线，它和任一条球面环线只交于一点。例如，斜驶线，它和一组平行线中任一条交于一点。

一条球面环线将球面分成两个部分，其一我们称为该环线的内部，另一个称为它的外部。从这两部分中的一个延伸到另一个中去的曲线不可能不和环线相交。

如果我们用除去端点外，完全不同的任一曲线的一段弧将特征曲线上的两个点连结起来，那么位于这两点间的特征曲线的弧，以及该曲线的弧将一起构成一条球面环线。

例如，当我们用一段大圆弧去连结一段小圆弧的两个端点时，这两段弧就构成一条闭环线。

这可能出现两种情形。

第一种情形。如果特征曲线上的某两点已用不同与特征曲线的任一曲线的一段弧连结起来，则特征曲线在这两点处的延拓所形成的两个曲线分支间属于特征曲线与该曲线在这两点间的两弧构成的环线的内部，或外部。

在此情形下，我们称该曲线弧上对着特征曲线弧。

例如，小圆弧的两个端点由一段大圆弧来连结时的情形就属于此。

第二种情形。如果特征曲线上的某两点已用某一条不同于特

征曲线弧连结，则特征曲线在这两点处的延拓所形成的两个分支中，其中有一个分支属于特征曲线弧与曲线构成的环线的内部，而另一个分支属于外部。

在此情形下，我们称该曲线弧下对着特征曲线弧。

例如，假定特征曲线为斜驶线，那末它将和某条子午线有无数多交点。在这些交点中，考虑相继的两个，并且想象，这两点一方面由斜驶线连结，另方面由该子午线的一段弧连结，此时，子午线的这段弧下对着斜驶线弧。

从环线的定义中，我们能立刻得到以下的结论：

1. 两条环线相交有偶数个或无数个交点。

2. 任一代数曲线均由一条或几条环线组成。

3. 任一代数曲线和环线相交，有偶数个或无数个交点。

定理 1 如果将一条既无二重点又无终点的特征曲线分成两条半特征曲线，并且其中一条半特征曲线和每一条代数环线的交至多有限个点，则该特征曲线是一环线。

事实上，我们构造满足下列条件的平面曲线 c，该曲线上任一点 β_i 的横坐标等于特征曲线上位于一个固定点 α_0 与到相应于 β_i 的点 α_i 间的弧长，而 β_i 的纵坐标是该特征曲线在点 α_i 的正切角。

1. 对于曲线 c 上一点 β_i 总有且仅有特征曲线上一个点 α_i 与它对应。

2. 如果该特征曲线没有不连续点，则曲线 c 也没有。

3. 对于特征曲线上的一点 α_i，曲线 c 上或者有一个点 β_i(如果该特征曲线不是一条环线)，或者有无穷多个点 β_i(如果该特征曲线是环线)和它相对应。

4. 曲线 c 和平行于 y 轴的直线相交，仅有一个交点。

5. 对于其中一条半特征曲线，曲线 c 的位于 y 轴右侧的部分和它相对应，对于另一条半特征曲线，曲线 c 的位于 y 轴左侧的部分和它相对应，把这些想法具体化，就是假定将定理条件中假设的那条与一条代数曲线交于有限个点的半特征曲线与曲线 c 的位于 y 轴右侧的半环线相对应。

[庞加莱依次考虑四种可能情形来证明该定理]

定义 一个复合环是指一条象环线一样封闭的,但却含有二重点的曲线。

例如,球面与在某点和它相内切的一个小圆柱的交线。

地形系统。如果过球面的任一点,有且仅有一条环线或者复合环线经过(球面上的一些奇点除外,因为没有环线经过这些点),则我们称该系统为地形系统,因为它类似于地面的等高线系统。

复合环中的二重点好比是山口;没有环线通过的那些奇点好比是山谷或山峰,因此,我们将这些点分别称为系统的山口,山谷和山峰[①]。

[第一章的其余部分是对上述这些思想的举例说明。在第二章中,庞加莱描述了微分方程 $dx/X=dy/Y$ 的所有可能的不同类型的一阶奇点,其中

$$X(x,y)=a_1(x-\alpha)+a_2(y-\beta)+\cdots$$

$$Y(x,y)=b_1(x-\alpha)+b_2(y-\beta)+\cdots$$

并且 a_1,a_2,b_1,b_2 不全为零。他给出结点的定义,用 $\mu(a_1+a_2\mu)=b_1+b_2\mu$ 定义的"对应层的双直线"是实的,并且广义积分 $Z_1^{\lambda_1}Z_2^{-\lambda_2}$ 为常数,其中 $Z_i=c_i(x-\alpha)+d_i(y-\beta)+\cdots$,并且 λ_1,λ_2 为正实数。当 λ_1,λ_2 异号时,他称该奇点为鞍点,当双直线为共轭复数时,该奇点称为焦点。

关于这些不同类型奇点的性质,庞加莱指出可参看柯西发表在"comptes rendus"第14～16卷上的"calcul des limites"(极限计算)的文章。]

第三章以下面的陈述作为开头。

定理2 每个特征系统都有奇点。

[庞加莱依次考虑了六种可能的情况后给出了庞加莱指标的定义。在此,我们将重复他的做法。]

一般情形。不失一般性,我们假定

① 现在将"col"译成鞍点。

1．多项式 X、Y 具有相同的阶数。

2．如果 X_2 及 Y_2 分别为 X 和 Y 的最高阶数，则 $xY_2-yX_2=0$ 不总是成立。

3．曲线 $X=0$ 及 $Y=0$ 相交，既不会有重点，也不会交在赤道上。

4．方程 $xY_2-yX_2=0$ 无重根。

在此情形下，赤道总是一条特征曲线，并且所有奇点都是第一类的。而且，不失一般性，我们可假定所有奇点将是结点，鞍点或者焦点。

奇点数显然是偶数。因为一切都是关于球心是对称的。

因此，奇点数目至少是 2。并且这种情形在以下两种考虑中都能出现：

1．曲线 $X=0$ 和 $Y=0$ 不相交，但齐次方程 $xY_2-yX_2=0$ 有仅有一个实数解。

因而我们得到位于赤道上的互为对径的两个奇点，并且可断言这两个奇点都是结点。为了证实这点，我们必须研究赤道上奇点的一般性质。

假定对 $t=\alpha, z=0$，我们有 $zX_1=Y_1-tX_1=0$ 及 $X\neq 0, Y\neq 0$①。

$$t=u+\alpha,$$

令 $X_1=z\rho_1+\lambda_0+\lambda_1\mu+\lambda_2\mu^2+\cdots+\lambda_m\mu^m$

$$Y_1=z\eta_1+\mu_0+\mu_1 u+\mu_2 u^2+\cdots+\mu_m u^m$$

其中 ρ_1 和 η_1 是 z 和 u 的多项式，λ 和 μ 为常数。

令
$$\lambda_2 u^2+\cdots+\lambda_m u^m=\rho_2 u^2$$
$$\mu_2 u^2+\cdots+\mu_m u^m=\eta_2 u^2$$

则
$$X_1=u^2\rho_2+z\rho_1+\lambda_0+\lambda_1 u$$
$$Y_1=\alpha^2\eta_2+z\eta_1+u_0+\mu_1 u$$

从而可得

① 庞加莱用≷表示“≠”。

$$Y_1 - tX_1 = z\rho_1 + u^2\rho_2 + (\mu_0 - \lambda_0\alpha) + (\mu_1 - \lambda_1\alpha + \lambda_0)u$$

其中 ρ_1, ρ_2 为 z, u 的多项式。注意到我们必须保证 $\mu_0 = \lambda_0\alpha$，从而微分方程必为以下形式：

$$\frac{dz}{-z(\lambda_0 + \lambda_1 u + z\rho_1 + u^2\rho_2)} = \frac{du}{(\mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0)u + z\theta_1 + u^2\theta_2}$$

其中 Q_1 和 Q_2 是 z 及 u 的多项式。

于是方程 $(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - b_1a_2 = 0$ 的根将是 $-\lambda$。和 $\mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0$，它们都是实根。

因此，赤道上的奇点或者为结点，或者为鞍点(赤道是一条特征曲线)。

若奇点是结点，充分必要条件是 $\lambda_0^2 + \lambda_0\lambda_1\alpha - \lambda_0\mu_1 > 0$。

当 $y = \alpha x$ 时，不等式的左端恰好是表达式

$$x^{-2m}\frac{d}{dy}(xY_2X_2 - yX_2^2)$$

将该表达式写在 $-d(\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x})/dy$；将不会改变其符号。也就是说，如果当 $\frac{y}{x}$ 的值由 $\alpha - \varepsilon$ 变到 $\alpha + \varepsilon$ 时，表达式 $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ 的符号由负变到正，则奇点 $\frac{y}{x} = \alpha$ 是一个鞍点；而如果表达式的符号由正变到负，则奇点 $\frac{y}{x} = \alpha$ 是一个结点。

根据以上的讨论，我们将开始一个新的讨论，它对我们的研究很有帮助。假定一个环线整个地位于某个半球，它将球面分成两个部分，其中完全属于某个半球的那个部分称为是该环线的内部。

如果一条环线整个地位于上半球面，一个动点在环线上移动，如果环线的内部在该动点的左侧，则说环正向运动。相反地，如果一条环线整个地位于下半球面，一动点在环线上移动，如果环的内部在该动点的右侧，则说环正向运动。

假定点在环上正向运动，我们来考虑斜率表达式 $\frac{Y}{X}$ 的变化情况。令 h 为表达式从 $-\infty$ 跳到 $+\infty$ 的次数；k 为表达式从 $+\infty$ 跳到

$-\infty$的次数。并且令 $i=(h-k)/2$，数 i 称为该环线的指标。

如果我们用一条全部位于环线内部的弧 AMC 来连结环线 $ABCDA$ 的两点 A 和 C，则环线 $ABCD$ 将被分解成两条环线 $ABCMA$ 和 $AMCDA$，显然有

$$\text{ind } ABCDA=\text{ind } ABCMA+\text{ind } AMCDA$$

因此，我们可以将关于任一环线指标的计算化成组成它的不同的无穷小环线的指标的计算①。

定理 3 任一条内部不含奇点的无穷小环线的指标数为零。

事实上，若该环线和曲线 $X=0$ 不相交，则 $h=0,k=0,i=(h-k)/2=0$。若该环线和曲线 $X=0$ 相交，则它和曲线 $Y=0$ 不相交；表达式 Y 始终保持同一符号，而 X 的符号一次从正变到负，一次从负变到正，从而 $h=1,k=1,i=(h-k)/2=0$.

类似地，如果曲线 $X=0$ 在环内有 m 阶重点，则有 $k=m,h=m,i=(h-k)/2=0$。

定理 4 若一条无穷小环线内部含有一个奇点，则其指标数为±1；并且如果该奇点是鞍点，则指标为$+1$，奇点为结点，或焦点时，其指标为-1。

事实上，令 $y-\beta=\rho\sin w, x-\alpha=\rho\cos w$，并且假定环线为$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2$，其中 ρ 是无穷小常数。

为了描述正方向运动的环，必须令 w 从 0 到 2π 变化。

现在姑且不考虑无穷小，而是回到上一章的记号上去，则有$\frac{Y}{X}=l(b_1+b_2\tan w)/(a_1+a_2\tan w)$，$X$ 将两次取 0 值，因为当 w 从 0 变到 2π 时，$a_1+a_2\tan w$ 两次)分别是在 w_o 和 $w_o+\pi$ 时取到 0 值，对于 $w=w_o-\varepsilon$，其中 ε 是无穷小数，我们有 $\tan w=\tan w_o-\zeta$，其中 ζ 是正的无穷小数。

因而我们有

---

① 庞加莱在此显然将球面看成是许多小的多边形的组合，其中每一个主多含一个奇点(或称临界点)。

$$\frac{Y}{X}=(b_1+b_2\tan w_o-b_2\zeta)/(a_1+a_2+\tan w_0-a_2\zeta)$$

注意到 $\tan w_o=\frac{-a_1}{a_2}$，并且如果和 $b_1+b_2\tan w_0$ 相比之下将 $b_2\zeta$ 项忽略的话，就有 $\frac{Y}{X}=(a_1b_2-a_2b_1)/a_2^2\zeta$。因此，如果 $a_1b_2-a_2b_1<0$，并且 $\frac{Y}{X}$ 在 $w=w_0$ 和 $w=w_0+\pi$ 处从 $-\infty$ 跳到 $+\infty$，则我们有：

$$h=2,k=0,i=(h-k)/2=1$$

如果相反，$a_1b_2-a_2b_1>0$，并且 $\frac{Y}{X}$ 在 $w=w_o$ 和 $w=w_o+\pi$ 处从 $+\infty$ 跳到 $-\infty$，则我们有：

$$h=0,k=2,i=(h-k)/2=-1$$

但，什么时候 $a_1b_2-a_2b_1$ 会大于零呢？让我们回到方程

$$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda)-a_2b_1=0$$

显然，若 $a_1b_2-a_2b_1>0$，只要方程的两根为虚根或者同号，即，只要该奇点是结点或焦点即可。相反地，若要 $a_1b_2-a_2b_1<0$，只要方程两根同为实根并且异号，即，只要该奇点是鞍点即可。

定理因而得证。

（纪　林 译　井竹君 校）

Ⅷ. 概率论、数理逻辑与计算机

概率论

92. 帕斯卡与费马:关于概率论的通信

概率论的起源之一是博奕问题。15～16 世纪意大利数学家帕乔利(Pacioli)、塔尔塔利亚(Tartaglia)和卡尔达诺的著述中曾讨论过“如果两人赌博提前结束,该如何分配赌金”等概率问题。1654 年左右,爱好赌博的法国人梅雷(A. G. C. de Méré)向帕斯卡提出了类似的合理分配赌金问题,引发了帕斯卡与费马之间探讨概率论问题的多封通信,他们用不同的组合方法给出了这类问题的正确答案。荷兰数学家惠更斯(C. Huygens,1629～1695)访问巴黎时了解到帕斯卡与费马的通信研究,对这类问题产生兴趣并著《论赌博中的计算》(1657),探讨概率问题的原理。这些数学家主要以代数方法计算概率,他们的著述中出现了第一批概率论专门概念(如数学期望)与定理(如概率加法、乘法定理),标志着概率论作为一门科学的诞生。以下选录 1654 年帕斯卡与费马讨论概率问题的两封通信(帕斯卡最初写给费马的信已不幸丢失),取自 OEuvres de Fermat, vol. Ⅱ ,Paris,1894,转译自 D. E. Smith (ed.):A Source Book in Math. pp. 546～554.

92. 1. 费马给帕斯卡的信(1654)

先生,

如果两人赌博时以掷八次骰子为一局,而在下赌注之后我与对方商定,我放弃掷第一次的机会,那么根据我的理论应该得到全

部赌金的 1/6 作为补偿[1]。

如果我继续放弃掷第二次的机会，就应得到所剩赌金的 1/6，即全部赌金的$\frac{5}{36}$作为补偿。

如果在第三次轮到我掷的时候，我仍然弃权，应该得到上次所剩赌金的 1/6 即全部赌金的$\frac{25}{216}$作为补偿。

如果我第四次弃权，就应得到第三次所剩赌金的$\frac{1}{6}$即全部赌金的$\frac{125}{1296}$。您说这就是假定掷了前三次以后第四掷的价值，我完全同意。

但您在来信的最后一个例子中说，如果我在赌博时（以掷八次为一局）要的是六点[2]，而连掷三次都没有得到这个点数。对手建议我不掷第四次，那我就该得到全部赌金的$\frac{125}{1296}$作为补偿。

按照我的理论，并非如此。因为在这种情况下，先前掷的三次什么也没得到，赌金总数未变，持有骰子而放弃掷第四次的人应得全部赌金的$\frac{1}{6}$作为补偿。

如果他已掷四次而没有发现期望的点数，双方商定他不再掷第五次，他依然应得全部赌金的$\frac{1}{6}$，因为赌金的总数依然如故。不管是从理论上说还是从常识上说，掷每一次的价值应该是相等的。

我急于知道，您是否同意我的理论，请来信赐教。我相信我们会取得一致意见的，或者仅仅在它的应用方面有些异议。

致以衷心的祝福。

费　马

---

① 这是因为骰子有六面，任何一面向上的可能性为 1/6。

② 即向上的一面是六个点。

92.2. 帕斯卡给费马的信(1654 年 7 月 29 日,星期三)

先生,

1. 我和您的急切心情是一样的,虽然还卧病在床,但抑制不住要告诉您,我昨天晚上从卡尔卡维(P. de Carcavi)手里接到了您关于点数问题[①] 的来信,我简直不知道用什么语言称赞这封信。我无暇详述,但可用一句话来概括,就是您已发现了如何在两个掷骰子的赌徒之间分配赌金的完善方法。看了您那令人信服的论述,我不再怀疑我犯了一个错误。对这一收获,我感到十分满意。

我认为,您关于点数问题的论述比关于骰子问题的论述更值得称赞。我已见过梅雷和罗贝瓦尔(G. P. Roberval)等几位先生关于骰子问题的解答,是梅雷先生向我提起这一问题的。但他从未发现点数问题的真正价值,也没有找到推导方法,所以我认为我是唯一知道这种比例的人。

2. 您的方法是正确的,而且是我所知道的这类问题研究中的首次正确答案。但由于在组合方面会遇到过多的麻烦,我找到另一种更加简洁的方法。我乐于在这里向您作一简单的介绍,因为我很希望在我们今后的讨论中开诚布公。若能取得一致意见,那将是十分愉快的事。我清楚地看到,无论在图卢兹还是在巴黎,真理都是唯一的。

下面给出在两个赌徒之间分配赌金的方法。例如每人投放 32 枚金币作为赌金,并以先得 3 分为赢。

假设第一个人已得 2 分,另一个人只有 1 分。他们掷下一次时,若第一个人赢了,他将得到全部 64 枚金币;若另一个人赢了,他们的比分是 2:2。如果在这种情况下分赌金的话,每人将拿回自己所下的赌金即 32 枚金币。

综上所述,第一个人如果赢了,64 枚金币将属于他;如果输

① 在赌博提前中断的情况下如何在两赌徒间分配赌金的问题被称为“点数问题”,而讨论持有骰子的人掷几次的问题被称为“骰子问题”。

了，32 枚金币将属于他。假如他们不希望继续玩下去而要分赌金的话，第一个人应该说："我一定能得 32 枚金币，即使我下一轮输了，也应把它们给我。至于另外的 32 枚金币，也许我得到它们也许你得到它们，机会是均等的。所以，在给我 32 枚金币之后，再让我们均分另外的 32 枚吧。"这样，他将得到 48 枚金币，而另一个人只能得到 16 枚。

现在假定第一个人得两分而另一个人是 0 分，他们正在争夺下一分。如果第一个人赢了，他将得到全部 64 枚金币。如果另一个人赢了，注意他们将回到前面的情况，即第一个人有 2 分而另一个人有 1 分。

但我们已说明了在这种情况下已有 2 分的人将得到 48 枚金币。所以，如果他们不希望继续赌下去的话，这人应该说："如果我赢了，我将得到全部 64 枚金币；如果我输了，48 枚金币将属于我。所以，请先把 48 枚金币给我，然后再均分这剩下的 16 枚金币，因为你我赢得它的机会是均等的。"于是，他获得金币的数目为

48 枚＋8 枚＝56 枚

现在假定第一个人有 1 分而另一个人为 0 分。先生请看，如果他们再掷一次而第一个人赢了，他与对手的比分将是 2 比 0。根据前述理由，56 枚金币将属于他。如果他输了，他们的比分就成为 1 比 1，32 枚金币将属于他。所以他应该说："如果你不打算赌下去，就请把我原来的 32 枚金币给我，再让我们把 56 枚金币的剩余部分均分。56 减去 32 为 24，让我们来平分这 24 枚金币吧。你拿 12 枚我拿 12 枚，再加上我原来的 32 枚，我一共应得 44 枚金币。"

请看，在这种情况下，通过简单的减法，就可以知道如果他赢了第一轮，他将从对方得到 12 枚金币；如果他继续赢得第二轮，将再从对方得到 12 枚金币；赢第三轮则得到 8 枚金币。

当然，我们还是别把这个问题搞得太神秘了，因为您总是希望问题明朗化的。实际上，我的目的是讨论下述观点的正确性：玩两

轮[1]的末轮价值(指从对方赌金中所得数目)是玩三轮的末轮价值的2倍,是玩四轮的末轮价值的4倍,是玩五轮的末轮价值的8倍,等等。

3. 但是掷末次之前的各次价值的比例就不容易发现了。我考虑了各种情况,终于找到了解决这类问题的方法。我想毫不掩饰地告诉您:当某人赢了第一轮后,不管他希望再掷多少次,都可发现掷第一次的价值。

例如,双方约定再掷8次[2]。前8个偶数和前8个奇数为

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

和 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15。

用下述方法乘偶数:第一个乘第二个,它们的积乘第三个,再乘第四个、第五个,依此类推。用同样的方法乘奇数:第一个乘第二个,它们的积乘第三个,等等。

以偶数的最后乘积作分母,以奇数的最后乘积作分子,这个分数便表示第一次的价值。这就是说,如果每个人的赌金数目是以偶数之积表示的,赢了第一轮而放弃以后8轮的人从对手赌金中得到的数目将是以相应的奇数之积表示的。如您所料,用组合方法证明这一点会相当麻烦,但我别无良策,只能用组合方法证明。下面就给出推导这一结果的一些组合命题,它们具有许多美妙的性质。

4. 对于任意个字母,如8个:

A, B, C, D, E, F, G, H。

您可以求出从8个字母中每次取4个的组合数,以及每次取5个字母、6个字母、7个字母、8个字母的组合数。这样将得到所有可能的组合。如果您把每次取4个字母的组合数的一半与更高的组合数[3]相加,其和将等于以2为首项,以4为公比的等比级数的第四项,项数4恰为8的一半。

---

① 即双方各掷两次定输赢,或者说两轮为一局。

② 即双方各掷8次,或者说玩8轮。

③ 更高的组合数,指每次取5个、6个直到取8个的组合数。

作为例子，我可用拉丁字母或别的字母表示，因为法文并没什么特别的好处。

例如对任意给定的 8 个字母

A， B， C， D ， E， F， G， H。

求出它们的所有组合数 —每次取 4 个，取 5 个，直到取 8 个。每次取 4 个的组合数的一半为 35(70 的一半)，把它与每次取 5 个字母的组合数(56)相加，再与每次取 6 个字母的组合数(28)相加，再与每次取 7 个字母的组合数(8)相加，最后与每次取 8 个字母的组合数(1)相加，其和等于以 2 为首项、以 4 为公比的等比级数的第 4 项。项数 4 为 8 的一半。

以 2 为首项、以 4 为公比的等比级数的各项为

2， 8， 32， 128， 512 等等。

在这个级数中，第一项是 2，第二项是 8，第三项是 32，第四项是 128。128 显然等于

35(每次取 4 个字母的组合数的一半)
+56(每次取 5 个字母的组合数)
+28(每次取 6 个字母的组合数)
+8(每次取 7 个字母的组合数)
+1(每次取 8 个字母的组合数)

5. 这就是我提出的第一个定理，它纯粹是一个算术问题。关于点数问题的其他有关理论如下：

假定以 5 轮为一局而某人已得 1 分，还差 4 分，整个赌博的输赢将由 8 次掷骰子决定，而 8 恰是 4 的 2 倍。

如果他在得 1 分后，放弃掷以后各次的机会，那么他除了拿走自己所下的赌金外，还可得到对手的一部分，其分子是每次从 8 中取 4 的组合数的一半(我取 4 是由于它与失去的机会相等，取 8 是由于它是 4 的 2 倍)，分母是分子与所有更高的组合数之和。

这样，如果我已得 5 分中的 1 分，对手赌金中的$\frac{35}{128}$就归我了。也就是说，如果他下 128 个金币的赌注，我将得到其中的 35 个，而

把余下的 93 个留给他。

但分数 $\frac{35}{128}$ 等于 $\frac{105}{384}$，后者的分母恰是(从 2 开始的连续 4 个)偶数之积，而分子恰是(从 1 开始的连续 4 个)奇数之积。

您只要略加思索，就可以毫无疑问地看清这一切，所以我认为不必再作进一步的讨论了。

6. 尽管如此，我还是要把我的一个旧表寄给您，我没时间抄它。在讨论问题时，我将参考这一表格。

您将很容易地看到，第一轮的价值等于第二轮，这一方法可用组合方法证明。

您还会发现第一行的数总是增加的，第二行、第三行的数也是这样。

但在此以后，第四行的数便递减了，第五行的数也如此。这是很奇怪的。

如果双方各下 256 个金币的赌注，而我在第 n 轮得分，对手金币中的如下数目将属于我[①]：

n \ m	6	5	4	3	2	1
第一轮	63	70	80	96	128	256
第二轮	63	70	80	96	128	
第三轮	56	60	64	64		
第四轮	42	40	32			
第五轮	24	16				
第六轮	8					

① 第 n 行 m 列的数表示 m 轮为一局而第 n 轮得分的情况下应得对方的金币数。

如果双方各下 256 个金币的赌注，而我在前 n 轮都得分，对手金币中的如下数目将属于我[1]：

n \ m	6	5	4	3	2	1
第一轮	63	70	80	96	128	256
前二轮	126	140	160	192	256	
前三轮	182	200	224	256		
前四轮	224	240	256			
前五轮	248	256				
前六轮	256					

7. 我没有时间在这里写出麻烦的证明，这个证明曾使梅雷先生大吃一惊，因为他虽有才华但毕竟不是一个几何学家（您知道这是一个很大的缺陷）。他甚至连一条数学上的直线可以无限分割也不理解，他认为直线是由有限个点构成的。我一直没能改变他的看法。如果您能做到这一点，将使他变得完美一些。

……

在我即将完成的一篇几何论文[2]中，我将把上述理论条理化，我已为这篇论文下了一些功夫。

8. 在这个题目下，我也作了些算术方面的工作，请不吝指教。

我首先提出一个人人可以接受的引理：从 1 开始的任意多个自然数所组成的连续级数（如 1，2，3，4）中，任何两个相邻数的乘积，等于较小数与它之前各数之和的 2 倍。例如

$$4\times5=2\times(1+2+3+4)$$

① 第 n 行 m 列的数表示 m 轮为一局而前 n 轮都得分的情况下应得对方的金币数。

② 可能是指莱布尼茨(G. W. Leibniz)见过的那篇论文的手稿，现已失传。

这就是说，A 与小于它的各自然数之和的 2 倍，等于

$$A\times(A+1)$$

现在给出定理：

如果从两个相邻自然数的立方差中减去 1，结果等于较小数中所含各数（即从 1 至该数的所有自然数）之和的 6 倍。

设 R 和 S 是相差 1 的两个自然数，且 S 小于 R，则 R^3-S^3-1 等于 S 中所含各数之和的 6 倍。

令 S 为 A，则 $R=A+1$，R 或 $A+1$ 的立方为

$$A^3+3A^2+3A+1$$

S 或 A 的立方为 A^3，R 与 S 的立方差为 R^3-S^3。所以

$$A^3+3A^2+3A+1-A^3=R^3-S^3$$

两边减去单位 1，得

$$3A^2+3A=R^3-S^3-1$$

根据引理，把 A 或 S 中所含各数之和加倍，等于 $A\times(A+1)$，即 A^2+A，所以 A 中所含各数之和的 6 倍等于 $3A^2+3A$。但

$$3A^2+3A=R^3-S^3-1$$

所以 R^3-S^3-1 等于 A 或 S 中所含各数之和的 6 倍。

没有人怀疑上述证明，但人们说他们并不这样做，因为人人习惯于现成的方法。对我本人来说，把它证明出来也无利可图，只是认为应该承认这是一个很好的证明。尽管如此，我还是期待着您的不同意见。我写出证明的目的就在于此。

9. 这里还有两个更困难的问题。我通过一条直线的立方与另一直线的立方相比较，证明了一个平面定理。我认为这是一个纯几何问题，而且是非常精确的。我通过这种方法解决了下述问题："任意给定四个平面、四个点或四个球，作一个球使之与给定的球相切，经过给定的点，或经过四个平面围成的四面体的顶点。"还解决了下述问题："任意给定三个圆、三个点或三条直线，作一个圆使之与各圆相切，经过各点或与三条直线围成的三角形外接。"

我在一个平面上仅仅用圆和直线解决了这些问题，但在证明

中使用了立体轨迹[①] ——抛物线和双曲线。尽管如此，由于图形建立在平面上，我坚持认为我的解是平面解。

真对不起，我的这封长信打扰了您，使您为我的叙述花了许多时间。我想，我们之间应该是无话不谈的，所以把自己的见解和盘托出。但愿您能知道我的内心对您是多么崇敬。祝我们之间的友谊不断增长。

（孔国平 译　严加安 校）

① 帕斯卡所谓立体轨迹（Solid Loci），实为圆锥曲线。

93. 雅各·伯努利:论大数定律

雅各·伯努利的遗著《猜度术》(Ars Conjectandi, Basel,1713)奠定了概率论作为一门独立数学分支的基础,其中首次提出了后来以"伯努利定理"著称的极限定理,刻画了大量经验观测中呈现的稳定性。伯努利定理作为大数定律的最早形式在概率论发展史上占有重要地位。以下摘录《猜度术》中有关大数定律的论述,转译自 James R. Newman (ed.): The World of Mathematics, vol. 3, pp. 1452~1455, Simon and Schuster, New York, 1956. 英译底本为 Oswald's Klassiker der Exakten Wissenschaften, Leipzig, 1899, nr. 108, "Klassische Stücke der Mathematik, …", pp. 90~95.

我们现在已达成这样的共识,好像无论对任何事件做出一个正确的推测,唯一必要的是先精确地计算事件的可能结果数目,然后确定其中某一结果比另一结果更可能发生的可能性有多大。不过,我们所面临的困难也随之产生,因为这种方法仅适用于极罕见的现象。实际上,这种方法几乎是那些与机会游戏相联系的现象所专有的,机会游戏的最初发明者通过固定导致赢和输的结果的数目,让这些结果事先已知,并安排游戏使每一结果发生都是等可能的方式,设计这些游戏,使得所有玩家都有相同的赢的机会。至于别的大量的属于由自然规律或人为意志所支配的现象,则决不是这种情形。例如,在掷骰子的游戏中,由于掷出各种点数的可能性与骰子的面一样多,这种游戏的可能结果(或掷出的各种点数)都已知。此外,当骰子的每一个面都具有相同的构造,而且骰子的质量是均匀分布时,所有可能结果的发生都是等可能的。(这种情况下,没有理由要求骰子的一个面比另一个面更容易发生,但是,如果骰子的各个面具有不同的构造,且骰子的一部分是用比其余部

分更重的材料做成的，则又另当别论）。类似地，从一个可能结果数目已知的坛子里取出白球或黑球，能够断言坛子里任何一个球都是等可能地被取出：因为知道坛子里每一类球有多少个，所以没有理由认为坛里这个或那个球应该比别的球更容易被取出来。然而，我要问，人能够查清不同年龄折磨人体的许多疾病，视它们为所有可能的结果，能说出某一种疾病比另一种疾病更可能致命的可能性有多大吗？比如瘟疫比浮肿，或者浮肿比发烧，并在此基础上，关于未来一代人生与死的关系做出预言吗？或者，谁能列举出每天大气层经历的不可数的变化，并由此预报今天，乃至未来一个月，或一年内天气情况？再者，谁能自称可以深刻地透视人的思维或人体的奇异结构，使得在游戏中完全或部分地依靠玩家的思维的敏捷性或身体的灵活性，大胆地预言这个或哪个玩家何时会赢或会输？这些或类似的预言依赖于完全不分明的因素。这些因素通过它们之间相互关系的无尽的复杂性，不断地欺骗我们的辨别力，使得试图沿着这条路线进行下去简直是无意义的。

不过，存在另一条途径，将引导我们去寻找所期待的结果。在不能确定一个"先验"时，至少使我们能确定一个"后验"。即从大量已观测到的例证的结果来确定这个"后验"，为做到这一点，必须假定在相同的条件下，一个事件发生（或不发生）遵从过去同类事件被观测到的相同规律。例如，我们观测具有相同体质和相同年龄的300人的生与死，结果在10年内有200人死亡，而其余的人还活着。这时，我们有确切的理由断言，有三分之二这样的人在十年内辞世的可能性相同，而其余三分之一的人则有机会生存长于10年。类似地，如果任何一个人观察了一年内各时期天气的变化情况，并记录下有多少晴天，多少雨天；或者反复观看两个玩家的局况，并留意两个玩家各自赢了多少次，于是，仅基于这些观测，在与过去相同条件的假定下，他就能确定相同结果在将来发生与否的比例。

这种通过观察来确定结果数目的经验方法既不是新的，也不是不常见的。在第十二章，仿效 L'art de penser 那位聪明而有天资

的作者[1]的，描述了一个类似的方法。在日常生活中，我们都能看到相同的原理在起作用。每个人都清楚，利用任何的单个观测作为基础来预言一些(未来)事件是不充分的，而应要求有大量的观测。一些例证表明，一个没有受过教育，以前也没有受过训练的人，凭天生的直觉，也会清楚地知道，可利用的有关观测的次数越多，发生错误的风险就越小。尽管我们都以非常自然的方式意识到这一点，但是，这个原理的科学证明却一点也不简单。因此，在此指出这一点是我义不容辞的责任。如果我仅限于证明这一任何人都熟悉的原理，我深感自己做的太少了。有些问题更需要考虑，而对人们来说，这些问题也许还没有想到。"所要探讨的是，是否随着观测次数的增大，记录下来的赞成与不赞成例数的比值接近真实比值的概率也随之不断增加，使得这个概率最终将超过任意确信度；"或者是否问题好像有一条渐近线。这将意味着存在一个特殊的确信度，通过任意增加观测次数，上述概率也不能超过这个确信度。譬如，我们不能确信已确定的结果的真实比值大于$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$或$\frac{3}{4}$。以下的解释将使我所说的含义更清楚：我们有一个罐子，里面装有3000个小白卵石和2000个小黑卵石，我们希望从经验上确定罐中白卵石与黑卵石的比例——我们不知道的事情，方法是从罐中将卵石一个接一个地取出，记录下取出了多少白卵石和多少黑卵石。(我提醒你们，这个取石过程的一个重要要求是，每次取出一个卵石，并记下其颜色，在取下一个卵石之前，把这个卵石再放回罐中，使得罐中卵石数量保持常数)。现在，我们问，是否可能通过无限扩大试验，比如做10次，100次，1000次等，取出的白卵石数目与黑卵石数目之比几乎(最终是"必然")和罐中的白卵石与黑卵石数目的真实比例取相同值(3：2)，还是取出的白卵石数目与黑卵石数目之比将取不同的值？如果回答是"不"，则我承认，试图通过观测来确定每个结果的例证数目(即白卵石和黑卵石的数目)可能

1 La Logique，ou L'art de penser，安托埃思·阿劳尔德和皮埃尔·尼科尔合著，1662年(根据帕斯卡手稿No.14)。事实上有两位作者，而伯努利在此仅提到一位。

要失败。通过这种方法，我们最终能够达到内心确信的必然性[①]……这时，我们几乎能很精确地事后确定例证的数目，好像我们事先知道这些数目似的。公理 9(在前一章提出的)表明，在我们的日常生活中，内心确信的必然性被看作是绝对的确定性，这种考虑能使我们对任何带有偶然性的事件可以做出预测，其科学性程度不比对机会游戏所做的预测差。例如，如果我们用大气层或人体来替代上面所说的罐子，在其内部隐藏着大量的各种各样的变化过程或疾病，就如同罐子里隐藏着卵石一样，这时，对这些现象，我们仍能够通过观测来确定其中某事件将比另一事件更频繁发生的可能性有多大。

应该指出，反映不同结果数目之间实际关系的比例——我们正试图通过观测来确定的比例——决不可能绝对精确地获得。这一点恐怕不完全能被理解。因为如果精确获得是可能的话，那么控制原理将与我所断言的相对立：即观测做得越多，我们发现正确比例的可能性越小。我们获得的比例仅是近似：它必须由两个限来定义，而这两个限能够相互接近到我们所期望的程度。在罐和卵石的例子里，如果我们取两个比例，301/200 和 299/200，3001/2000 和 2999/2000。或是任意两个类似的比例，其中一个稍小于 $1\frac{1}{2}$，而另一个，稍大于 $1\frac{1}{2}$，显然，通过大量重复观测所得到的比例将落在 $1\frac{1}{2}$ 这个比值的这些限之间，而不是这些限之外，且这些限能达到我们所期望的可能程度。

这正是在经过 20 年深思熟虑之后，我决定在此发表的问题。

……如果从现在直至永远，所有的事件都被连续地观测到(靠这点，可能性最终将变成必然性)，将会发现世界上每件事情发生都有着明确的原因和遵循明确的法则，甚至对看来相当偶然的事情，我们被强迫假定一定的必然性，似乎有点像命中注定似的。据

① 伯努利在下一章里证实了确实如此。

我所知，这正是柏拉图当时所断言的，依然普遍循环的教条，在经历无数的世纪后，每一事物将返回到它最初的状态。

（陈 敏译 冯士雍校）

94. 拉普拉斯:《概率的分析理论》绪论
——《概率的哲学导论》

雅各·伯努利之后,棣莫弗(A. De Moivre,1667～1754)、拉普拉斯、高斯、泊松(S. D. Poisson,1781～1840)等相继对概率论作出了进一步的奠基性贡献。其中拉普拉斯 1812 年出版的《概率的分析理论》(Théorie analytique des probabilités,Paris),实现了概率论研究中由组合技巧向分析方法的过渡,开创了概率论发展的新阶段。拉普拉斯(Pierre-Simon de Laplace,1749～1827)出生于法国诺曼第地区博蒙昂诺日一个贫寒的家庭,1766 年入卡昂大学学习艺术,因显露出数学才华,被他的两位教师推荐到巴黎从事数学学习和研究,1768 年在达朗贝尔帮助下谋得巴黎军事学院教职,1773 年选入巴黎科学院,开始了真正的科学生涯。在法国大革命的动荡时代,拉普拉斯在频繁交替的政权中担任过多种职务。拉普拉斯在科学上的主要成就涉及天体力学、宇宙论、分析和概率论等方面,他的五大卷《天体力学》(1799～1825)已成为整个科学史上的经典巨著。拉普拉斯在数学方面的贡献也多与天体力学或其他应用研究有关。他关于概率论的研究始于 1772 年,《概率的分析理论》是对前人及他自己研究成果的全面总结。该书运用 17,18 世纪发展起来的强有力的分析工具处理概率论的基本内容,使以往零散的结果系统化。正是在这部著作中,拉普拉斯给出了著名的概率古典定义,导出了原始形式的中心极限定理(后称棣莫弗-拉普拉斯极限定理),并将概率论广泛应用于观测误差估计、人口统计、保险等科学与社会问题。《概率的分

析理论》第2版(1814)中增加了一个长达150页的绪论,同年印成单行本,题为《概率的哲学导论》(Essais philosophique sur les probabilités),论述概率论定义、发展历史、概率计算的一般原理与应用,并阐明了概率论的重要概念——数学期望及其分析计算方法。这两部著作作为姐妹篇多次一起或单独再版。以下选录《概率的哲学导论》中的第二章"关于概率"和第三章"概率计算的一般原理",转译自 F. W. Truscott and F. L. Emory 的英译本:A Philosophical Essay on Probabilities, pp. 3～19. Dover Publications,Inc. 1951.《概率的分析理论》和《概率的哲学导论》法文原文可见:Oeuvres complétes de Laplace,vol. 7. Paris,1886.

第二章　关于概率

生活中发生的一切事件,甚至那些因无足轻重而被认为不遵从神圣的自然法则的事件,都如同太阳的公转一样是自然法则的必然产物。因为没有明白宇宙这个庞大体系中连接这些事件的每个环节,所以,它们的出现只好被视为有"终极原因"的。……但是随着人类知识的积累,那些主观臆断的所谓"终极原因"逐渐站不住脚了,而且在有说服力的哲学面前完全遭到了摒弃。哲学本身只是表明我们对真正原因的无知。

现在的事件和先前发生的事件被基于"万事皆有因"这一明显法则的纽带所连接。这一被称之为"充足理由律"的公理甚至推而广之适用于完全不在意的行动,即认为除非有确定的动机,人的自由意志是不可能的。如果有两个外部条件完全类似的场合,在一个场合下意志表现为主动,而在另一场合下,意志表现为被动,则这一意志的选择是无缘由的举动,此即莱布尼兹所谓的"伊壁鸠鲁学说信奉者的盲目的机会"。也有人认为意志是自由的行为,是不受特定动机制约的。我们认为,存在这种看法的原因可能是没有注意到在平凡的事件中,隐蔽在意志的选择之后的基本原因。

因此，我们应该把宇宙中现在的状态理解为过去状态规律地作用的结果，并且也是将来状态产生的原因。如果假设存在这样一种超常的智慧，它能了解使自然界运转的全部动力，以及构成自然界中每个物体的各自的位置，并且还能对它所知道的这些情况进行加工和分析，以致用一个公式就可把宇宙中最大的物体连同最小的原子的运动给出完整的描述，那末，在它看来，未来要发生的事跟过去已经发生的事一样，是一清二楚的。当然如果是这样的话，也就是没有什么不可确定的。但是，人类迄今为止天文学方面的知识同刚才我们说的那种情况相比，简直是太可怜了。欣慰的是，人类所具有的力学及几何学方面的知识，再加上所拥有的对宇宙引力的认识，已经使它能把自然界的运动（无论是过去的还是将来的，抑或现在的）统一在为数不多的若干个具有相互联系的表达式中。更为可贵的是，还能成功地运用它们去解释在自然规律作用下发生的现象。所有这些探索真理的努力使人类的智慧逐渐地接近于上面所说的大智大慧。可是，最终达到它是不可能的。人类所独有的知识不断趋于完善是人类高于动物的一个基本原因。另外，知识的不断丰富在不同的民族、不同的时代差别尤为显著，这也就是人类文明的辉煌所在。

让我们回想在古代，一场不合时令的暴雨，一次严重的干旱，一颗拖着长尾巴的彗星，以及发生过的日食、月食、极光等一切不平常的现象都被认为是上苍惩罚人类的先兆，于是人们便祈求上苍以避免各种各样灾难的降临。然而，却没有人祈祷行星和太阳停止运行，因为观察的结果表明这种祈求纯属枉然。不过，由于这些异常的现象一般的间隔周期都要经过很长一段时间，所以不管是否它们符合自然界的规律，人们都猜测这肯定是上苍不满人间的种种罪恶才制造这些异常现象以示其不满。1456 年，就在人们对土耳其刚刚推翻东罗马帝国的快速战绩感到震惊时，一颗在欧洲上空出现的拖着长尾巴的彗星无疑给人们又增添了恐怖的气氛。这颗彗星在出现四次以后，激发了人们的非常不同于以往的兴趣。在此之间，人们获得的关于宇宙运动情况的认识使它不再引起惊

慌，这是因为惊慌只表明人类对宇宙认识的匮乏，当哈雷发现1456年出现的彗星和1537年、1607年以及1682年出现的是同一颗，并且又预言它下次将会在1758年或1759年出现时，整个学术界都处在焦虑的等待中，因为预言的证实将意味着科学界中的一个很大的发现和对塞尼克[1]预言的应验。在谈到那些从天空中坠落下来的流星时，塞尼克曾说："可能是在经过了若干个世纪的探索，总会有那么一天，困扰人类的真相会昭然于天下，以致我们的后代会吃惊为什么真理那么容易从我们身边溜走。"此后克莱沃特开始着手木星和土星对彗星运动影响的研究，经过复杂的计算之后，终于确定了彗星要在1759年4月初在最靠近太阳的近日点上出现。这一预言最终被观察所证实。当然，在天文学中科学家们揭示的彗星运动的规律性无疑存在于其它一切现象中。

其实，单个空气或水蒸气分子的运动轨迹和行星运行的轨道一样是有规律可循的，只不过是人类缺乏对前者足够的认识。

概率部分地与这种无知有关，部分地依赖于我们的知识。倘若知道三件或更多的事件中总有一件会发生，然而又没有任何理由认为其中一件比其它事件更有可能发生，那么，在这种不确定的情况下，要说明哪一事件肯定会发生却是不可能的。但是，如果许多等可能情况都排除某一事件发生，只有一种情况有利于它的发生，那么，在这些事件中，随意地选取一件，则该事件不大可能出现。

机会的理论就是把同类的所有事件化归为一定数量的等可能情况，这里所说的等可能性，就是对于属同一类的事件，人们以同等程度不能判定哪种事件会发生，并且确定在哪些情况下被考虑的事件可能发生。可能发生的次数与总的次数之比就是对该事件出现的概率的一个描述。

上面关于概率的概念假设了概率是恒定的，即当总的试验次数增加时，该事件发生的次数也将增加，并且比值不变。为了说明这点，假设有两个罐子A和B，A中有四个白球和二个黑球，B中

---

① 古罗马哲学家、著作家、政治家。

有二个白球，一个黑球。假想A中有二个黑球用绳子连在一起，而当其中任何一个黑球被取到时，绳子就会自动断开，另外的四只白球同样用这种绳子连成两组。由于取到A中连在一起的两个黑球将意味着取了一只黑球，因此，若假想连接的绳子不会断开时，显然，这对取黑球的可能不产生任何影响，只不过是每回取到是两个球，因此，在两种情况下，从A中取一只黑球的可能性是一样的。而A中两两连在一起的三对球和B中的三个球并没有本质上的不同，由此便证实了本段开始的断言。

当某一事件在所有试验中都发生时，可能性事件就成了必然事件，它的概率等于1。在这种情况下，可能性与确定性变得可比了，尽管它们之间有着本质的不同，例如，当人们说某件事是事实时，它就被认为是实实在在的，而当人们说某件事发生的概率为1，那就意味着对它发生的断言还有修正的可能。

在只考虑可能性事件时，掌握信息材料的多少是对同一事件可能性看法不同的主要原因。例如，假设有三只罐子A，B，C，其中一个里面全是黑球，而其余两个里都是白球，求从罐C中抽一只黑球的概率。如果不知道哪只罐里装的是黑球，那我们就没有理由说一定是罐C而不是A或B，事实上，可能是三个罐中的任一个，此时，要求的概率为1/3。如果我们已知A中装的是白球，那么装着黑球的只可能是B或C，此时，要求的概率就变成了$\frac{1}{2}$。最后，如果已知A和B都装的是白球，那么，很明显，此时所求的概率就为1。

因此，关于某一事件的认识，听众的相信程度会因其知识面的宽窄而有所不同，如果对此事件报告的人的地位和品质使人能产生充分的信任感，而他本人对于所报告的内容又充满自信，那么无论他说得多么荒诞离奇，那些想得到信息的听众也会像听他平常讲话时毫不怀疑。但是，假如碰巧听众中的一位发现这人对该事件的陈述和另外一个同样值得信赖的人的陈述有出入时，那么他就会对此产生疑惑，聪明点的就会认为该事件不足为信，并且对此彻

底地不予考虑，而不管是否它已被证明或悖于自然界的法则。

总有那么一些人一向被大众誉为是博古通今，而且成了生活中重大事情思考并做出判断的主宰。可是，我们说，正是因为这种情况，他们的意见才成了种种谬误的根源，而这些谬误在人类的蒙昧时代竟禁锢了人类思想的自由发展，古时候常提出的魔法和炼丹术即是两个恰当的例子。这些错误思想在幼年时就被灌在头脑中，并且要求可以不加验证地采纳。大家都说它对，那么它就是对的，这种错误的思想持续了相当相当长一段时间。随着社会科学的进步，一部分具有远见卓识的人开始认识到这些谬误，而他们的观点通过模仿和习惯广泛传播，使那些谬误现在在一般人的心目中已不再存在了。这是精神世界里取之不竭的力量源泉，它可以在其中建立与原来具有同样信誉然而却观点截然不同的思想。所以，如果我们知道了看法上的差异往往囿于种种偏见时，我们就会没有理由不去关注与己不同的看法。因此，只有对自己观点和主张做出认真的检验和公正的评价之后，我们才能去教导那些被我们认为知识贫乏的人。

一般来说，不同的意见往往产生于对已有的信息的理解和使用上。在概率论中往往考虑一些如此微妙的问题，以致由同样的信息得到不同的结果是非常平常的，特别，对于那些复杂的问题尤为如此。下面考虑概率论中的一般原理。

第三章　概率论的一般原理

原理一　原理一是概率的定义，如前所述，它是有利情况的个数与所有可能情况个数之比。

原理二　假定所有情形都是等可能的，否则，则要先确定它们各自的概率（它们的精确估计正是机会理论中的一个难点所在），然后将每种有利情况的概率相加就是所求的概率。下面用一个例子来说明这个原理。

假设我们向空中抛一枚大且很薄的硬币，硬币的两面分别称为正面和反面，并且假定这两面完全相似，现在来考虑抛两次，硬

币落地时至少有一次正面朝上的概率，显然有四种等可能情况发生：前两次都是正面；第一次正面，第二次反面；第一次反面，第二次正面；两次都是反面。明显地，前三种情况符合要求。因此所求的概率为$\frac{3}{4}$。如果打赌的话，抛两次至少一次正面朝上的胜算为三比一。

在上面的游戏中，也可以把情况分作三类：第一次正面，而第二次可以是正面也可以是反面；第一次反面，第二次正面；最后一种情形，两次均为反面。按照达朗贝尔的说法，上面三种情况是等可能的，这样，要求的概率就成了$\frac{2}{3}$。但是，显然第一次出现正面的概率是$\frac{1}{2}$，而其他两种情况的概率分别为$\frac{1}{4}$，第一种情况做为一种简单事件，实际上是两个事件的复合：第一次正面、第二次正面以及第一次正面、第二次反面。如果按照原理二，把第一次正面的概率$\frac{1}{2}$和第一次反面、第二次正面的概率$\frac{1}{4}$相加，得到所求的概率为$\frac{3}{4}$，这和前面对它做两次抛处理所得结果一样。由此可见，先前的做两次抛分四种情况处理并未改变打赌者取胜的机会。这种做法目的仅仅在于使得不同的情况等可能地出现。

原理三　这是概率论中最重要的原理。概率论中最令人迷惑不解的是不同事件组合在一起，它们同时发生的概率为何时而增大，时而又减小。如果几个事件是相互独立的，那么它们同时发生的概率就是它们单个发生时概率的乘积。因以掷骰子掷出一点的概率为 1/6，掷两次掷出两个一点的概率就是 1/36。掷两次中，其中一掷的任何面都可以和另一掷的六个面相组合成一种情况，所以，两掷共有 36 种情形，但是，其中只有一种是两次掷出一点。一般来说，相同条件下，某事件连续重复若干次的概率等于该事件出现一次的概率的方幂，方幂指数等于重复的次数。由于一个真分数的方幂增大时，其值将不断地减小。因此，一种可能性非常大的事件，在多次重复的过程中连续发生就变得十分不可能。假想，某一

事故由二十名目击者以你传我、我传他这样的方式依次传下去。并且假设每一次传递的可信度为 9/10，则经过二十次后，可信度将不及 1/8。关于这样的可能性的衰减，有一个非常形象的比喻：物体发出的光在经过许多次镜面反射后就消失殆尽了。即使是为数很少的几面镜子的许多次的相继反射也足以将物体的形状消失，尽管其中任何一面镜子都可以给我们一个清晰的图像。历史学家对这种经过许多年代之后，事件可靠性的降低却很少给予足够的重视。基于这种事实，很多一直用最肯定的语气来描述的历史事件至少应该成为疑问。

在纯数学领域中，只要原理正确，那么由此得到的最间接的结论也被认为是正确的。例如微积分运用在物理学而得到的结论与事实或试验是完全相符的。但是在伦理学里，每个推断仅仅是以一种大概的方式从它的前提推出的。所以，无论这种推理看起来多么合理，错误产生的可能还是随着这种推理次数增加而增加。如此，最后得到的结论也就很可能不正确。

原理四 如果两个事件彼此相关，那么它们同时发生的概率等于第一个事件发生的概率乘以在第一个事件已发生的前提下，第二个事件发生的概率。因此，在前述的三个罐子 A，B，C 里（其中两个里面装的白球，另一个里面装的黑球），从 C 里抽取白球的概率为 2/3，假设如果已经从 C 中抽到了一只白球，那么只需在 A、B 中间判断哪个里面装了黑球。而从 B 中抽到白球的概率为$\frac{1}{2}$，此时乘积$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{3}$，就是同时从 B，C 抽两只白球的概率。

从这个例子中可以看到过去事件对将来事件概率的影响。最开始从 B 中抽取一只白球的概率为$\frac{2}{3}$；当已知从 C 中取出一只白球时，所求概率就变为$\frac{1}{3}$；而当已知从 B 中取出一只黑球时，可能事件就变成了确定事件，相应的概率为 0。现在根据以下的原理来确定这种影响，这一原理可以看作前一原理的推论。

原理五 如果我们预先已计算出某观察到的事件的概率以及

由该事件和另一待考察事件复合而成的事件的概率，那么第二个概率值除以第一个概率值就得出了待考察事件的概率。

这里的算法涉及到某些哲学家提出的已发生事件对将来事件发生的概率影响的问题。假设在抛硬币的游戏中，正面出现的次数总大于反面出现的次数，那么我们就要猜想是否在硬币的构造中有某种原因使硬币正面朝上的机会增多，这正像在生活中，老板倾向于雇佣随和的人一样。可是倘若环境是不可信赖的话，那么我们就会又回到原来那种不知所措的情形。例如，如果每抛一次硬币就换一枚，这样一来，过去的假设对将来不会产生任何影响，所以如果再考虑过去将被认为荒唐透顶。

原理六 如果导致某一被考虑事件的发生有各种原因，每种种原因的可能性设想为导致该事件发生的概率，(当然，这里必须假设所考察的始终是同一事件。)某种原因成立的概率是个分数，分子是该原因下该事件发生的概率，分母是所有相应原因下该事件发生的概率总和。如果先验地考虑一些非等可能的原因时，那么在计算分母时，不用该事件在每个原因下发生的概率，而必须用这一概率乘以该原因自身的可能性。这就是所谓的关于从事件过渡到原因这一机会的分析分支中的最基本原理。

这一原理解释了为什么我们认为有规律的事件是由特定的原因所致。某些哲学家认为规律事件发生远较其他事件发生的可能性要小。例如，在抛硬币中，连抛二十次均为正面本质上比正面、反面随机出现要难得多。然而，这种观察先假定了过去事件会影响到将来事件发生的可能性，而这点却是令人无法接受的。规则事件出现极少只是因为这类事件的数目本身就少。当发现了事物的某种对称性，并为此寻找解释时，与其认为对称性事件比其他事件来得少，不如说它是一个有规律的原因起作用的结果，要么就说纯属于偶然。(其实，多数情况下，我们更倾向于认为是前者。)例如在一张桌子上，我们看到字母的如下排列“Constantinople”，则会认为这种排列绝非偶然，这并非因为这种排列比其他排列出现的可能性要小。原因在于：如果这个词不出现在任何一种语言里，那么人们

将不会冒然断言它可能出于故意。问题是这个词是在我们当中被使用的，这样一来，上述的排列非常有可能是出于有意，而不是偶然。

下面来解释所谓的“离奇”。在人们的心目中，将所有的事件分为几类，包含事件很少的那类就被认为是“离奇”的一类。因此在抛硬币中，正面连续出现100次则被认为是离奇的。因为在连续100次的抛硬币中，会产生几乎无限多种可能的结果。如果把种种组合按一定次序进行排列，那还好理解；如果任它们无规则地排列地话，可想而知会出现多么复杂的结果。如果一个罐中装了一百万只球，只有一个是白的，其余全是黑的，而从中恰好取出这个白球，同样，这件事也被认为是离奇的，因为根据颜色只能把球分为两类。但是，从一个装有一百万个数的罐中抽出数字475813，看来是件平常的事，这是因为把字一个个地进行比较(而不将其分类)，则我们没有理由认为其中任何一个要较另外的早些出现。

通过上面的论述，一般地应该认为：越是“离奇”的事件，越应该寻找足够充分的理由去证实它的“离奇”。对于那种试图证明某事件离奇的人来说，他们的那种极容易骗人或被人骗的倾向是和他们要证明的事一样离奇的。当谈论到证据的确凿性时尤其应该注意这一点。

原理七　未来事件的概率等于所有导致该事件发生的原因的概率乘以在该原因下该事件发生的概率的总和。

设想一个罐中有两个球，每一个都可能是黑的，也可能是白的。取出一只球，并在取第二次前将它投入罐内，如果前两次都取的是白球，求第三次还取白球的概率。

只有两种可能的假设：两个球一白一黑；或者两个都是白的。第一种情况下，要求的概率为$\frac{1}{4}$，在第二种情况下，概率当然为1，利用原理六可知，对于这两种假设，它们的概率分别是$\frac{1}{5}$和$\frac{4}{5}$。然而在第一种假设下，第三次取白球的概率是$\frac{1}{4}$，在第二种假设下，

概率为1，从而，将这两个概率分别乘以相应假设的概率，然后求和为$\frac{9}{10}$，这就是要求的概率。

当某一事件发生的概率尚属未知时，可以假设它是从零到1的任一值，根据已知事件推断各种假设的概率(由原理六)是一个分数，分子是在此假设下该事件发生的概率，分母是在所有类似假设下该事件发生的概率之和。因此，在给定限制条件下某事件发生的概率，等于在该限制条件下，所有的上述分数之和。因此，如果在上述每一个分数上，再乘以相应假设下未来事件可能发生的概率，然后再对所有可能假设得出的概率求和，(根据原理七)此时得到的结果将是根据已发生事件得到的该未来事件发生的概率。所以，如果发现一个事件已经持续发生了若干次，那么它下次再发生的概率等于一个跟发生次数有关的数。考虑从五千年前或1826213天前开始算起，在此期间，太阳每隔24小时就要重新升起，那么赌太阳明天会升起的胜算肯定是1826214比1。但是，对于那些认识到在一些自然现象中太阳的升降主宰了时间和季节的更迭的人来说，他们相信现在不会有什么可以阻止太阳的运转。因此，在他们看来，太阳升起的胜算还应该更大得多。

蒲丰(Buffon)在他的《政治算术》(Political Arithmetic)中用不同的方法计算了上面的概率。他认为所求的概率等于一减去一个分数，该分数分子为一，分母为2的一个方幂，其次数等于在此期间所有发生过的日食的次数。我们说，这个结果之所以是不正确的主要原因在于这个大名鼎鼎的作者不明白过去事件和导致它原因及将来事件的可能性之间的真正关系。

(胡海潮 译　严加安 校)

95. 切比雪夫:论均值与一般大数律

19 世纪后期,极限理论的发展成为概率论研究的中心课题。1866 年俄国数学家切比雪夫发表的论文《论均值》(О Средних Величинах)在这方面迈出了决定性的一步。

切比雪夫在该文中从后来以他的名字命名的不等式出发,建立了关于独立随机变量序列的大数定律。切比雪夫大数律使伯努利定理和泊松大数律都成为其特例。翌年切比雪夫又推广棣莫弗—拉普拉斯极限定理,建立了有关各阶绝对矩一致有界的独立随机变量序列的中心极限定理。切比雪夫的成果后被他的学生马尔可夫(A. A. Марков,1856～1922)和利亚普诺夫(A. M. ляпунов,1857～1918)等发扬光大,深刻影响了 20 世纪概率论的发展进程。

切比雪夫(Пафнулий Львович Чебышев,1821～1894)生于俄国奥卡多沃一个贵族家庭。1837 年入莫斯科大学,1849 年获彼得堡大学博士学位,自 1846 年起长期执教于彼得堡大学,并在那里创建了一个风格鲜明的学派。除了概率论,切比雪夫的数学贡献还涉及数论、函数逼近论、变分法等许多方面。他关于素数分布的研究是对这一问题的本质推进。以下选录切比雪夫《论均值》一文,转译自 D. E. Smith (ed.):A Source Book in Math. pp. 581～587,英译本由 H. M. Walker 根据 M. N. de Khanikof 的法译本(载 Liouville's Jour. de Math. Pures et Appl. 2nd series, XII , pp. 177～184,1867)译出。俄文原文可见 A. A. Марков 等编切比雪夫《文集》(Сочинения, т. 1. СПБ. 1899)。

论均值

如果认可这样的说法，任何量的数学期望都可看作是它的所有可能取值乘以其相应概率的和，则我们容易建立一个非常简单的定理。该定理给出了包含任何量之和的上下限。

定理 如果我们用 $a,b,c,\cdots$ 表示量 $x,y,z,\cdots$ 的数学期望，用 $a_1,b_1,c_1\cdots$ 表示相应的平方 $x^2,y^2,z^2,\cdots$ 的数学期望，则对任何 α 和 $x+y+z+\cdots$，落在

$$a+b+c+\cdots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots}$$

和
$$a+b+c+\cdots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots}$$

之间的概率总大于 $1-\frac{1}{\alpha^2}$.

证明 令

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_l,$$
$$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_m,$$
$$z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n,$$
$$\cdots\cdots$$

是量 $x,y,z,\cdots$ 所有可能取值，

$$p_1,p_2,p_3,\cdots,p_l,$$
$$q_1,q_2,q_3,\cdots,q_m,$$
$$r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n,$$
$$\cdots\cdots$$

是 $x,y,z,\cdots$ 分别取这些值相应的概率，则 $x,y,z\cdots$ 和 $x^2,y^2,z^2,\cdots$ 的数学期望可表示为：

$$(1)\qquad \begin{cases} a=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_lx_l \\ b=q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3+\cdots+q_my_m \\ c=r_1z_1+r_2z_2+r_3z_3+\cdots+r_nz_n \end{cases}$$

$$
(2)\qquad \begin{cases} a_1 = p_1 x_1{}^2 + p_2 x_2{}^2 + p_3 x_3{}^2 + \cdots + p_l x_l{}^2 \\ b_1 = q_1 y_1{}^2 + q_2 y_2{}^2 + q_3 y_3{}^2 + \cdots + q_m y_m{}^2 \\ c_1 = r_1 z_1{}^2 + r_2 z_2{}^2 + r_3 z_3{}^2 + \cdots + r_n z_n{}^2 \\ \cdots\cdots \end{cases}
$$

由假设,$x,y,z,\cdots$取各种值的概率满足如下方程:

$$
(3)\qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l = 1 \\ q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_m = 1 \\ r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = 1 \\ \cdots\cdots \end{cases}
$$

借助于方程(1),(2)和(3),我们能简化如下表达式的和。

$$
(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu, \cdots
$$

$$
\lambda = 1,2,3,\cdots,l;\ \mu = 1,2,3,\cdots,\ m;\ \nu = 1,2,3,\cdots n
$$

实际上,展开上述表达式,我们有

$$
\begin{aligned}
& p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda{}^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots y_\mu{}^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots z_\nu{}^2 + \cdots \\
&\quad + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda y_\mu + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda z_\nu + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots y_\mu z_\nu + \cdots \\
&\quad - 2(a+b+c+\cdots) p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots x_\lambda - 2(a+b+c+\cdots) p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots y_\mu - \\
&\quad 2(a+b+c+\cdots) p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots z_\nu - \cdots + (a+b+c+\cdots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots
\end{aligned}
$$

将 $\lambda=1$ 到 $\lambda=l$ 分别代入上式,并求和,即得:

$$
\begin{aligned}
& q_\mu r_\nu \cdots (p_1 x_1{}^2 + p_2 x_2{}^2 + p_3 x_3{}^2 + \cdots + p_l x_l{}^2) \\
&\quad + (p_1 - p_2 + p_3 + \cdots + p_l) q_\mu r_\nu \cdots y_\mu{}^2 \\
&\quad + (p_1 - p_2 + p_3 + \cdots + p_l) q_\mu r_\nu \cdots z_\nu{}^2 \\
&\quad + 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \cdots y_\mu \\
&\quad + 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \cdots z_\nu \\
&\quad + 2(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l) q_\mu r_\nu \cdots y_\mu z_\nu \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad - 2(a+b+c+\cdots)(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \cdots \\
&\quad - 2(a+b+c+\cdots)(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l) q_\mu r_\nu \cdots y_\mu \\
&\quad - 2(a-b+c+\cdots)(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l) q_\mu r_\nu \cdots z_\nu - \cdots \\
&\quad + (a+b+c+\cdots)^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l) q_\mu r_\nu \cdots
\end{aligned}
$$

利用方程(1)、(2)、(3),用 $a_1 a_1$ 和 1 分别代替

$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots+p_lx_l$$

$$p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2+\cdots+p_lx_l^2$$

和 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_l$,

并代入前面的和式,我们得到如下公式

$$a_1q_\mu r_\nu\cdots+q_\mu r_\nu\cdots y_\mu^2+q_\mu r_\nu\cdots z_\nu^2+\cdots$$

$$+2aq_\mu r_\nu\cdots q_\mu\cdots+2aq_\mu r_\nu\cdots z_\nu+2q_\mu r_\nu\cdots y_\mu z_\nu+\cdots$$

$$-2(a+b+c+\cdots)aq_\mu r_\nu\cdots-2(a+b+c+\cdots)q_\mu r_\nu\cdots z_\nu-\cdots$$

$$+(a+b+c+\cdots)^2q_\mu r_\nu\cdots$$

对 $\mu=1$ 到 $\mu=m$,求上述表达式的和,并由方程(1),(2)和(3),用 b,b_1 和 1 分别代替

$$q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3+\cdots+q_my_m$$

$$q_1y_1^2+q_2y_2^2+q_3y_3^2+\cdots+q_my_m^2$$

$$q_1+q_2+q_3+\cdots+q_m$$

我们又得到如下表达式:

$$a_1r_\nu\cdots+b_1r_\nu\cdots+r_\nu\cdots+z_\nu^2+\cdots$$

$$+2abr_\nu\cdots+2ar_\nu\cdots z_\nu+2br_\nu\cdots z_\nu+\cdots$$

$$-2(a+b+c+\cdots)ar_\nu\cdots-2(a+b+c+\cdots)br_\nu\cdots$$

$$-2(a+b+c+\cdots)r_\nu\cdots z_\nu-\cdots+(a+b+c+\cdots)^2r_\nu\cdots$$

用相同的方法处理 ν,可得表达式

$$(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c-\cdots)^2p_\lambda q_\mu r_\nu\cdots$$

对 λ_1,μ,ν 的所有取值求和,等于

$$a_1+b_1+c_1+\cdots+2ab+2ac+2bc+\cdots-2(a+b+c+\cdots)a$$
$$-2(a+b+c+\cdots)b-2(a+b+c+\cdots)c-\cdots$$
$$+(a+b+c+\cdots)^2$$

展开上述表达式,则其和又等于

$$a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots$$

因此,表达式

$$\frac{(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c\cdots)^2}{a^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}p_\lambda q_\mu r_\nu$$

关于 $\lambda=1$ 到 $\lambda=l$，$\mu=1$ 到 $\mu=m$，$\nu=1$ 到 $\nu=n$ 求和等于$\frac{1}{\alpha^2}$。易见，从上述表达式的求和中去掉使得因子

$$\frac{(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}$$

小于 1 的项，而大于 1 的如上因子用 1 代替，则所得的新的和式将小于$\frac{1}{\alpha^2}$，而新的和式仅是由满足

$$\frac{(x_\lambda+y_\mu+z_\nu+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}>1 \tag{4}$$

的那些 $x_\lambda, y_\mu, z_\nu, \cdots$ 的值所对应的乘积 $p_\lambda q_\nu r_\nu$，所构成的和式。显然，新的和式表示 $x, y, z, \cdots$ 取值满足条件(4)的概率。

用 P 表示 $x, y, z, \cdots$ 的取值不满足(4)的概率，亦即

$$\frac{(x+y+z+\cdots-a-b-c-\cdots)^2}{\alpha^2(a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots)}$$

不大于 1 的概率，则 P 也表示和式

$$a+b+c+\cdots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots}$$

和

$$a+b+c+\cdots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots}$$

之间的概率。因此，注意到 $1-P$ 恰好表示 $x, y, z, \cdots$ 的取值满足(4)的概率，由前面的讨论知，P 满足

$$1-P<\frac{1}{\alpha^2}$$

等价地有

$$P>1-\frac{1}{\alpha^2}$$

此即所要证明。

如果 N 是量 x, y, z 的个数，在我们刚证明的定理中令

$$\alpha=\frac{\sqrt{N}}{t}$$

并用 N 除以和 $x+y+z+\cdots$ 及它的上下限

$$a+b+c+\cdots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots}$$

和

$$a+b+c+\cdots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2-\cdots}$$

我们将得到如下的关于均值的定理。

定理 如果量 $x,y,z,\cdots$ 和 $x^2,y^2,z^2,\cdots$ 的数学期望分别由 a，$b,c,\cdots$ 和 $a_1,b_1,c_1\cdots$ 表示，则不论 t 取何值，N 个量 $x,y,z,\cdots$ 的算术平均和它们相应的数学期望的算术平均的差不超过

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\cdots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\cdots}{N}}$$

的概率对任何 t 将都大于 $1-\frac{t^2}{N}$

由于分数 $\frac{a_1+b_1+c_1+\cdots}{N}$ 和 $\frac{a^2+b^2+c^2+\cdots}{N}$ 表示量 $a_1,b_1,c_1,\cdots$ 和 $a^2,b^2,c^2,\cdots$ 的均值，当数学期望 $a,b,c,\cdots$ 和 $a_1,b_1,c_1,\cdots$ 不超过给定的有限值时，不论 N 多大，表达式

$$\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\cdots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\cdots}{N}}$$

将是一有限值。因此，通过取 t 充分大，可使

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\cdots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\cdots}{N}}$$

充分地小。由于不论 t 取何值，如果 N 趋于无穷，则分数 $\frac{t^2}{N}$ 将趋于零。利用第二个定理，我们得到如下结论：

定理 如果量 $U_1,U_2,U_3,\cdots$ 和它们的平方 $U_1^2,U_2^2,U_3^2,\cdots$ 的数学期望不超过一给定的有限值，则 N 个这些量的算术平均和它们的数学期望的算术平均的差不小于某一给定值的概率，当 N 趋于无穷时，它趋于 1。

特别，我们假设量 $U_1,U_2,U_3,\cdots$ 取值为 1 或 0，视事件 E 在第一次，第二次，第三次…第 N 次试验中发生与否而定。注意到和式 $U_1+U_2+U_3+\cdots+U_N$ 表示在 N 次试验中，事件 E 发生的次数，

而算术平均

$$\frac{U_1+U_2+U_3+\cdots+U_N}{N}$$

表示事件 E 发生的次数与试验次数之比，为了对这一情形应用最后一个定理，我们用 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_N$ 表示事件 E 在第一次，第二次，第三次，…第 N 次试验中发生的概率，量 $U_1, U_2, U_3, \cdots U_N$① 和它们的平方 $U_1{}^2, U_2{}^2, U_3{}^2, \cdots U_N{}^2$ 的数学期望可表示为

$$P_1 1+(1-P_1)0, P_2 1+(1-P_2)0, P_3 1+(1-P_3)0, \cdots$$

$$P_1 1^2+(1-P_1)0^2, P_2 1^2+(1-P_2)0^2, P_3 1^2+(1-P_3)0^2, \cdots$$

因此，这些量的数学期望分别为 $P_1, P_2 \cdots, P_N$。故前 N 次试验的算术均值为

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\cdots+P_N}{N}$$

亦即概率 $P_1, P_2, P_3 \cdots, P_N$ 的算术平均。

由此并利用前面的定理，我们得到如下结论：

当试验次数趋于无穷时，试验中事件发生的概率的算术平均与事件发生的次数与试验次数之比的差不超过任意给定值的概率趋于1。

一个特殊情形是，试验中每次试验事件发生的概率为常数。这就是伯努利定理。

（陈　敏 译　冯士雍 校）

① 英文译本为 $U_1+U_2+U_3, \cdots +U_N$，按下文，应为 $U_1, U_2 \cdots, U_n$。

数 理 逻 辑

96. 莱布尼茨:关于符号逻辑的两份手稿

莱布尼茨毕生追求一种普遍的方法,使人们能"通过像算术与代数那样的演算来达到精确的推理"。早在1666年,他就发表过一篇论文《组合的艺术》(De Arte Combinatoria),阐述其符号逻辑思想,以后又多次补充、解释。莱布尼茨使逻辑数学化的方案,后以"通用演算"(Characteristica Universalis)著称,他在1690年左右完成的两份拉丁文手稿中给出了这种演算的最后形式,其中引进了逻辑"恒等"、"蕴含"及逻辑"加"、"减"等等,代数符号及运算被直接用来表述逻辑演绎关系。这两份手稿清楚地表明了莱布尼茨作为现代数理逻辑先驱的地位。以下选录莱布尼茨的这两份手稿。莱布尼茨一生写有大量手稿,但正式发表很少。这里的译文转译自 H. O. Midonick (ed.): The Treasury of Math. pp. 435~445,英译本由 C. I. Lewis 根据 C. I. Gerhardt (ed.): Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, Ⅷ. 'Scientia Generalis, Characteristica', xix, xx, Hildesheim, 1960~1961 拉丁文本译出。

XIX 抽象论证中的典范①

定义 1 两个项是相同的,如果用一个代替另一个而不改变语句的真伪。设有 A 和 B 且 A 在某些真命题中出现,在 A 的所有

① 手稿中有此标题,莱布尼茨后来将其划掉。虽则自负,但它极好地表达了本片断及下一片断的意旨。

出现之处均以 B 代换之后所产生的新命题仍然是真的，并且所有这样的命题都能够这样做，则称 A 和 B 是相同的；反过来，如果 A 和 B 是相同的，它们就可以，像我们所说过的一样，互相代替。相同的项也叫做重合；当然 A 和 A 是相同的，但如果 A 和 B 是相同的；就称它们重合。

定义 2 不是相同的项，也即不总是能够互相代替的项是不同的。因而有

推论 不是不同的项就是相同的。

特征表示[①]**1** $A=B$ 表示[②] A 和 B 是相同的或重合。

特征 2 $A\neq B$[③]，或 $B\neq A$，表求 A 和 B 是不同的。

定义 3 如果把若干项放在一起的复合与另一项重合，则称复合中的任一项被包含于或位于与该复合重合的另一项中，这另一项就叫做包含者。反之，如果某一项被包含于另一项中则它将是放在一起时与该另一项重合的某一复合的一项。例如，如果 A 和 B 放在一起时与 L 重合，则称 A，或 B，是内在的或被包含者；称 L 是包含者。有时候，也会出现被包含者与包含者重合的情况。例如，设(A 和 B)$=L$，且 A 和 L 重合，此时，B 将不包含不同于 A 的任何东西……[④]

评注 不是每一内在的事物都是一个部分，也不是每一个包含者都是一个整体，例如，一内接正方形和一直径都在一圆内，该正方形当然是圆的某一部分，但直径就不是圆的一个部分。那么，关于整体和部分的概念就必须多说几句以获得明确的解释，不过，这里不是合适的地方。对于那些并非部分的东西，它们不仅可以被包含于，它们也可以被减去(或"被提取")；如，圆心可以从一圆中被减去，剩余的就是除圆心外的所有的点。由于这剩余是圆内的与圆周的距离小于半径的所有的点之轨迹，且此轨迹与圆之差就是

---

① 以下略称特征。

② 原文本为 $A\infty B$，我们改写为 $A=B$。

③ 原文本为 A 非∞B，现写为 $A\neq B$。

④ 原文本至此即阙文，后面有"Significet A, Signnificabit Nihil"句。

一点，即圆心。类似地，球内一直径上的二不同点保持不动，则移走的所有的点的轨迹即相当于你从该球减去了通过该二未移动点轴或直径。

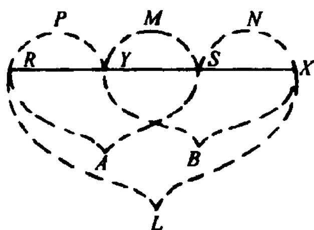
在相同的假设条件[A 和 B 一起重合于 L]下，A 和 B 在一起叫做组分，L 叫做该被组成者。

特征 3 $A+B=L$ 表示 A 是在 L 或被包含于 L 中。

评注 虽然 A 和 B 可能具有共同之处，故它俩在一起比本身要大，但我们在这里或在现在所说的仍然成立。用一个例子可以很好地把这说清楚：令 L 表示直线 RX，A 表示它的一部分，比如线 RS，且 B 表示另一部分，比如说线 XY。令这些部分，RS 或 XY 都大于全线 RX 的一半；那当然不能说 $A+B$ 等于 L，即不能

$$R.______ Y.______ S.______ X.$$

说 $RS+XY$ 等于 RX。因为 YS 是 RS 和 XY 的共同部分，故 $RS+XY$ 应等于 $RX+SY$。但确实能说线 RS 和线 XY 一起与线 RS[①] 重合。



定义 4 如果一些项 M 既在 A 中也在 B 中，称之为对它们是共同的，此时称它们是沟通的。而当它们没有共同的事物时，如 A 和 N（即线 RS 和线 XS），称它们为非沟通的。

定义 5 如果 A 以如下方式在 L 中：存在另一项 N 使得 L 中除了那些在 A 中的之外其余所有的事物都在 N 中且 A 中没有事物属于 N 中，则称 A 为被减去或被取去，称 N 为剩余。

特征 4 $L-A=N$ 表示，L 是包含者且如果从它之中 A 被减

---

① 疑为 RX 之误。

去,则剩余是 N。

定义 6 假设某一项与若干项的复合重合,不论这若干项是相加的或相减的,该若干项的复合叫做组分且该某一项叫做被组成的。[①]

评注 这样,所有的项都在某一事物中,它们都是组分,但倒过来不成立。例如,$L-A=N$,此时 L 不在 A 中。

定义 7 构造(即加法或减法)是隐含的或显示的二者中取一,$-N$ 或 $-M$ 是 M 本身的隐含构造,N 在其中的 A 或 $-A$ 也是隐含构造。N 的显示构造是显然的。[②]

定义 8 补偿是在同一表达式中加上且减去同一事物的运算,这里的加法和减法都是显示的[如 $A+M-M$]。毁灭是由于补偿而丢弃某些事物的运算,该事物不再表示出来且对于 $M-M$ 置以虚无。

公理 1 如果某一项和自己相加不组成任何新东西。

评注 对于数,一定有 2+2 得 4,或者两硬币加上两硬币得到四硬币,在这种情况下,后加上的两个不是前两个;如果是,则不产生任何新东西。这正如我们可以开玩笑地从三个蛋造出六个蛋一样:首先数一下三个蛋,然后拿走一个数一下剩下的二个,再后来又取走一个并数一下剩下的一个。

公理 2 如果同一事物被加上且被减去,则不论它如何进入另一项的构造中,其结果重合于虚无。或者说,A(在组成一表达式时无论加上多少次)$-A$(从同一表达式中无论减去多少次)=虚无。

评注 因此 $A-A$ 或$(A+A-)-A$ 或 $A(A+A)$[③] 等等=虚无。因为根据公理 1,每一表达式都可化为 $A-A$。

---

① 莱布尼茨的想法似乎是这样:如果 $A+N=L$;则 L 是由 A 和 N 所“组成”,且如果也有 $L-A=N$,那么 L 和 A“组成”N。但这也意味着,如果 $L-A=N$,则 A 和 N“组成”L。

② 是逐字翻译,其意隐晦含糊,可参看上图。

③ 应为$(A+A)-A$ 或 $A-(A+A)$。

公设 1 无论什么项的复合都能加以组成一单独的项;例如,如果我们有 A 和 B,我们能写下 $A+B$,并称之为 L。

公设 2 任何项,比如说 A,均能从它所在的,比如说 $A+B$ 或 L,被减去,如果给出的剩余是 B,它加上 A 组成包含者 L——也即在此假设[$A+B=L$]之下,可以确知剩余 $L-A$。

评注 依据这一公设,在下面我们会给出一种求两个项(其中之一,A,含于另一项 L 中)之差的方法,即使剩余(它与 A 一起组成 L)并未给出。——也即一种求 $L-A$ 或 $A+B-A$ 的方法,这里只给出 A 和 L 而 B 没有给出。

定理 1 与第三者相同的项,彼此相同。

如果 $A=B$ 且 $B=C$,则 $A=C$。由于在命题 $A=B$(按假设为真)中,以 C 代替 B(因按假设有 $B=C$,又根据定义 1 可以代替),所得结果即为 $A=C$,证毕。

定理 2 如果两相同项之一与第三项是不同的,则另一项也与第三者不同。

如果 $A=B$ 且 $B\neq C$,则 $A\neq C$。因为在命题 $B\neq C$(按假设为真)中,以 A 代替 B(因按假设有 $A=B$,又根据定义 1 可进行此代替),即得 $A\neq C$,证毕。

[此定理在手稿的页边空白处。]

此处可插入下述定理:在两重合项之一中的任何事物也在另一项中。

如果 A 在 B 中且 $B=C$,则 A 也在 C 中。在命题 A 在 B 中(按假设为真)之中,B 代换为 C 即可。

定理 3 如果把重合的项分别与同一项相加,结果仍将重合。

如果 $A=B$,则 $A+C=B+C$。如果在命题 $A+C=A+C$(自反为真)中,在任一处以 B 代替 A(由于 $A=B$,根据定义 1 可以这样作),即得到 $A+C=B+C$,证毕。

推论 如果把重合的项分别与重合的项相加,所得的结果也重合。如果 $A=B$ 且 $L=M$,则 $A+L=B+M$。按照本定理,由 $L=M$,有 $A+L=A+M$,在此断言中只在一处以 B 代替 A(根据题假

设 $A=B$)，即得到 $A+L=B+M$，证毕。

定理 4 包含者之包含者也是被包含者之被包含者。或者说，某些事物在一事物中，此事物又在第三事物中，那么，在此事物中的事物将在该第三事物中——也即，如果 A 在 B 中且 B 在 C 中则 A 也在 C 中。

由于 A 在 B 中(假设)，因而(根据定义 3 或特征 3)存在某项，我们可称之为 L，满足 $A+L=B$。类似地，既然 B 在 C 中(假设)，有 $B+M=C$，在此断言中置 $A+L$ 顶替 B(已说明它们的重合)，我们有 $A+L+M=C$。置 N 顶替 $L+M$(公设 1)，我们有 $A+N=C$。这样一来(根据定义 3)，A 在 C 中，证毕。

定理 5 各别地包含若干项的事物也包含由这些项所组成的东西。

如果 A 在 C 中且 B 在 C 中，则 $A+B$(由 A 和 B 所组成的，定义 4[①])在 C 中。既然 A 在 C 中，就存在某个项 M 使得 $A+M=C$(根据定义 3)。类似地，由 B 在 C 中，就有 $B+N=C$，把它们放在一起(据定理 3 的推论)，我们有 $A+M+B+N=C+C$，又因 $C+C=C$(公理 1)，因此 $A+M+B+N=C$。这样一来，(根据定义 3)$A+B$ 在 C 中，证毕[②]。

定理 6 由都是被包含者的若干项所组成的事物处在包含者所组成的事物中。

如果 A 在 M 中且 B 在 N 中，则 $A+B$ 在 $M+N$ 中。由于 A 在 M 中(假设)且 M 在 $M+N$ 中(根据定义 3)，因而 A 在 $M+N$ 中(定理 4)。类似地，B 在 N 中(假设)且 N 在 $M+N$ 中(根据定义 3)，因而 B 在 $M+N$ 中(定理 4)。既然已有 A 在 $M+N$ 中和 B 在 $M+N$ 中，那么也有(根据定理 5)$A+B$ 在 $M+N$ 中，证毕。

定理 7 如果把任何一项加于它所处于其中的事物则不组成

---

① 疑为定义 3。

② 手稿在此处的页边空白处，莱布尼茨有一不适于翻译的注记，意为提醒他本人必须以普通的语言插入这一命题的说明。

新东西；或者说，如果 B 在 A 中，则 $A+B=A$。

因为如果 B 在 A 中，则[对于某 C]有 $B+C=A$(定义 3)。因此(根据定理 3) $A+B=B+C+B=B+C$(据公理 1) $=A$(据上述)，证毕。

上定理之逆　如果用加法把任一项加另一项不组成新东西，则被加的项在另一项中。

如果 $A+B=A$，则 B 在 A 中。因 B 在 $A+B$ 中(定义 3)，且 $A+B=A$(据假设)。因此，B 在 A 中(根据定理 2 与 3 之间插入的原则)，证毕。

定理 8　从重合的项分别减去重合的项，其剩余仍重合。

如果 $A=L$ 且 $B=M$，则 $A-B=L-M$。因 $A-B=A-B$(自反为真)，在其一端以 L 代替 A 且以 M 代替 B，即给出 $A-B=L-M$，证毕。

[手稿页边空白处的注记]在处理概念时，减法是一回事，否定是另一回事。例如，"非理性的人"是荒谬的或不可能的，但是我们可以说：一只猿是一个人，只不过它不是理性的。正如在格鲁希柯斯[①] 的巨兽或巨人(Jambo)案中，[它们是]人，除了人区别于野兽的那些方面[②]。"人"－"理性的"是某种区别于"非－理性的人"的东西。因为"人"－"理性的"＝"野蛮的"。但"非理性的人"却是不可能的。"人"－"动物"－"理性的"是虚无。这一减法可能得出虚无或不存在——甚至比虚无更少——但是否定可以给出不可能。[③]

① Hugo Grotius，1583～1645，荷兰法学家，国际法之祖。

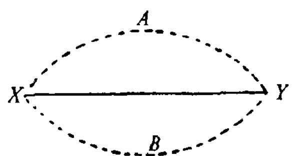
② 显然是 Grotius 在描述一只猿时用过的话。

③ 这不是某种不必要的或吹毛求疵的区分，正相反，这或许是出现在莱布尼茨手稿中他对于逻辑演算的准确理解的最好的证据。由于评价者不了解内涵的逻辑，这一点一般地被评价者所误判。仅是不存在与不可能(自我矛盾或荒谬的)是有区别的，这对于任何以内涵进行关系演算而言绝对是根本性的。把减法(或者更常用的记法即除法)与否定相区别，这同样是必要的。正是由于混淆了这两者间的区别，兰伯特(Lambert)和加斯蒂隆(Castilon)的演算都垮了。

XX

定义 1 不论在什么地方都可以互相替代而不改变任何句子的真实性的一些项都是相同的或重合的。例如，在欧几里得所演示的关于“三角形”，“三边形”的每一命题中，“三角形”和“三边形”可以相互代替而无损其真实性。

$A=B$①表示 A 和 B 是相同的，如同我们对于直线 XY 和直线 YX 说 $XY=YX$，或者一[点]从 X 移动至 Y 的最短路与从 Y 至 X 的重合。



定义 2 不是相同的项，即它们不总是能够互相替代的，是不同的。如“圆”和“三角形”是不同的；“正方形”（在几何学中总是被定为完美的）和“等边四边形”也是不同的，我们可以声称后者是菱形，但不能声称它是正方形。

$A\neq B$② 表示 A 和 B 是不同的，例如直线 XY 和 RS。

R Y S X

命题 1 如果 $A=B$，则 $B=A$。如果某事物与另一事物是相同的，则另一事物也将与其相同。因为由 $A=B$（据假设）推出（据定义 1）在语句 $A=B$（按假设为真）中，以 B 代替 A 同时以 A 代替 B，我们即有 $B=A$。

（王继平 译 罗里波 校）

① 和以前一样，原记法为 $A\infty B$。

② 和以前一样，原记法为 A 非∞B。

97. 布尔:《思维的规律》

莱布尼茨探索过的逻辑数学化问题,两个世纪以后才重新获得实质性进展。布尔创造的逻辑代数即现在所称的"布尔代数"基本上完成了逻辑的演算工作。

布尔(George Boole,1815~1864)生于英格兰林肯郡,早年为中学教师,后经自学成才逐步得到学术界的承认,1849 年起成为爱尔兰科克郡女王学院数学教授,都柏林大学与牛津大学先后授予他博士学位。布尔于 1847 年、1854 年分别发表《逻辑的数学分析》(Mathematical Analysis of Logic,Cambridge,1847)和《思维规律的研究,由此建立逻辑和概率的数学理论》(An Investigation into the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability,London,1854,简称《思维的规律》)两部著作,阐明语言符号化的基础,用代数方法较完满地建立了第一个逻辑演算系统。布尔代数为数理逻辑的理论发展铺平了道路,并对现代计算机科学具有重大的应用价值。以下节选《思维的规律》一书的有关内容,转译自 R. Calinger(ed.):Classics of Mathematics,pp. 505~510.

第二章 关于一般符号和关于特别适用于逻辑科学的符号;以及关于符号的类所遵循的规律

1. 大家普遍承认的一个真理是,语言不仅仅是人们表达思想的介质,它还是人类理性的一种工具。在本章中我们计划探求一下,到底是什么东西使得语言成为这样裨益于我们的智力才能的最重要部分。在此种探求的不同步骤中将引导我们去考虑语言的章程,它被当作一种适合于某种目的的体系;去研究它的要素;去寻求和确定它们的相互关系和依赖性;并且去探求它们以何种方

式对于目的的达到作出了贡献，它们作为一种体系的同等的部分，对该目的自然是有着干系的。

2. 组成所有语言的要素是符号或记号。文字是符号。有时也说它们代表事物；有时脑筋借助运算把事物的简单观念组合在一起成为复杂的概念；有时它们表示了行为、感情，或仅仅是品质的关系，我们看得出，这些东西存在于我们所经验的客体之中；有时则是那有洞察力的脑筋之七情六欲，尽管文字以这种或那种方式完成了符号，或代表性记号的职能，但它们不是我们有能力运用的唯一的符号。任意的仅对眼睛起作用的标记，任意的引向其他感官的声音和行为等，同样具有符号的本性，只要它们的代表性职能是确定的和能够理解的就够了。在数学科学中，字母和记号＋，－，＝，等等都用作符号。尽管"符号"这一术语宁愿用于代表运算和关系的后一类符号，而不用于代表数和量的元素的前身。正如一个符号的真实涵义完全不依赖于它们特别的形式或表达式，决定着它的用法的规律也是如此。不过，在本论文中，我们讨论的是书面符号，我们使用术语"符号"专门指的就是这种书面符号。符号的基本属性在下面定义中一一指出。

定义 一符号是一任意的标记，它有着固定的规律且容许遵循着固定的规律而与其他的符号结合，这些规律依赖于诸符号的相互解释。

3. 我们分别考虑上述定义所涉及的各个部分。

(1)首先，一符号是一任意的标记。很清楚，不论我们用什么样的特别的字或记号与给定的想法相联系都是无所谓的，只要这种联系一旦建立就是永久性的即可。罗马人用"Civitas"这个字表达我们用"State"这个字所称呼的东西。他们和我们还可以同样地使用其他的字以代表这相同的概念。的确，在语言的本性中并没有什么能不让我们仅用一个字母于相同的意义。如果这样做了(实际上没这样做)，则使用字母所要遵循的规律基本上与那种规定着拉丁语中"Civitas"的使用、在英语中"State"的使用的规律是相同的，至少至今为止，这些词的使用是受一些对所有语言同样适用的一

般原则所节制的。

(2)其次，在同一的论述或推理过程的范围内，必须是每个符号应具有一固定的解释。该条件的必要性是显然的，并且似乎这正是研究对象的本性。在推理过程中，把文字或记号用作名字，其代表性质能的确切本质是什么，在这方面是存在着争论的。一些人坚持认为，它们仅仅代表头脑中的概念，其他人认为，它们代表事物。这一争论在我们这儿无关紧要，因为这一争论的谁是谁非不会影响使用符号所遵循的规律。不过，按照我的理解，对此论争和其它类似问题的一般答案是：在推理的过程中，符号代表着头脑中的概念和运算并完成它们的职能；但由于这些概念和运算代表着事物和事物的联系和关系，故符号也代表了事物连同它们的联系和关系；最后，由于符号代表着头脑中的概念和运算，它们必须服从这些概念和运算的规律。在下一章我将更充分地阐述这一观点；此处只用它来说明一下符号定义所涉及的第三点，即它必须服从于组合(有赖于符号解释的本性)的固定的规律。

4. 推理之运算所赖于施行的这些符号的分析和分类将在下面命题给予考虑：

命题Ⅰ 作为一种推理工具的语言，它的所有运算可以藉助一符号体系而得以施行，该体系由下列要素组成：

(1) 文字记号如 x, y，等等，它们代表着作为我们概念之主体的事物。

(2) 运算符号如＋、－、×代表着头脑中的运算，藉助它们事物的概念得以组合和分解以形成包括了同样的要素的新概念。

(3) 相等的符号＝。

这些逻辑记号在使用它们时要服从于确定的规律，它部分地一致于又部分地区别于代数学中相应记号的规律。

可以把下面所述当作合理论述之真正要素的判别准则；它们应允许根据最简单的规律成为最简单形式的组合，并且这样进行组合应生成语言的所有其它已知的和可以设想的形式……。

6.[1] 现在，既然已经规定，一符号是一任意的记号，那就允许把上述样本的所有符号都用字母来代替。让我们约定：对于一特别的名称或描述施用之那些个体，我们以单个字母，如 x，代表这些个体的类。例如，如果名称是"男人"，可令 x 代表"所有的男人"或"男人"的类。所谓一个类通常指的是一些个体的一个集合，且对每一个体可施用一特别的名称或描述；但在本文中，这一术语的意义将加以扩充使之包含下述情况：符合名称或描述要求的只有单个个体存在的情况，还有术语"无任何事物"和"论域"所表示的情况，作为类，应当把它们分别理解为"无实在之物"，"所有的事物"。再则，一个形容词，如"好的"被用作描述性术语，我们用一个字母，比如 y 来代表所有的"好的"这一描述能够用得上的事物，即"所有的好事物"或"好事物"的类。进而，我们约定，以组合 xy 代表的事物的类是：x 和 y 所代表的名称或描述同时适用的事物的类。这样，如果 x 单独代表的是"白色的事物"且 y 代表"羊"，则 xy 代表"白羊"；类似地，如果 z 代表"有角的事物"且 x 与 y 保持上面的解释，则 zxy 代表的是"有角的白羊"，即名称为"羊"且描述为"白的"和"有角的"在一起可施用的事物的集合。

下面我们讨论在上述意义下所使用的记号 x，y 等所服从的规律。

7. 首先，显然按照上述的组合法，两个记号的书写次序可以是不同的。不过表达式 xy 和 yx 代表的是同一个事物类，作为名称和描述的 x 和 y 在一起可施用于该类的诸成员。因而我们有

$$xy=yx \tag{1}$$

在 x 代表白色的事物，y 代表羊的情况中，上式的任一项代表"白羊"这个类。在概念形成的次序上可能有些差异，但对于理解该概念所含的各个事物时则是没有什么差别的。类似地，如果 x 代表"入海口"，y 代表"河流"，表达式 xy 和 yx 将不加区别地代表"作为入海口的河流"或"作为河流的入海口"。用普通语言说，这里

---

① 原文序号缺 5。

用的是两个名词的组合，前面例子中用的是一个名词和一个形容词的组合。让我们用第三个记号，比如 z 代表术语"适于航行的"可施用的事物的类，则下述表达式

$$zxy, zyx, xyz$$

之任一种将代表"适于航行的作为入海口的河流"这个事物的类。

如果一些描述性术语中之一对其它术语具有某些蕴涵的意义，只要明白地把这些意义置于它的被提及的意义之中，就可以使上面的评注仍然可用。这样，如果 x 代表"明智的"且 y 代表"法律顾问"，我们就有必要确定，x 蕴涵的是绝对意义下的智慧呢，还是仅蕴涵着顾问之智慧。只要有着这种确定性，规律 $xy=yx$ 继续成立。

因此，我们能够用记号 x,y,z 等代替名词、形容词和描述性片语，这遵循如下的解释规则，任一由若干个这样的记号写在一起的表达式代表着所有的这若干种意义能够同时施用的客体或个体且遵循如下的规律，记号写法之先后次序是无关紧要的。

由于对解释规则已有了充分的例证，我认为，在确定用于形容词的记号的解释时已没有必要总是说出"事物"这个主体。当我说，令 x 代表"好的"，这就应该理解为，当一主体为此品质而被提供以另一记号时，x 只代表"好的"；而当它被单独使用时，它的解释就是"好事物"。

8. 关于上面确定的规律，可以添加如下的观察，对于若干此后导出的其它规律这种观察或多或少也是适用的。

首先，我必须说，这一规律是思维的规律，严格说来并不是事物的规律。一个客体的品质或属性在次序上的差异，除了所有因果关系上的问题之外，顶多是概念上的差异。规律(1)表示的是个一般的真理，同一事物可以以不同的方式去设想并说出这种不同性的性质；除此之外再没有别的了。

其次，作为一个思维的规律，实际上它发展成一个作为思维之产物和工具的语言的规律。虽然杂文写作的倾向已趋于一致，但即使在杂文中，在意义上绝对是形容词且用于同一主体的形容词的

序列其次序也是不同的。但诗的辞藻从相同的合乎规律的自由的延伸中也借用了它的许多丰富的多样性以用之于名词。米尔顿的语言由于其多样的形式显得突出。不仅名词常常置于它的性质形容词之前，还经常把它放在形容词之间。在祈祷光明的最初几行中，我们会遇到如下的例子：

"Off spring of heaven first-born."

"The rising world of waters dark and deep."

"Bright effluence of bright essence increate."①

现在，这种倒装的形式并非简单地是特许的诗人的成果。它们是根据熟知的思维规律而认可的一种自由的最自然的表达；但在普通语言中因方便起见就没有这样做。

第三，(1)式所示的规律也可以说成是，文字记号 x，y，z，如同代数记号一样，是交换的。在这样说的时候，决不意味着，代数中的乘法过程（其中的基本规律以等式 $xy=yx$ 表述）本身具有任何与逻辑组合过程（xy 代表何物已如上述）相似之处；而仅仅是说，如果以同样的方式表示算术的和逻辑的过程，那么它们的记号表达式将遵循相同的形式规律。在两种过程中，这种遵循的证明是完全不同的。

9. 由于形如 xy 的两个文字记号的组合表示了整个的类其所含客体为由 x 和 y 所代表的名称或品质在一起可施用者，这样一来，如果两个记号恰好有着相同的涵义，它们的组合所表示的就不会超过其中的任一个单独即可表示者。此时，我们应该有

$$xy=x$$

其中，假设 y 有着与 x 一样的意义。在上面的方程中，以 x 代替之，我们有

$$xx=x$$

在通常的代数学中，组合 xx 简单地表为 x^2。此处我们采用相同的

① 这三句话的大意为"老天爷的第一个宠儿"，"升涨着又深又黑的海洋世界"，"固有的光明的精华之光芒四射"。

记号法则；这是因为表述一特别的脑力运算之相继执行其方式是一件相当任意的事情，与表达单个想法或运算有着同等的任意性（见Ⅱ，3）。依照这一记号，上述等式取下形

$$x^2=x \tag{2}$$

事实上，它就是这些记号的第二个一般规律的表达式、名称、品质或描述藉助这些记号而取得记号表示。

还有，如果 x 和 y 这两种事物的类是全等的，即任一个类中所有成员也是另一个类的成员，那么，一个类中那些具有给定属性 z 的成员与另一个类中的那些具有同样属性 z 的成员也将是恒等的。因此，如果我们有等式

$$x=y$$

那么，不论 z 代表什么样的类或属性，我们也有

$$zx=zy$$

形式上，它与代数律：等式的两端同乘以相同的量，其积仍等，是相同的。

类似地，可以证明，如果两个等式的对应项同时相乘，所得等式仍为真。

14. 不过，这一系统与一般所说的代数系统的相似性也是到此为止的。假设一个类 x 中那些具有某种属性 z 的成员与类 y 中的那些具有同样属性 z 的成员是恒等的这一命题为真，由它不能推出，类 x 中的诸成员与类 y 中的成员无条件恒等。因此，不能由等式

$$zx=zy$$

推出等式

$$x=y$$

仍然是真的。换句话说，代数学家的公理：等式两端可除以同一个量在我们这里也没有了形式上等价的东西。我说没有形式上等价的，因为按照这种质疑的一般精神，它甚至不寻求去确定，从一组合 zx 移走一逻辑记号 z 之后所代表的脑力运算本身与算术中的除法运算是否相似的。这种脑力运算确实与一般名为抽象的是恒

等的，此后，可以公认，它的规律就依赖于本章中业已导出的规律。我们在这里所表明的是，在这些规律中不存在在形式上与一个普遍接受的代数学公理任何相似之处。

不过稍作考虑即可表明，即使在通常的代数学中，这一公理也不具有已经讨论过的其他一些公理所具有的普遍性。从等式 $zx=zy$ 推出等式 $x=y$ 仅在 z 不等于 0 时才成立。如果假定容许在代数系统中 $z=0$，上述公理不再可以使用，而以前的例子说明的相似性也可保留，至少不会被戳破。

15．不过，一般的量的记号虽则对我们没有什么重要性，除非，作为一种猜测，可以追寻这种相近之处。我们已经知道（Ⅱ，9），逻辑记号服从于特殊的规律

$$x^2=x$$

在数的记号中只有两个数 0 和 1 服从同一个形式化规律。我们已知 $0^2=0$ 和 $1^2=1$；方程 $x^2=x$，把它当作一个代数方程，除了 0 和 1 之外，再没有其他的根。因此，不去一般地确定逻辑记号与数的记号之间形式上的一致性的度量，上面事实更加直接地提醒我们在只承认数值 0 和 1 的条件下把它们与量的记号进行比较。我们可以设想，有一种代数其中的记号 x,y,z 等都容许取值 0 和 1 且只能取这两个值。

（王继平 译　罗里波 校）

98. 弗雷格:《算术基础》

19世纪晚期,当建立符号逻辑的人们将兴趣倾注于逻辑数学化之时,弗雷格的工作却开辟了数理逻辑中的一个新方向,即在逻辑的基础上建立数学。弗雷格(Gottlob Frege, 1848～1925)生于德国魏斯马,1873年获格丁根大学博士学位,以后长期执教于耶拿(Jena)大学。弗雷格1879年出版的《概念演算》(Begriffschrift),提出了历史上第一个严格的逻辑、公理系统,并发展了命题演算与一阶谓词演算。此后弗雷格便向他的真正目标挺进:作为逻辑的展延去建立数学。结果是1884年出版的《算术基础》(Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau),其中将算术概念表示成逻辑概念,用纯逻辑方法推导出数的定义与规律。这一切使弗雷格的思想成为数理逻辑中逻辑主义的先导。然而弗雷格的符号系统在当时很少为人理解、接受。直到20世纪初英国数学家罗素(B. Russell,1872～1970)指出其意义,弗雷格的工作才重新唤起关注并获得高度评价。以下摘录弗雷格《算术基础》的部分内容,转译自J. L. Austin的英译本:The Foundations of Arithmetic, Oxford,1959.

为了获得数的概念,我们必需制定数的等同性的含义。

§62. 如果我们对数没有任何概念或直觉,那末数是怎样给了我们的呢?由于只是在一个命题的行文中字词才有意义,所以我们的问题就变成这样:定义具有数字词出现的命题的含义。显然,这件事仍留给了我们一个非常广泛的选择。但是我们所设定的那些数字词是被理解为代表着一些固有的客体。这就是说,这些命题表明了我们对一个数作为同样的数再现时的识别。如果我们用符

号 a 表示一个客体，我们就必须有一个法则来确定 b 在任何情况下是否都与 a 是同样的，即或我们并不是力所能及地总可能应用这一法则。现在的情形，我们必需为命题

"属于概念 F 的数是与属于概念 G 的数是同样的"

的含义下一个定义；也就是说，我们必需用另外的术语来重述这个命题的内容，而避免用

"属于概念 F 的数"

这种表达方式。要做到这一点，我们就得为数的等同性给出一个一般的法则。当我们有了一个能得到一个确定的数并且能在再见到它时知道是同样的数的办法，那末我们就可以指定给它一个数字词作为它的真正名字。

§ 63. 休谟(Hume)[①]很早以前曾提出过这样一种方法："当两个数是这样地组合的其中一个数总是有一个单位与另一数的每一个单位相应，我们称这两个数是相等的"。数的相等性或等同性必需用一一相关的述语来定义，而上述意见似乎近年来在数学界已普遍地被接受了[②]。但是这种意见立即引起了某些逻辑上的疑问与困难，因此我们本不应该未经检验而轻易地给以通过。

等同关系的被发现并非仅仅在数的范围之内。由此似乎可以认为我们本不必专门为数的等同性下什么定义。我们应该期待首先制定等同性的概念，然后，由这个概念连同数的概念就必然会导出在什么时候数与数之间会有等同性，而不需要也为数的等同性作专门的定义。

作为反面的意见，我们必需注意，对于我们来说数的概念尚未被制定，这只是因为它的制定需要借助于我们对数的等同的定义。我们的目的是要建立一个判断的要点，它能被看成一个等式，使得

---

① 参看 Baumann, Op. Cit, Vol. I, p. 565, Treatise, BK I, Part iii, Sect. I. ——原注

② 参看 E. Schroder, Op. Cit. pp. 7～8; E, Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums, Berlin 1872, p. 16; G. Cantor, Grundagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, Leipzig 1883.

它的每一侧是一个数。所以，在这种情况下我们不主张专门定义等同性，而只是利用已知的等同性的概念作为达到判定等同性的手段。不可否认，这似乎是一种极为奇怪的定义，逻辑学家们对此尚未给予足够的关注；但是这决不是前所未闻，也许可以举出少量的例子。

§64．判断"直线 a 平行于直线 b"，或者用符号

$$a // b$$

可以被当作一种等同性。如果我们这样做，我们就得到了方向的概念，并且可以说："直线 a 的方向与直线 b 的方向是等同的。"经过除去前面内容的特殊性并且将 a 与 b 分隔开来，那末我们可以用更为一般的符号＝来代替符号//。我们以一个不同于原来方法的方法来精雕细刻这个内容，这就提供给我们一个新的概念。自然，我们往往也会想到反方向的做法，而许多权威的作者以两条方向是等同的直线来定义平行线。"平行于同一条直线的直线是互相平行的"这个命题可以通过引用类似的关于等同于同一事物的事物的命题很方便地得到证明。但是唯一的麻烦是这件事颠倒了事物与事物的真正的顺序。因为无疑地每一个几何学的事物必然在直觉上早已给出。但现在我要问，是否有一个人有一条直线的方向的直觉。当然，是一条直线；但是我们能不能以我们的直觉去区分这条直线与另一件事物——它的方向？这是难以讲通的。方向概念的发现完全是作为智力活动过程的一种结果，这种智力活动促使方向概念由直觉而发生。另一方面，我们确已具备了平行直线的概念。我们的简便的论证也只能在我们偷偷地假定"方向"这个名词时才有可能作出，这就是要被证明的；因为如果"平行于同一条直线的直线是彼此平行的"是不成立的，那末我们就不能转换 $a // b$ 为一个等同性。

对应于直线方向的情形，我们可以由平面的平行性用同样的方法得到一个概念；我见到过名词"方位"(Stellung)曾在这里采用。由几何图形的相似性产生了形状的概念，所以我们说"这两个三角形的形状是等同的"或者说"一个三角形的形状是等同于另一

个三角形的形状”而不说“这两个三角形相似”。用这种方法，由几何图形的共线性也可能会获得另一个概念，对于这个概念还没有人给出一个名字。

§65. 为了从平行主义[①]而得到方向的概念让我们来试一试下面的定义：

> 命题“直线 a 平行于直线 b”和命题“直线 a 的方向与直线 b 的方向等同”有同样的意义。

这个定义在某种意义上来说与普通的做法有差距，在那里把它当作是已知的而从表面上采用等同关系而应用到一个特殊的情形，在现实生活中它是要先引入表述词语“直线的方向”而等同性则是附带地得来的。通过运用这种方法在被卷入了与众所周知的等式定律的对立之后就产生了第二个疑点——难道我们自己是不可靠的吗？让我们看一看这是什么。作为对真理的分析它们应该能被从概念本身推导出来。现在莱布尼茨[②]的定义如下：

> “事物在一个能被另一个所代替而不失去真值时被认为是相同的”。[③]

这里我提议采用作为我自己的等同性的定义，是否我们像莱布尼茨所做的那样运用“相同”或者“等同”是没有任何重要性的。“相同”是被想象成为在各个方面都完全一致而“等同”[④] 只在这一点或那一点上取得一致但我们可以采用一种表述词语使得上述的差异消失。例如代替“这些线段在长度上是等同的”我们可以说“这些线段的长度是等同的”或者“相同的”，代替“这些曲面在颜色上是等同的”我们可以说“这些曲面的颜色是等同的”。这就是在上述例子中文字的运用方式。现在在全能可代换的情形中全部等同的规

---

① 我在这里选择了讨论平行主义的情形因为这样我能够做得不那么笨拙而使我自己的观点更加容易地被理解。这个论断在本质上是完全可以转移到数的等同性情形。——原注

② 引自 Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis (Erdmann edn. p. 94)。——原注

③ 德文原本 Eadem sunt quotum unum potest substitui alteri salva veritate.

④ 还有“相等”或“相似”都是德文 gleich 的一些意义。

律均被遵守了。

因此为了使我们提出的关于一条直线的方向的定义合理化我们应该指出如果直线 a 是与直线 b 平行的那末就可以在无论什么地方用

"直线上的方向"去代替

"直线 a 的方向"。

由于以下事实使这个任务做起来较为简单，我们在最初关于一条直线的方向除了它与某些其他直线的方向等同这件事之外什么其他的断言也不知道。因此我们应该证明在这种形式的等式中或在含有这种等式作为组成部分的判断内容中互相代替是可能的。[①]任何其他形式的关于方向的断言都先要加以定义而在定义中我们可以看出把任何直线的方向用其他任何与之平行的直线的方向来代换仍然是可能的。

§66. 但是仍然有第三个疑点它使我们怀疑我们所提出的定义。在命题"a 的方向等同于 b 的方向"中 a 的方向扮演了一个客体的一部分[②]，而我们的定义当在出现与某些其他事物譬如说是 b 的方向时提供我们一个再次认识这个客体的手段。但是这个手段并不是在什么情况下都是可以提供的。例如如果可以原谅我提出一个看起来是无意义的例子的话，确定英格兰是否与地球的轴的方向是等同的。自然没有人会将英格兰与地球的轴的方向搞混。但这不是由于我们定义的力量。

"a 的方向是与 q 等同的"

这个命题应该肯定还是拒绝是没有什么可说的，除了一种情形其中 q 是以"b 的方向"的形式来给出。我们所缺少的是方向的概念，

① 例如在一个假想的判断中方向的单元可以在前提或结论中出现。——原注

② 这是被定冠词(the direction)所表示出的。一个概念对我们来说可以放入一个单判断内容的谓词形式而其受词可以和主词等同。如果在命题"望远镜的轴的方向是和地球的轴的方向等同的"我们以"望远镜的轴的方向"作为主词那末谓语是"是和地球的轴的方向等同的"。这是一个概念，但是"地球的轴的方向"仅仅是谓语的一个元素，因为它可以作为主词而现在它是受词。——原注

因为如果我们有了它我们就可以这样来弄清楚：如果 q 不是一个方向我们的命题应该拒绝而如果它是一个方向我们原来的定义将决定它是否应该肯定还是拒绝。所以这就引起我们给出我们的定义：

q 是一个方向，如果有一条直线它的方向是 q。

但是这样一来我们很明显地转了一个圈。因为为了用这个定义我们应该已经在每一个情形下知道是否

"q 是与 b 的方向等同"

应该肯定还是拒绝。

§ 67. 如果我们原来想试着说：q 是一个方向如果它是利用上述的定义作为手段而引出的，那末我们就会以一种处理方式其中客体 q 是作为 q 的性质而引出来，但事实上不是这样的。一个客体的定义事实上并不断言关于这个客体什么东西，而只是摆出了一个记号的意义。这件事做完了之后，定义自己变形为一个判断，它并不断言这个客体而现在它也不引入这个客体，它是在一个程度上与其他断言一起被做成这样的。如果更进一步我们原来想采取这种形式来找出路我们就应该提出一个客体只能以一种方式来给出；否则它是得不到的，从 q 不能被我们的定义所引出的事实，它也就不能被以它作为手段而引出。所有等式将总括成为这样简单，什么东西以同样方式给出就认为它是等同的。这个无论如何是一个明显而无用的原则，甚至我们不值得把它说出来。我们不可能从它得出任何与我们的前提之一不相同的结论。为什么会这样呢？在经过种种考虑之后我们可能应用等式在如此多向的区域中得到如此有意义的结果吗？真的，它是多少因为我们能够认识某个客体作为是同一个客体而重复出现即使是以一种不同的方式给出来。

§ 68. 看出了我们不可能利用这种方法得到带有在应用上具有清晰界限的关于方向的概念，居于同样理由因此也不可能对数得到任何满意的概念，让我们来试验另外一个办法。如果直线 a 是平行于直线 b 那末"直线平行于直线 a"的概念的外延是与"直线平行于直线 b"的概念的外延是等同的；并且反过来如果刚才说的

两个概念的外延是等同的，那末 a 是平行于 b。因此让我们来试验下述形式的定义。

直线 a 的方向是"平行于直线 a"的概念的外延；

三角形 t 的形状是"与三角形大相似"的概念的外延。

为了应用这一点到我们的数的情形，我们必须将直线或者三角形的概念对平行主义或相似性代之以那些落到在一个概念之下或者在另一个概念之下的客体之间一对一的相关可能性。简单地说我们将在这些条件满足之时谈起概念 F 是等于概念 G[①]。但是我们必须要求这个字要被作为任意选取的记号来对待，它的意义是要制定的，而不是从词源学里得到，这也就是这里所摆出的。

因此我们的定义如下：

属于概念 F 的数是概念"等于概念 F"的外延。

§69. 首先这个定义是正确的但却或许是极不明显的。我们难道不想到某些与数很不相同的概念的表示式吗？我们怎样能从我们做好的基本论断中想到它们清晰地显现出来。就像是下面那样：

1. 它们是等同的。

2. 一个比另一个宽一些。

但是现在命题

"概念'等于概念 F'的外延是和概念'等于概念 G'的外延是等同的"

是对的当且仅当命题

"属于概念 F 的数和属于概念 G 的数相同"

也是对的。因此这样取得了完全的协议。

当然我们不说一个数比另一个数宽；但是

---

① 即 Gleichzablig——一个创造的字，文字学上用"同数"或者"总计"；但这些经常用起来是太笨拙了。其他的译者用"等数"，"等算"是好一点。后来的作者用"相似"与之联系（但是只作为一个类的谓词而不是概念的谓词）。

"概念'等于概念 F'的外延要宽于概念'等于概念 G'的外延"

是不大可能会出现的。否则,如果相反的话,当所有等于 G 的概念也等于 F,那末反过来所有等于 F 的概念也等于 G。这里用到的"宽于"是不要混淆于用于数的"大于"。

我承认另一种类型的型是令人信服的,其中"等于概念 F"的外延是可能比某些其他概念的外延要宽一些或窄一些,这不是一个常见的说法,但是也没有任何约束力来避免我们这样说,如果这种情形终于出现了。

我们的定义完成了并且也证明了它的价值。

§70. 定义以证明其有成效来显示它们的价值。那些可以被省略并且在我们的证明链中消失到连痕迹也没有的定义应该被拒绝因为它们是完全无价值的。

因此我们来试一试从我们的属于概念 F 的数的定义看看是否能导出任何有关数的常见性质来。我们只探讨最简单的情形。

为了作到这一点仍然有必要给出较之更为精确的对"相等性"一词的界定。"相等"我们是用一对一相关来定义的,我们必须现在摆出这后者的表述词语是如何理解的,因为它很容易地被设定为与直觉有点什么联系。

我们考虑下面的例子。如果一个服务生想弄准确在桌子上摆的刀子和盘子一样多,他并不需要去点这两种东西的数;他只要在每一个盘子的右边靠着摆上一把刀子,留神每一把刀子是紧靠在盘子的右边。这样一来盘子和刀子是一对一地相关着并且这是由于同样的摆法关系所得出的。现在如果在命题

"a 紧靠在 A 的右边"

中我们想象第一个客体和另一个客体插入到 a 的位置然后 A 的位置而命题的其他部分不加改动,这样进行下去就显示出了相关的本质。我们需要推广这个想法。

如果从一个处理客体 a 和客体 b 的判断内容中我们去掉 a 和 b,我们得到作为剩余部分一个关系概念。正因为如此它是在两点

上不完全的。如果从命题

"地球比月亮重"

中我们去掉"地球",我们得到概念"比月亮重"。如果另一种办法我们去掉客体"月亮",我们得到概念"比地球轻"。但是如果我们同时把两者都去掉,那末我们得到剩下的关系概念。它并不比一个简单概念具有更多的可断言的意义,为了作成一个判断要点它总是待完成的。无论如何它可以以不同的方式来完成:不用地球与月亮我们可以放太阳与地球,而这源起于消去效果。

每一对相关的客体保持关系概念就好像一个个别客体保持它所落到的概念 —我们可以把它们叫做关系概念的主体。只有在这里主体是一个合成体。偶然地当所讨论的关系是可逆时这件事在词法上得到了承认,就像在命题"Pelues 和 Thetis 是 Achilles 的父母"中。但是并不经常是这样。例如在"地球比月亮大"这个命题中就几乎不可能用另外一种方式好像"地球和月亮"来作合成主体。"和"总是必须表示这两件事物以某种方式来放在同一水平上。无论如何这并不影响主题。

因此像简单概念一样关系概念的教条是纯粹逻辑的一部分。逻辑所关心的不在于任何特殊关系的特别内容而是在于逻辑的形式。什么东西可以断言是解析上真的并且是预知的。这一点对关系概念或其他概念都是一样成立的。

就好像

"a 落到概念 F 之下"

是一个处理一个客体 a 的判断要点的一般形式,因此我们可以用

"a 在关系 φ 中保持与 b 有关系"

来表示处理一个客体与另一个客体的判断要点的一般形式。

§71. 如果现在每一个落到概念 F 的客体在 φ 中保持与一个落到概念 G 的客体有关系,并且如果每一个落到概念 G 的客体也在 φ 中保持与一个落到概念 F 的客体有关系,那末落到概念 F 的客体与落到概念 G 的客体是对关系 φ 来说是相关的。

还可能会提出这样的问题,表述词语

“每一个落到 F 的客体在关系 φ 中保持与一个落到 G 的客体有关系”

当在根本没有客体落到概念 F 时是什么意思？我理解这个表述词语如下：下面两个命题

“a 落到 F”

和

“a 在关系 φ 中并不与任何落到 G 的客体保持有关系”

无论如何用 a 来表示是不可能同时成立；因此或者是第一个命题不成立，或者第二个不成立，或者两者均不成立。由此可以看出命题“每一个落到 F 的客体在 φ 中保持与一个落到 G 的客体有关系”在没有客体落到 F 时是成立的；因为在那个情形中第一个命题

“a 落到 F”

无论 a 是什么总是不成立的。

同样方式可知命题

“对每一个落到 G 的客体在关系 φ 中保持与一个落到 F 的客体有关系”

意味着这两个命题

“a 落到 G”

和

“没有落到 F 的客体在关系 φ 中保持与 a 有关系”

无论对什么 a 来说是不可能两者均成立的。

§72. 我们看到了落到概念 F 和 G 的客体是对关系 φ 彼此相关的。但是现在我们要求这个相关是一对一的。由此我理解为下面两个命题都要成立。

1. 如果 d 在 φ 中与 a 保持关系，并且 d 在 φ 中与 e 保持关系，那末一般地说无论 d,a 和 e 是什么，a 与 e 是相同的。

2. 如果 d 在 φ 中与 a 保持关系，并且 b 在 φ 中与 a 保持关系，那末一般地说无论 d,b 和 a 是什么，d 与 b 是相同的。

这样将 1—1 相关化简为纯粹逻辑关系，并且使我们可能给出

下面的定义：

表述词语

"概念 F 与概念 G 是相等的"

是和表述词语

"存在一个关系 φ 它将落到概念 F 的客体与落到概念 G 的客体一对一地相关"

的意义是相同的。

我们现在重复我们原来的定义：

属于概念 F 的数是概念"等于概念 F"的外延

并且更进一步加上

"存在一个概念使得 n 是属于它的数。"

因此数的概念得到了定义，明显地，事实上是以它自己为手段，并且没有任何谬误，因为"属于概念 F 的数"已经有了定义。

§73. 我们的下一个目标必须是指出如果概念 F 是等于概念 G，那末属于概念 F 的数与属于概念 G 的数相同。这个看起来好像是命题恒真式。其实不然；"相等这个词的意义是不能从词源学上直接引出的而是像我们在上面那样定义出来的。"

在我们["属于概念 F 的数"的]定义中有什么需要证明的呢，这就是概念"等于概念 F"的外延与概念"等于概念 G"的外延是相同的。换句话说，需要证明只要 F 与 G 相等，下面的两个命题就到处成立：

如果概念 H 是和概念 F 相等，那末它也和概念 G 相等；

以及

如果概念 H 是和概念 G 相等，那末它也和概念 F 相等。

第一个命题可以总括成为这样，存在一个关系它将落到概念 H 的客体与落到 G 的客体一对一地关联起来，如果存在一个关系 φ 它把落到概念 F 的客体和落到概念 G 的客体一对一地关联起来并且如果也存在一个关系 φ 它把落到概念 H 的客体和落到概念

F 的客体一对一地关联起来。下面的字母安排可以使这一点容易掌握：

$$H \; \psi \; F \; \varphi \; G$$

这样一个关系事实上已经能够给出；它可以从判断要点中被找到

"存在一个客体 c 与它保持关系 ψ 并且它与 b 保持关系 φ"。

如果我们在其中去掉 c 和 b 而只考虑它们作为关系的项，可以指出这个关系是一对一的，并且将落到概念 H 的客体和落到概念 G 的客体关联起来。

对第二个命题也可以类似地给出证明[①]。并且以此我希望已经对我的方法作了足够的说明使我们的证明与任何借用直觉的论点没有关系并且我们的定义是可以用来作某些事情。

（蒋滋梅 译　罗里波 校）

---

① 并且类似地得到逆命题：如果属于概念 F 的数和属于概念 G 的数是相同的，那末概念 F 与概念 G 相等。——原注

计算机

99. 莱布尼茨:论“算术计算机”

用机器代替人的计算,是人类的长期追求。第一台能做加、减运算的机械式计算器的创制者是帕斯卡,他的计算器有几台至今还保存在巴黎。

莱布尼茨也敏锐地预见到了计算机的重要性。他指出:“把计算交给机器去做,可以使优秀的人才从繁重的计算中解脱出来”。莱布尼茨从1671年开始着手设计、制造他所谓的“算术计算机”。1673年赴伦敦旅行时曾随身携带了一架木制模型,引起人们极大的兴趣。1674年,莱布尼茨在马略特(E. Mariotte)帮助下制成了一架能进行加、减、乘、除运算的计算机(莱布尼茨制造的计算机有一台现藏汉诺威凯斯特纳[Kästner]博物馆)。1685年,莱布尼茨用拉丁文撰写了一份手稿(Machina arithmetica in qua non additio tantum et subtractio sed et multiplicatio nullo, divisio vero paene nullo animi labore peragantur),叙述他设计这架计算机的经过。1897年,若丹(C. Jordan)在《测量杂志》(Die Zeitschrift für Vemnessungswesen)上首次公布了这篇手稿(现存汉诺威皇家图书馆)。以下是这篇手稿的全文,转译自 D. E. Smith. (ed.):A Source Book in Math,pp. 173～181. (英译者 M. Kormes)。

几年以前，我第一次看见一台计算器，当携带它时，它能自动记录携带者行走的步数。当时我觉得全部的算术运算都可以在类似机械上实现，这个机械不仅能计数，而且加减乘除都能通过适当的机械装置迅速而容易地完成，并得到正确的结果。

当时我还不知道帕斯卡的计算机，我相信当时它还未被大多数人知道。我在巴黎第一次见到帕斯卡的三角形[即我国的杨辉三角形]。在他死后才发表的一本书的前言中，我看见提到“计算机”的字眼时，立即去信询问一个巴黎的朋友。确证有一台这样的机器存在，我便致函著名的卡尔卡维(Carcavius)，请他解释这台计算机能做什么样的计算。他回答说加减法能直接完成，但是其它的运算要用间接的方法，须通过重复加减法和实行其它运算的方法。我回信说，我敢担保更多的运算如乘法，能像加法那样在机器上自动实现，且有极高的速度和精度。

他回答说这将是需要的，并且鼓励我将我的计划提交当地著名的皇家科学院。首先要弄清楚的是该机器分为两部分，一部分设计用于加减法，另一部分用于乘除法，且这两部分是有机结合的。

加减法装置和帕斯卡的计算机完全一样。但为了实现乘法，一些装置必须加进来，以便许多或全部的加法轮能够互无干扰地转动，而当中的任何一个都能向上一高位轮进位，进位方式是当某轮转足一整圈之后，通过转动的传送带使高位轮增加一。如果帕斯卡加法器不能实现这样的进位，改进它也是容易的。

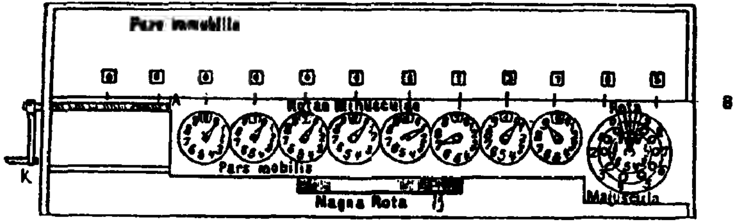


图 1

乘法器包括两排轮子。一排大小一样，另一排则不一。因而整个机器有三类轮子，加法轮、被乘数轮、乘数轮。加法轮（或曰十进位轮）在帕斯卡的加法箱就可见（参见附图 1,2），每个轮按从左到右的顺序依次代表百位、十位、个位等从大到小的顺序。每一个加法轮都有十个齿。

被乘数轮都一样大小，和加法轮一般大，只是其所有的十个齿都可以卸下，以便有时可以剩下五个齿、有时剩下六个齿等等。其中，5 个齿代表被乘数是五，其余照此类推。例如，被乘数是 365，由三个数字 3,6,5 组成，于是对应地，轮子上从左到右也要用相同的齿数与之对应。这些被乘数轮的取值方式是：右边的轮留 5 个齿，中间为 6 个齿，左边留 3 个齿。

为了乘法可以轻快地完成，需要一些特殊装置，以下将详细解释。这些被乘数轮要邻接加法器，方法是个位轮对个位轮，十位轮对十位轮，如 5 对 1,6 对 10,3 对 100（见附图），同时在加法器的小孔里显示所置初值 0 即 0,0,0。如果用 1 乘以 365，此时 3,6,5 的每个轮必完整地转一圈，因为三个轮大小相同，并被传送带裹在一起，故一轮转必带动其他，往下这点就更清楚了。这样，齿数依次为 3,6,5 的被乘数轮将带动加法轮转过相同齿数，100 位轮转过 3 齿，10 位轮转过 6 齿，个位轮转过 5 齿，结果 365 就会被送入加法器。

设数 365 被任意数（如 124）乘，则又需要第三种轮，即乘数轮。共有 9 个这样的轮。同时被乘数轮的齿可以卸下，以便同一个被乘数轮有时可以代表 1，有时可以代表 9，这取决于留下的齿数。相反，乘数轮每个轮只能代表仅仅一个数，代表 1 用相应适合的轮，代表 9 则用大小不同的另一种轮，等等（见图 2）。

这将按下列方式完成：任何一个乘法轮都被传送带裹系在一个小滑轮上，该滑轮固定在相应的被乘数轮轴上。乘数轮的直径是小滑轮的几倍，它代表的数就是几，乘数轮转一圈小滑轮转过的数也就是几。因此，直径是小滑轮直径的 4 倍的乘数轮代表的数就是 4。

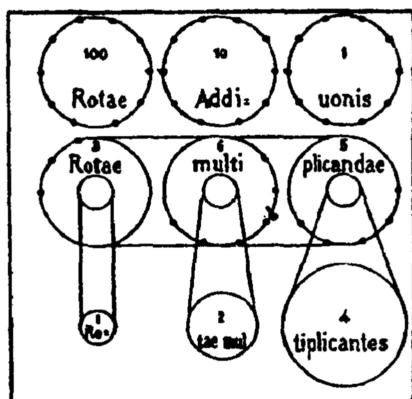


图 2

于是乘数轮转一转，相应地，直径为它四分之一的滑轮也就转四转，而与小滑轮固定在一起的被乘数轮也转了整四转。同时，当被乘数轮转了四圈之后，其齿将接触相应的加法轮 4 次，因而，加法轮将加上被乘数轮所代表的数的四倍。

最好是列举例子来说明一下:365 乘以 124。首先 365 必须先乘以 4。将乘数轮 4 转一圈，半径为其四分之一的相应滑轮将转过 4 圈，固定於该滑轮之上的被乘数轮 5，相应地也就转过 4 圈。因为被乘数轮 5 有 5 个齿，那末它转动 4 圈，带过的加法轮的齿数将是:4×5=20 齿。

被乘数轮 6 用另一条传送带与轮 5 系结在一起，轮 3 呢，也和轮 6 结系在一起。因为，轮 3、轮 6、轮 5 这些轮轴大小一样，当轮 5 转 4 圈时，同时轮 6 也转 4 次，并转而得到 24 个 10(这通过 10 位的加法轮表示)，同时被乘数 3 通过加法轮 100 的传递而得到 12 个一百。于是该步全部和是 1460。

用这种方法得 4 乘以 365，这是第一步运算。为了我们能再以 2(即 20)乘，需要把加法器平移一位，让被乘数轮 5 与乘数轮 4 同置于 10 位上，而刚才 4 乘时是同置于个位上。於是 6 与 2 同置于 100 位上，3 与 1 同对应于 1000 位上。此后让乘数轮 2 转一圈，同时 5 和 6 和 3 轮将转 2 圈，对应 5，加法轮加上 2 个 5 倍的 10，对

应 6，加法轮得到 12 个 100，对应 3，加法轮得到 6 个 1000，第二步总共给加法器增加了 7300，这一数目在转动时自动加上上一步的和 1460。

为了进行第 3 次以 1(即 100)乘的乘法运算，让加法器再平移一位(当然被乘数轮与乘数轮一起移动，而加法器停留在原处)。使轮 5 与乘数轮 4 被置在 100 位之上，6 和 2 被置在 1000 位之上，3 和 1 被置于 10000 位之上。如果轮 1 被转一次，同时轮 3，6，5 将被转动一次，于是在加法器里加上，该步的总和 36500 再加上前面的结果得到：

$$\begin{array}{r} 1460 \\ 7300 \\ \underline{36500} \\ 45260 \end{array}$$

注意，为了更大的方便，滑轮将如此固定在被乘数轮上，使滑轮转动时必能带动被乘数轮，但被乘数轮转动时滑轮可以不动。相反地，当任何一个乘数轮转动时，所有的被乘数轮都要动，而所有其他的乘数轮则不必动，从而增加了困难，并且扰动整个运转。

也要注意，乘数轮 1，2，3 等，次序不同是无差别的，但最好使它们按数值次序 1、2、3、4、5 排。于是甚至你可以随便先转哪个乘数轮都可以。

为了使某个乘数轮(例如代表 9 的乘数轮，它的直径是相应滑轮的直径的 9 倍)不太大，我们将把相应的滑轮做小一些，只要保证乘数轮与滑轮的直径比即可。

为了不使传送带的伸缩和滑轮打滑造成不规则运行，我们将采用铁链条来代替传送带，同时和链条的每个节咬合的铜齿将在数轮、滑轮的边沿上出现，即所有轮要做成齿轮。

如果我们需要造出一个更有吸引力的机器，可以这样来设计，人们不必手工地转动数盘，也不必做每一步乘法时，将乘法器平移：一切事情都能在开始时安排好，以至一切都能由机器自动地执行。这样，将使机器更昂贵、更复杂，还可能在实用中一点也不比原

来的好。

剩下来的是机器的除法，除法，特别是大数的除法，我想还没有人能让机器自己执行而不用一点心算。

机器除法不像手工除法那样穿迷宫似地复杂易错。请看我们的方法！让数 45260 除以 124；像手工除法一样，先找商数的最高位，即 452 所含的 124 的倍数。懂算术的一眼就能正确地估出第一位商，得到 3，用它乘 124，只消转一圈乘数轮。使得 372，从 452 减去，余数 80，合上 45260 的尾数得到 8060。(但在机器设计中使得被除数在每一步乘法中能自动减去该步得到的积，那末这过程便是自动的。)

再找 8060 含 124 的倍数，一望而知是 6，把它乘 124，即转一下代表 6 的乘数轮，得第二次积 744，从 806 减去 744，余数 62。和尾数 0 结合起来，得 620。把这第三次得到的余数 620 除以 124 得商 5。将 124 乘以 5 得 620，余数 620 减积 620 余 0。所以商是 365。

除了准确性以外，这种机器除法优于手工除法之处在于：我们的除法中乘法极少，才有商的位数或者试商的次数那么多次。在手工除法中，要乘的次数大得多，也就是要乘的次数是商的位数与除数的位数的积。前面的例子中我们的除法只要乘 3 次，因为除数 124，要和 365 的每个数字都乘一次——总共 3 次。而普通的手工除法，每个除数的数字都要和商数的每个数字相乘，在同一例中要做 9 次乘法。

我们的方法不管每次乘的数目[即除数]有多大，做起来都一样快，而手工除法则不然；类似地我们可以说手工除法当除数很大时几乎没法做，而机器方法则是无论大小每次乘都是乘法轮一转就得，且无分厘之差错。而手工方法乘法愈大，则做起来愈易出错，愈难，正因为如此，算术教师教除法时总选小些的除数，并每次只试一位商。要补提一笔的是，要做的大量工作都是微枝末节，即置被乘数的初值。也即根据情况改变被乘数轮上可动的齿数。除法中被乘数(即除数)永是同一个，仅仅乘数改变，因而并无移动机器的操作的必要。最后要说的是，我们的方法不需借助任何减法的工

作，因为相乘时机器自动做减法。从上面看很明显，除数越大，用机器就显得越优越。

很清楚，因为绝无错误，几无人工计算，这个机器用途很大，特别对政府和科学极有用。众所周知，纳皮尔筹曾被公众如何热情地接受，但它做除法时并不比手算更快捷可靠，而其乘法则需要反反复复地做加法运算。于是，纳皮尔筹不久就没用了。而我们的机器在乘法时什么也不用做就成，在除法时只作极少的一点点。

帕斯卡的机器是天助天才的大作，但因为它只简化了并不很难的加减法，把乘除法归结于前两种运算，因而只能作为一种满足好奇心的雅品受到赞美，而不是因为它在人们事务中得到的实用。

现在我们还能称赞这机器的是，它将为所有工作时要计算的人所需要，如金融业的经理，财产代理人、商人、测量员、地质学家、海员、天文学家以及其他一切从事与数学有关的工作的人。

在科学范围内的应用：旧的几何和天文学的图表将被修正，新的图表将被建立，利用它我们就能测量各种类型的曲线和图形，无论是简单曲线、复杂曲线还是未命名的曲线。像在直线测量情形一样。我们可以做得如同雷格蒙塔努斯(Regiomontanus)关于角圆的著作和卢多尔夫(Ludolphus of Cologne)关于圆的著作一样条理清楚。如果这能对最重要的和最常用的曲线和圆形进行——不管是否全部的话，那末建立了几何图形不仅包含直线和多边形，而且包含二次曲线和其他很重要的图形，不管它是以轨迹描述的还是以点描述的一种数表之后，我们都能断言几何在实用中将会完善。

还有，尽管光学显示和天文观察或者运动的合成会给我们带来新图形，但是对任何一个人来说自建表格指导研究来避免困惑和得到高精度，是容易的。因为众所周知，化圆为方和相信算术是几何严格性的保护者的人失败了。于是从事尽可能大地扩充大多数毕达哥拉斯的表格的工作是值得的。平方、立方，其他方次的表和根表，排列组合表，差分表和各种级数和，都一样能简化工作。

天文学家也必将不用真有计算的耐力，就是这个妨碍他们去

计算、斟正表格、去建立星历表、去研究假说、去和同行进行关于观测的讨论。杰出人物像计算的奴隶一样去浪费时间是不值得的，用上这计算机，这些计算交给任何人都可以。

我所说的关于该机器的建造和未来应用，在将来一定会更完善，并且我相信对于将来能见到它的人会看得更清楚。

（黄向东 译　孙小礼、郭世荣 校）

100. 巴贝吉:《论计算机的数学能力》

通用数字计算机的设计思想出现于19世纪上半叶,最先由英国数学家巴贝吉提出。巴贝吉(C. Babbage,1792～1871)生于伦敦附近一个富有的银行家家庭,1811年入剑桥大学,学生时期即创建“剑桥分析学会”,引进欧洲大陆国家的分析成果,对19世纪英国数学的复兴贡献良多。1816年当选为皇家学会会员,1827年出任卢卡斯数学教授。巴贝吉很早就热衷于计算机设计,1822年制成一台可运转的“差分机”模型,是一种专用机。大约在1834年又完成了一项他称之为“分析机”的新设计。这种分析机由“加工部”、“存贮部”以及专门控制运算程序的机构组成,实质已包含现代计算机设计的一些主要思想。巴贝吉为研制“分析机”而付出了后半生主要精力,甚至不惜辞去荣誉极高的卢卡斯教席。但由于时代限制,他的纯机械的方案在技术上遇到了巨大困难。巴贝吉的天才设想直到20世纪40年代随着电子计算机的诞生才得以实现。

巴贝吉生前未正式发表过任何关于“分析机”的专门著述。1842年,闵那布利(F. Menabrea)根据巴贝吉1840年在意大利都灵的一系列会议上的讲话记录撰文向公众介绍巴贝吉计算机设计思想(见 Bibliothèque Universalle de Genève, t. xli, Oct. 1842)。闵那布利的文章后经巴贝吉本人同意由拉甫雷斯夫人(Lady Lovelace,即 Ada Auqusta Byron,著名诗人拜伦之独生女)译成英文,题为《关于巴贝吉先生发明的分析机简讯》(见 Scientific Memoirs, vol. 3, pp. 666～731, 1843),其中加有拉甫雷斯夫人的注释,

包含了她自己在程序设计方面的创造性贡献，是计算机史上的重要文献。这里选录的则是巴贝吉本人写于1837年的一篇手稿《论计算机的数学能力》(On the Mathematical Powers of the Calculating Engine)，译自B. Randell (ed.)：Origins of Digital Computers，pp. 17～52，Springer，New York，1974)，是了解巴贝吉“分析机”设计思想的原始资料。巴贝吉原稿现藏牛津大学科学史博物馆(Oxford：Buxton MS7，Museum of the History of Science)。

本文意在表明数学科学从机械装置可得到多大的帮助。读者只要了解我发明的计算机的梗概，就能完全理解本文主题；要是略去机器本身不读，而认为某些机械数据是当然的，就可直接进入数学的研讨。我的计算机的运算部分分为两个子部分：①加工部[①]，一切运算均在其中完成；②存贮部[②]，存原始数据和算出的结果。装配连结计算机的机械布置：环绕大中心轮的小轮子构成加工部，而靠着纵向齿条的部分是存贮部。

加工部　两个数码轮轴：入轴I和出轴A″，把加工部与存贮部连在一起。而加工部本身由十部件组成：①三条码轴；②三条进位/借位轴；③十条表格码轴；④数字计数装置；⑤选择装置；⑥传动筒；⑦化简装置；⑧运算卡；⑨重复装置；⑩组合计数装置。

(1)码轴。码轴A与A′直接互相连接，不经过中心轮。因而，A(A′)上的数可以转换成A′(A)上的数。这两个数码轮轴比别的轮轴要大许多，这样，在它们周围就有充分的空间，以放置一些小齿轮来同本部其他部分联系。藉助于一些小齿轮可完成下行步操作或上行步操作，即把一个数的每位下降一格或上升一格；分别等价于除以10与乘以10。别的小齿轮装在寄存轴R与R_1上，用来

① 巴贝吉用语为mill，原意“工场”。

② 巴贝吉用语为store，原意“仓库”。

把被除数的最高两位数字传送到选择装置。轴 A″放在存贮部附近，为出轴，它邻近数字计数装置，并与之交换信息。

(2)进位/借位轴。轴 F，F′，F″连同其专用装置用以执行加减法中的进位与借位。F 与 F′可都与数轴 A 相连，也可让其中之一与 A 连，而另一与 A′连，或者它们都通过中心轮与本部的任何别的部分相连接。第三条轴 F″既与本部相连，又与存贮部相连，与之并用。若减数大于被减数，则相减产生的借位在第 41 格上产生借位信息。此信息通过一根杆发出借位警告，以使计算机作相关的动作。

(3)表格码轴。共十条这种轴，其中九条用以存放乘数的九个倍数或除数的九个倍数；第十条轴在执行除法时存放除数的补。这些轴均连于中心轮；每个码轮上的数字可以上行或下行到另一个码轮上；下行时底轮的数码至顶轮，而上行时顶轮的数码至底轮。

(4)数字计数的装置。 它可对放入加工部任意数进行计数的装置，比如算出乘除法结果中小数点的位置；它也用以在求根、求函数值的计算时限制要用的数码个数。此装置由三个相似的系统组成。

(5)选择装置。被乘数的九个倍数表制成后，有效的乘法就取决于能按乘数的相应位所指出的数字选取相应的倍数。这是不难实现的。不过在做除法时要求能从除数的九个倍数中选出比被除数小的最大的那一个倍数，实现难度高一个数量级。本装置主要由三个数码轮和传动装置组成，另加一些机构就能完成选择工作。它们安置在表格码轴的下面。

(6)传动筒。这些筒都是笔直的圆柱体，分成大约 70 多个环，每个环又分成大约 80 多个部分。每个环的这些部分中的一个或几个可以固定上一个螺栓。于是每个筒都有约 80 多个垂直的列，每列上固定的螺栓可有各种不同的组合方式。传动筒有两种运动方式：①随着轴的平行移动沿水平方向运动；②绕轴，顺时针或逆时针转动。当它在水平方向运动时其螺栓作用在一些杆上，以引发加工部动作，不同环上的螺栓给出不同的命令。有一些重要的命令如

下:(a)接收入轴上的数进入加工部;(b)把数从加工部送出。这可能是加工部删除的数、同时要置于出轴、或者是置于出轴而加工部保留的数;(c)转动一张变元卡;(d)转动一张运算卡;(e)传动筒作自身圆周运动或另一个筒绕另一根垂线做旋转。运算过程中每一步都要求做这种运动。传动筒一旦接到运算卡的命令,它从其另点位置进到指定的垂线位置,并主动转到能进行下一步操作的预备位置。

(7)化筒装置。每只传动筒后面均放有一个化筒装置。它有二到八个区,每个区都能作用于传动筒使之转动,并在进到下一步之前预先跳过几根轴。使这些区发生动作的杆由下述器件带动:(a)筒上自己的螺栓;(b)别的筒上的螺栓;(c)运算卡;(d)出格杆,其中(a)与(c)最常发生。

(8)运算卡。熟悉提花织机的人容易理解这类运算卡完成的功能,不熟悉这种精妙机器的人可能必须加以说明。这种运算卡用厚塑料板,薄锌板或薄锌片制成,上面穿有若干个孔;这些卡片由绳或带子串起来,穿过一个方棱柱。该棱柱置于某些杆子前面,而这些杆子排成一行用以制约化筒装置,从而制约了几个筒的动作。方棱柱表面打有一些孔,以给适当的杆子提供通路。若方棱柱朝这些杆按水平方向进一步,则这些杆就进入方棱柱相对的孔中并被其包住一部分不再离开自己的位置。如果一张运算卡上有与方棱柱一样多的孔,或有与之对着的杆子一样多的孔,且将这张卡片放到方棱柱前面,那末方棱柱前移时不对这些杆子产生作用。但若卡片上的孔比方棱柱上的少一个,放此卡片于棱柱前,则方棱柱前移一步时对着该孔的杆子就被推了一下,即给出了一条约定于该杆子的命令。假定每条命令发出之后就把杆子放回原处并令方棱柱转动 1/4 周,使一张新的卡片出现在杆子前面,新卡上有一个或几个孔阻塞住了,于是一条新的命令将通过杆子传给化筒装置,然后传给传动筒。据此,通过安排好打孔卡片,一个命令序列由这些杆子反映出来。受运算卡作用的杆子数量很少,它们分别指向传动筒以启动下列运算:(a)两数相加;(b)两数减;(c)两数乘;(d)做相同乘

法若干次(由第一个数码决定);(e)两数相除;(f)做相同除法若干次(由商数决定);其中(d)与(f)用得很少,只在求根的运算中才用。运算卡由传动筒发出的指令调用。运行时它们发出的命令由每张卡片的性质决定;而它们的重复使用取决于组合卡及计数装置传来的命令。运用两组变元卡可以简化许多计算。

(9)组合卡。组合卡用以插入运算卡中,是一种特殊的卡片。其用途为管制运算卡和变元卡中的重复机制,即指示某一段运算卡与变元卡返回到给定的位置,并指示要重复的次数与性质。只要用到组合卡,另一种叫做指标卡片的一定要放在公式卡片之中以指示组合卡何时起作用。至于组合卡会给出什么样的指令取决于每张组合卡自身的性质。

存贮部 放置数据的场所。初始数据,问题的条件,一些中间结果以及最终结果均存于存贮部。它包含有:①数轴;②计算装置;③数字卡;④卡片穿孔设备;⑤打印设备;⑥铜制打孔仪器;⑦绘曲线仪器;⑧变元卡。数轴和变元卡对本文所讨论的数学是必须的,而别的部件提及即可。

(1)数轴。包括有若干根轴,每根轴上置四十个码轮,一轮一格,摞起叠放。所有数码轴均与存贮部的齿条相连。每个码轮上均标有 0 至 9 十个数字,用手可转动它们;每条轴都可放置一个不超过 40 位的数。第四十一格设有符号轮,交替标上正负号(+,-,总共十个)。轴最上端标示变元记号 $v_1, v_2, \cdots$;轴有多少根就有多少变元可表示。在最低码轮下方设小方框,用以插入表示计算的卡片,而常量及其符号由卡片上方的码轮表示。下面六个计算,

$$v_1 = 0 \qquad\qquad v_4 = -23410x^3$$

$$v_2 = -1758a \qquad\qquad v_5 = +36\sin\theta$$

$$v_3 = +4971x \qquad\qquad v_6 = +247\sqrt{a^2+x^2}$$

表示在数码轴上就是下列形式:

变　元	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
符号格(第41格)	+	−	+	−	+	+
第40格	0	0	0	0	0	0
……			……			
第5格(万位)	0	0	0	2	0	0
第4格(千位)	0	1	4	3	0	0
第3格(百位)	0	7	9	4	0	2
第2格(十位)	0	5	7	1	3	4
第1格(个位)	0	8	1	0	6	7
问题的变元		a	x	x^3	$\sin\theta$	$\sqrt{a^2+x^2}$

我们采用一种叫数据卡片的装置以克服变元数目多于数码轴数目造成的困难,也使轴数过多造成太重,不便转动,不安全的现象得以消除。若系数中有十进小数,则把所有系数看作是有相同位小数的数。比如在第一、二格间想象有一条线,表示系数有一位小数,并专设刻有数1至40的小轮,将此信息传递至机器。……

(8)变元卡。用以调控存贮部的其他部件。其主要功能是:(a)把一个存贮轴表示的数传到入轴Ⅰ;(b)从出轴A接收一个数至一个存贮轴;(c)从数据卡接受一个数;(d)传数和卡片至穿孔装置。为此所设的传杆装置数量并不大,卡片也不大,比如14吋及相等的14个孔作数据卡,可对付8000个变元的需要。

运算　加工部可完成:加、减、乘、除、求根,五种运算。若加上少量传动筒,螺栓作少许排列变动,则还可增加别的运算。本机不但对算术运算帮助很大,由于可处理正负号,用处更大。

(1)加。……

(6)除。在设计算术操作时会遇到许多困难,而除法运算的设计最困难。我一开始就用较大的除数和被除数作原始设计,并使用借位原理,使之可为其他操作所共用。根据一个小数减去一个大数会有借位,两数相除的方式如下(以 00432101234　除以 2018　为

例）：

1.	从被除数最高位 对除数做减法并 记下做了一次减法	00432101234 00201800000 00230301234	（登录） +1	
2.	继续	00201800000 00028501234	+1	
3.	继续	00201800000 99826701234	+1	有借位，要加上除数然后左移一位
4.	加上除数登录－1	00201800000 00028501234	－1	
5.	被除数左移一位	0028501234		
6.	如 1	0020180000 0008321234	+1	
7.	继续	0020180000 9988141234	+1	如 3 右面动作
8.	如 4	0020180000		
9.	如 5	0008321234 008321234	－1	
10.	如 1	002018000 006303234	+1	
11.	继续	002018000 004285234	+1	
12.	继续	002018000 002267234	+1	
13.	继续	002018000 000249234	+1	
14.	继续	002018000 998231234	+1	如 3 右面动作
15.	如 4	002018000		
16.	如 5	000249234 00249234	－1	

17.	如 1	00201800 00047434	+1	
18.	继续	00201800 99845634	+1	如 3 右面动作
19.	如 4	00201800		
20.	如 5	00047434 0047434	−1	
21.	如 1	0020180 0027254	+1	
22.	继续	0020180 0007074	+1	
23.	继续	0020180 9986894	+1	如 3 右面动作
24.	如 4	0020180		
25.	如 5	0007074 0070740	−1	
26.	如 1	0020180 0049560	+1	
27.	继续	0020180 0029380	+1	
28.	继续	0020180 0009200	+1	
29.	继续	0020180 9989020	+1	
30.	如 3 右,并停止	0020180 0009200 009200	−1	

从上例知,基本命令是被除数减去除数并记录下执行次数,在发生借位时通过借位杆传递此信息以作出修正,得到 1 位商;重复此过程就得到最后的商数。完全理解此原理十分重要,因为这不仅适用于除法,也适用于一切试验性的算术过程甚至与代数有关的试验性过程,比如,我已将之用于求根。举例只是为了解释原理,事实上执行除法不用此示例过程,因为这太费时间。在执行除法运算之

后，商数和余数送至出轴 A，进而可至存贮部。

(7)求平方根。在设计与制造机器的过程中我曾确定要求平方根。起先的设计是利用借位做直接求平方根，但发现过程太长；后来改为利用逐步逼近法，求平方根的逼近过程并不比直接求解化时多。按此原理求三次根和更高次根也一样方便。在我现在的机器中求根用的都是逼近法。若数有负号“－”，则先求算术平方根，然后乘以$\sqrt{-1}$。如何执行逼近法我将另文介绍。

计算代数公式的数值

……

(1)验证置于存贮部的数。要操作的数可用手工方式置于存贮部，也可用数字卡打孔后转送至存贮部。这两者均可能出错；为确保问题解的正确，必须验证原始数据，不可只依赖机器。给定常数即使有成百上千个，验证它们也不难。利用卡片，常数在进入机器前先通过打印设备，后送入存贮部。这样，原始数据与结果均会印在一张纸上以便检验，修正。显然，不论计算什么代数公式的数值，我总有不少办法查出助手插入的常数的错误。

(2)验证置于卡片上的公式。验证公式正确性不像常数正确性验证那样简单，也不那样绝对可信。然而，必须让助手关注每一步公式计算之后他插入数据的变化；他要将卡片排好顺序，任何疏忽都会引起计算错误。对于一些重要代数公式的计算，特别是公式不会再变动的那些重要的计算工作，这种公式正确性验证工作由勤奋的管理者来做会合理些。我还提议几种辅助的方法自检自查。比如，把操作卡制成不同的颜色：白卡为加，黄卡为减，蓝卡为乘，绿卡为除。在完成一叠操作卡的运算后，卡片总数应和公式中的操作总数一致；白卡张数应等于公式中加法运算的次数，……，绿卡张数应等于公式中除法运算的次数。又，进入机器的常数个数和结果的个数是已知的，因此变量卡的数量也是已知的。类似于操作卡，变量卡也可着色。另一种部分验证公式正确性的方法是代入一些用笔可算出的值；若操作卡或变量卡位置有错，机器确认的公式不

是要的公式，则得到的数值结果就和笔算的值不一样；若试过三四次之后，发现机器给出的结果均与笔算值完全一致，则就不必怀疑在这些卡片中有何差错。当计算较复杂，可有二种或更多种代数公式表示它时，我们可以同时制作二套或更多套卡片，若每套卡片计算时使用相同常数有相同结果，则可认为公式正确。用以上这些方法验证公式正确性之后，计算具有很高的安全性，但最好还是让机器把它算过的公式像常数一样地打印出来。

……

(4)计算所化费的时间。设计机器总希望运算时间尽可能缩短。我不能说期望已成功实现，但有一种方法可估计出计算时间以及指出出错的原因。第一步定义单位空间和单位时间：我假设单位空间为轮上两个数的距离，而单位时间为同一个轮上数字从一处至另一处所费的时间(约几分之一秒)。机器处理一次所费的时间称为一个周期，包括引导动作，执行运算命令，锁定运动轮，进位以及进位后锁定轮的时间。经测算，无进位需 15 个单位时间，有进位需 20 个单位时间。缩短计算时间的第一个办法是缩短单位空间，即两个数间的距离；这会要求机器更精密，工艺更精良。……我要说我现在采用的结构是最合适的。……在检查了操作因素和指出了所占时间的主要组成部分后，下一步考虑的是集成化操作。……

机器在计算同样的公式所需时间按其公式形式不同而不同。如，计算

$$x=\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}$$

需 8 次乘法，2 次加法和 1 次除法；若改写为 $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$，则只需 3 次除法和 2 次加法。又如，计算 $a^6+5a^5b+10a^4b^2+20a^3b^3+10a^2b^4+5ab^5+b^6$ 需 35 次乘法和 6 次加法；改写为 $(a+b)^6$ 只需 5 次乘法和 1 次加法。这种情况产生的结果非常重要，值得我们注意，特别是那些对计算分析感兴趣的人和做数字控制研究的人。只要在世界某处有这种计算机，那些希望将他们的理论用数字来验

证的人显然都会努力使机器在最短时间中算出所要的分析结果并为之兴高采烈，他们的整个分析过程也走向此目标。但，那些忽视我们在本节所给出指示的人不会发现他的计算化费多少，更不会发现手工造成了什么错误。

（陈祖舜 译　陆维明 选、校）

[General Information]
书名=数学珍宝——历史文献精选
作者=李文林
页数=864
SS号=10068329
DX号=
出版日期=1998年10月第1版
出版社=科学出版社